

Г л а в а 5. ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В этой главе рассматриваются сферические, цилиндрические и плоские волны в однородной среде, характеризующейся тем, что в ней существуют только волны дилатации ($\text{rot } \mathbf{s} = \mathbf{0}$). Детально обсуждается поведение таких волн в ближней, промежуточной и дальней зонах.

5.1. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Предположим, что в однородной среде с модулем всестороннего сжатия K и плотностью ρ_0 содержится сферическая полость радиуса R_0 (рис. 5.1, а). В момент времени $t = 0$ полость начинает пульсировать, вследствие чего в каждой точке ее поверхности действует сила, направленная по нормали к поверхности и имеющая во всех точках одинаковую величину:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = P(\mathbf{p}, t)\mathbf{S}\mathbf{n}. \quad (5.1)$$

Здесь S – площадь поверхности источника, $P(\mathbf{p}, t)$ – давление в точке \mathbf{p} на

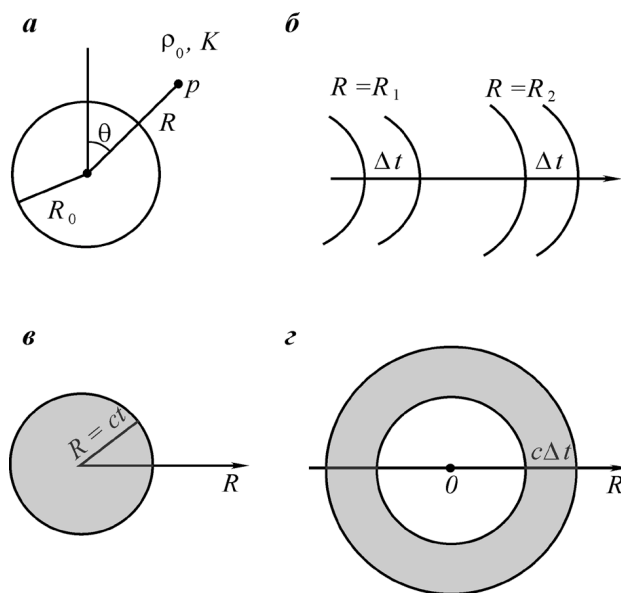


Рис. 5.1. Сферическая волна

поверхности полости, \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности, направленная от источника.

Из-за колебаний давления, вызванных изменением радиуса источника, в среде возникают и распространяются волны. Очевидно, что распределение давления, так же как и распределения смещений и скоростей частиц в волне дилатации, является сферически-симметричным. Учитывая этот факт, выберем сферическую систему координат с началом в центре полости и предположим, что все перечисленные функции зависят только от одной координаты R :

$$\mathbf{v} = v(R, t)\mathbf{i}_R, \quad P = P(R, t) \quad \text{и} \quad \mathbf{s} = s(R, t)\mathbf{i}_R. \quad (5.2)$$

Здесь \mathbf{i}_R обозначает единичный вектор, направленный по радиусу.

АКУСТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Чтобы задать волновые поля, удобно использовать скалярный потенциал смещения $\varphi(\mathbf{r}, t)$, который в рассматриваемом случае является функцией только одной координаты R :

$$\varphi = \varphi(R, t). \quad (5.3)$$

Смещения и скорости частиц, а также давление выражаются тогда через производные функции $\varphi(R, t)$. Если же в основу рассмотрения положить давление или скалярный потенциал скорости, то по крайней мере одно из волновых полей будет определяться с помощью интегрирования, что гораздо менее удобно.

Как следует из раздела 4.2,

$$\mathbf{s} = \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{v} = \partial \mathbf{s} / \partial t \quad (5.4)$$

и

$$P = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (5.5)$$

и всюду вне источника потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (5.6)$$

Здесь c обозначает скорость волны дилатации.

Помимо этого, необходимо дать описание поведения потенциала на поверхности полости, а также сформулировать начальные условия. В результате колебаний полости возбуждаются уходящие волны, амплитуда которых уменьшается с расстоянием от источника. В пределе имеем

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad R \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Условие (5.7) имеет простой смысл, оно означает отсутствие источников на бесконечности. Как было отмечено ранее, то же самое можно получить,

если представить себе сферическую поверхность, радиус R которой настолько велик, что волна не успевает достигнуть поверхности за время наблюдения (а также до начала наблюдений). Стоит заметить, что информация о волнах на бесконечности содержится в начальных условиях.

Пусть смещение поверхности полости описывается функцией

$$s_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ s_0 f(at) & t \geq 0. \end{cases}$$

Наличие коэффициента a в этой формуле связано с тем, что аргумент указанной выше функции является безразмерным. Этим аргументом может быть, например, угловая частота ω .

Тогда, по определению (см. равенства 5.4), граничное условие для потенциала в точках поверхности полости можно представить в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = s_0 \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(at) & t \geq 0, \end{cases} \quad \text{если } R = R_0 + s_R(t). \quad (5.8)$$

Предположим также, что до момента времени $t = 0$, когда начал действовать источник, волновые движения во всех точках среды отсутствовали:

$$s(R, 0) = 0 \quad \text{и} \quad p(R, 0) = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi(R, 0)}{\partial R} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \varphi(R, 0)}{\partial t^2} = 0, \quad \text{если } R > R_0. \quad (5.9)$$

Таким образом, граничную задачу для скалярного потенциала можно сформулировать в виде следующих условий.

1. В регулярных точках среды

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

2. На поверхности источника

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = s_0 \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(at) & t \geq 0, \end{cases} \quad \text{если } R = R_0 + s_R(t).$$

3. В начальный момент времени волновое поле в среде отсутствует:

$$\frac{\partial \varphi(R, 0)}{\partial R} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \varphi(R, 0)}{\partial t^2} = 0, \quad \text{если } R > R_0, \quad t = 0.$$

Найдем, прежде всего, решение волнового уравнения, которое в сферической системе координат записывается в следующем виде (см. приложение 3):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (5.10)$$

Здесь учтено, что потенциал зависит только от координаты R .

Чтобы упростить решение этого уравнения, введем новую функцию

$$W = R\varphi.$$

Дифференцируя скалярный потенциал φ , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -R^{-2}W + R^{-1} \frac{\partial W}{\partial R}$$

и

$$R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = -W + R \frac{\partial W}{\partial R}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = R \frac{\partial^2 W}{\partial R^2}$$

и уравнение (5.10) можно переписать в виде

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} = \frac{1}{Rc^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

Это уравнение уже упоминалось в главе 3 при описании распространения волн вдоль одной из координатных осей. Решение данного уравнения состоит из двух независимых функций:

$$f_1[a(t - R/c)] \text{ и } g_1[a(t + R/c)].$$

Соответственно, скалярный потенциал запишется как

$$\varphi(R, t) = A \frac{f_1[a(t - R/c)]}{R} + B \frac{g_1[a(t + R/c)]}{R}, \quad (5.11)$$

где A и B – некоторые константы.

Поскольку второе слагаемое в правой части этого выражения описывает волну, распространяющуюся из бесконечности в направлении источника, оно не удовлетворяет начальным условиям. Таким образом, можно положить $B = 0$, что даст следующее выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi(R, t) = A \frac{f_1[a(t - R/c)]}{R}. \quad (5.12)$$

Очевидно, что скалярный потенциал (5.12) характеризует волну, распространяющуюся от точечного источника с фазовой скоростью c , и удовлетворяет волновому уравнению и условию (5.7).

Чтобы определить неизвестный коэффициент A и функцию f_1 , используем условие (5.8), справедливое для всех точек движущейся поверхности источника. Из равенств (5.4) и (5.12) следует

$$s_R(R, t) = \partial\varphi/\partial R$$

или

$$s_R(R, t) = \frac{Af_1[a(t-R/c)]}{R^2} - \frac{Aa}{c} \frac{f_1'[a(t-R/c)]}{R},$$

где $f_1'[a(t-R/c)]$ обозначает первую производную функции f_1 по аргументу $a(t-R/c)$.

Сделаем теперь три предположения. Прежде всего предположим, что пульсации источника характеризуются относительно малыми смещениями т.е.

$$1. |s_R(t)| \ll R_0.$$

Поэтому в граничном условии (5.8) положение поверхности полости можно задать, используя постоянную координату R_0 . Смещение точек этой поверхности можно представить в виде

$$s_0 f(at) = -\frac{Af_1[a(t-R_0/c)]}{R_0^2} - \frac{Aa}{c} \frac{f_1'[a(t-R_0/c)]}{R_0}. \quad (5.13)$$

Таким образом, определение неизвестных величин сводится к решению дифференциального уравнения. Чтобы упростить процедуру поиска решения, предположим, что второе слагаемое в правой части уравнения (5.13) также мало:

$$2. \left| \frac{1}{R_0^2} f_1[a(t-R_0/c)] \right| \gg \left| \frac{a}{cR_0} f_1'[a(t-R_0/c)] \right| \text{ и } 3. t \gg R_0/c.$$

Тогда вместо уравнения (5.13) получим

$$s_0 f(at) = -Af_1(at)/R_0^2, \quad (5.14)$$

откуда

$$A = -R_0^2 s_0 \text{ и } f_1(at) = f(at). \quad (5.15)$$

Подстановка равенств (5.15) в уравнение (5.12) дает следующее приближенное выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi(R, t) = -\frac{R_0^2 s_0}{R} f[a(t-R/c)], \text{ если } R \geq R_0. \quad (5.16)$$

В заключение этого раздела мы определим условия, при которых полученное выражение для скалярного потенциала описывает волновое поведение с достаточной точностью.

Очевидно, что функция $\varphi(R, t)$, задаваемая выражением (5.16), удовлетворяет волновому уравнению и условию вблизи источника. Более того, поскольку функция $f[a(t-R/c)]$ и ее производные равны нулю, когда аргумент $a(t-R/c)$ отрицателен, скалярный потенциал φ удовлетворяет также начальным условиям. Таким образом, мы получили решение граничной задачи и, соответственно, $\varphi(R, t)$ является скалярным потенциалом смещения для случая однородной среды и сферического источника (5.8).

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В соответствии с равенствами (5.4)–(5.5) радиальные компоненты смещений и скорости, а также избыточное давление описываются следующими выражениями:

$$s_R(R, t) = \frac{R_0^2}{R} s_0 f \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 a s_0}{cR} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (5.17)$$

$$v(R, t) = \frac{R_0^2}{R^2} a s_0 f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 a^2 s_0}{cR} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

и

$$P(R, t) = \frac{R_0^2 a^2 s_0 \rho_0}{R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right].$$

Поскольку

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{s} = -P/K,$$

дилатация описывается как

$$\theta = -\frac{R_0^2 a^2 s_0 \rho_0}{KR} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

или

$$\theta = -\frac{R_0^2 a^2 s_0}{c^2 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (5.18)$$

В выражениях (5.18) учтено, что

$$K = \rho_0 c^2.$$

В то же время

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (5.19)$$

и, как уже было сказано, волны дилатации не вызывают вращения и деформаций простого сдвига в объеме независимо от его ориентации.

В дальнейшем мы будем использовать следующие два основных свойства функции $f[a(t - R/c)]$ и ее производных.

1. Если аргумент $a(t - R/c)$ отрицательный, указанные функции принимают нулевые значения.

2. Распределение давления и дилатации, а также смещения и скорости частиц зависит от одной единственной координаты R , т.е. указанные функции остаются постоянными на сферической поверхности с центром в источнике. Такая волна является сферически симметричной, и именно поэтому она называется сферической.

Векторы смещения и скорости частиц имеют только радиальную компоненту и, следовательно, перпендикулярны к поверхности

$$R = \text{const},$$

что отражает одно из возможных свойств волн дилатации.

Предположим, что поверхность полости изменяется в течение интервала времени Δt :

$$0 \leq t < \Delta t,$$

и рассмотрим волну, пришедшую в некоторую точку на расстоянии R от источника.

Как это следует из равенств (5.17), частицы среды будут покоиться в моменты времени

$$t < R/c.$$

Затем в момент времени

$$t = R/c$$

волна одновременно придет во все точки с одной и той же координатой R . В этот момент наблюдается волновой фронт. В течение интервала времени

$$R/c \leq t \leq R/c + \Delta t$$

частицы вовлечены в волновое движение, которое сопровождается также появлением избыточного давления и деформаций жидкости (рис. 5.1, а).

В момент времени

$$t = \frac{R}{c} + \Delta t$$

хвост волны минует точку наблюдения, после чего среда вернется в состояние равновесия. Таким образом, независимо от расстояния продолжительность волны равняется Δt , а время пробега волны до точки наблюдения увеличивается с расстоянием.

Рассмотрим, как волна распределяется с расстоянием R . Прежде всего заметим, что волна может существовать только на расстояниях R , удовлетворяющих следующему условию:

$$R \leq ct.$$

Кроме того, следует разделять два случая:

$$1) \Delta t > t, \quad 2) \Delta t < t.$$

В первом случае в момент времени t источник продолжает возбуждать колебания, и, следовательно, волновые движения происходят всюду внутри сферического объема радиуса

$$R = ct,$$

как это показано на рис. 5.1, а.

Во втором случае волна приходит в точку наблюдения, когда источник уже прекратил действовать. В момент времени $t = R/c$ хвост волны достигает точек с координатой

$$R = c(t - \Delta t).$$

Таким образом, в этом случае волна наблюдается в сферическом слое толщиной

$$\Delta R = c\Delta t.$$

Очевидно, что форма волны $\varphi(R, t)$ и толщина слоя ΔR не изменяются с расстоянием от источника (рис. 5.1, а).

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрим теперь волновые поля P , s , v и θ как функции времени и расстояния от источника. Но сначала следует сделать два замечания.

1. Работа внешних сил, действующих в источнике, преобразуется в механическую энергию волны, и ее количество остается постоянным, поскольку мы пренебрегаем влиянием диссипации. Как мы знаем, с течением времени объем сферического слоя, занятого волной, становится больше и плотность энергии уменьшается. Это показывает, что с увеличением расстояния R скорость и избыточное давление, а также значения других параметров волнового поля уменьшаются, что, конечно, следует из выражений (5.17), (5.18).

2. По определению, дилатация в сферической системе координат дается следующим выражением (см. приложение 3):

$$\theta = \operatorname{div} s = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 s),$$

где

$$s = s_R.$$

Далее, принимая во внимание первое из соотношений (5.17), имеем

$$R^2 s = R_0^2 s_0 f \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 a s_0 R}{c} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

и, после дифференцирования,

$$\theta = -\frac{R_0^2 s_0 a}{R^2 c} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 s_0 a}{c R^2} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] -$$

$$-\frac{R_0^2 s_0 a^2}{c^2 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

или

$$\theta = -\frac{R_0^2 s_0 a^2}{c^2 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right],$$

что, безусловно, совпадает с (5.18).

Эти формулы показывают несколько интересных свойств дилатации. Прежде всего, независимо от расстояния до источника ее поведение определяется второй производной функции $f[a(t - R/c)]$. Например, в окрестности источника в выражении для смещения доминирующую роль играет первый член

$$\frac{R_0^2 s_0}{R^2} f\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right],$$

но при этом дилатация существенно зависит от производной, взятой от второго члена:

$$\frac{R_0^2 s_0 a}{cR} f'\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right].$$

Другое важное свойство функции θ состоит в том, что ее зависимость от расстояния всюду одинаковая. Наконец, как следует из выражения (5.18), дилатация сферической волны уменьшается с ростом фазовой скорости c . Это предполагает, что конечное значение этой скорости является необходимым фактором для деформации жидкости. Например, если волна распространяется мгновенно ($c \rightarrow \infty$), то смещение $s(R, t)$ становится равным

$$s(R, t) = \frac{R_0^2 s_0}{R^2} f(at),$$

и, следовательно, дилатация θ , характеризующая изменения элементарного объема, обращается в ноль.

Чтобы проиллюстрировать поведение волновых полей, предположим, что смещение поверхности полости в момент времени $t = 0$ начинает расти, достигает максимума, а затем постепенно уменьшается до нуля. Помимо этого, предположим, что первые и вторые производные смещения также равны нулю в начале процесса $t = 0$ и в момент времени Δt . Поведение указанных функций показано на рис. 5.2, а.

В соответствии с (5.17) избыточное давление определяется как

$$P(R, t) = \frac{ma^2}{4\pi R} f''\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \quad (5.20)$$

где

$$m = \rho_0 4\pi R_0^2 s_0 \quad (5.21)$$

является массой жидкости, переместившейся от источника, когда смещение полости равнялось s_0 .

Таким образом, поведение давления определяется, независимо от расстояния до источника, величиной отношения

$$\frac{f''[a(t - R/c)]}{R}.$$

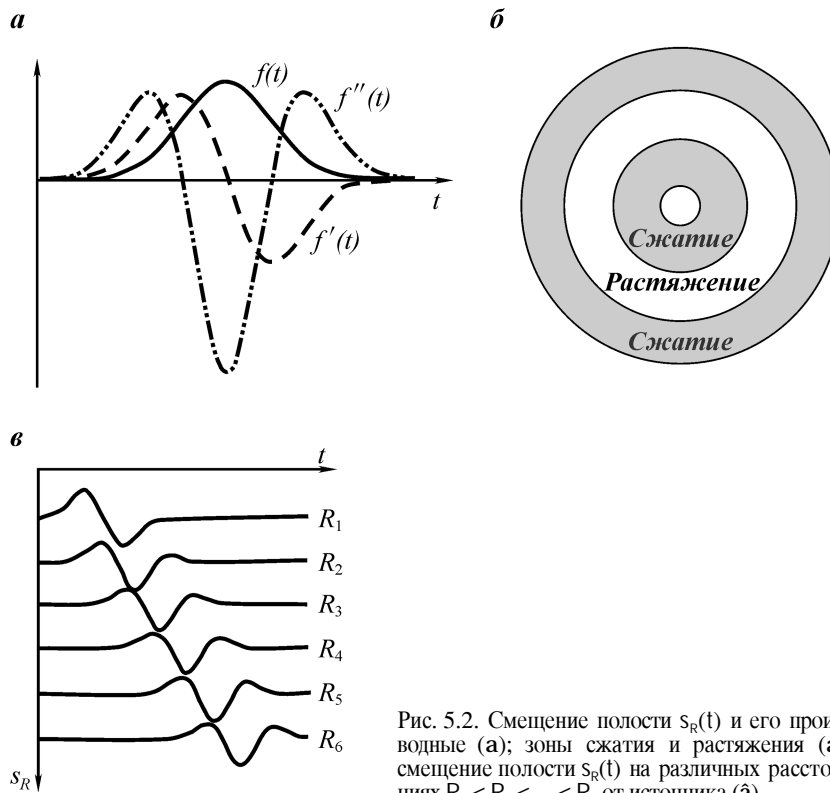


Рис. 5.2. Смещение полости $s_R(t)$ и его производные (а); зоны сжатия и растяжения (б); смещение полости $s_R(t)$ на различных расстояниях $R_1 < R_2 < \dots < R_6$ от источника (в)

Например, если время и расстояние удовлетворяют равенству
 $t_* = t - R/c = \text{const}$,

то давление изменяется обратно пропорционально R .

Как видно из рис. 5.2, а, функция $f''(t_*)$ меняет свой знак дважды. Снова предположим, что волна наблюдается в некоторой точке с координатой R . До момента времени $t = R/c$ давление отсутствует. Затем в течение интервала времени

$$R/0 < t < R/c + \Delta t$$

существуют два более коротких интервала времени, на которых давление P является положительным, а между ними – отрицательным.

Ранее мы предположили, что смещение поверхности полости характеризуется только одним максимумом. В более общем случае количество интервалов, на которых давление P будет иметь поочередно положительные и отрицательные значения, возрастает.

Поскольку

$$\theta = -P/K,$$

дилатация ведет себя похожим образом, но с другим знаком. Это означает, что положительные и отрицательные значения P наблюдаются соответственно в зонах сжатия и растяжения. Данное рассмотрение ясно указывает на то, что в каждый момент времени мы можем различать три части волны (см. рис. 5.2, а). Поскольку в начале процесса избыточное давление является положительным, приходим к заключению, что внешняя часть сферического слоя находится в состоянии сжатия. Промежуточная часть находится в состоянии растяжения ($P < 0$), а задняя часть – снова в состоянии сжатия (рис. 5.2, á). Зоны сжатия всегда чередуются с зонами растяжения в волне, ограниченной сферическим слоем. Для доказательства этого утверждения рассмотрим интеграл от дилатации:

$$\int_{t_1}^{t_2} \theta dt = -\frac{ma^2}{4\pi Rc^2} I, \quad (5.22)$$

где

$$t_1 < \frac{R}{c}; \quad t_2 > \frac{R}{c} + \Delta t;$$

Δt – продолжительность действия источника;

$$I = a \int_{t_1}^{t_2} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] dt. \quad (5.23)$$

Выполняя интегрирование, получим

$$I = f' \left[a \left(t_2 - \frac{R}{c} \right) \right] - f' \left[a \left(t_1 - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (5.24)$$

Поскольку в момент времени $t = t_1$ волна еще не пришла в точку наблюдения, скалярный потенциал ϕ и его производные равняются нулю, и, следовательно, выражение (5.24) переписывается в виде

$$I = f' [a(t_2 - (R/c))]. \quad (5.25)$$

Если мы предположим, что функция $f' [a(t_2 - (R/c))]$ отлична от нуля, то согласно (5.17) должно существовать движение частиц позади волны. Поскольку это невозможно, мы должны положить

$$f' [a(t_2 - (R/c))] = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2} \theta dt = 0. \quad (5.26)$$

Последнее выражение показывает, что если возбуждение колебаний в ис-

точнике происходит в течение конечного промежутка времени, то для произвольной функции $f(at)$ существуют зоны сжатия и растяжения в пределах сферической волны. Более того, распределение дилатации θ и избыточного давления P между фронтом и окончанием волны таково, что интегралы

$$\int_{t_1}^{t_2} \theta dt \quad \text{и} \quad \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

равны нулю. Очевидно, что этот результат не зависит от величины коэффициента A в (5.12).

Согласно формуле (5.17) смещения и скорости частиц описываются суммой двух слагаемых, причем каждое из них по-разному зависит от расстояния. Поэтому естественно различать три интервала расстояний, которые обычно называют ближней, промежуточной и дальней зонами. Начнем с рассмотрения первой зоны.

1. Ближняя зона

Если расстояния от источника относительно малы, т.е. первое слагаемое в выражениях (5.17) для s и v является доминирующим, то мы имеем

$$\begin{aligned} s(R, t) &\approx \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} f\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \\ v(R, t) &\approx \frac{ma}{4\pi\rho_0 R^2} f'\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \end{aligned} \quad (5.27)$$

в то время как

$$P(R, t) \approx \frac{ma^2}{4\pi R} f''\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]$$

и

$$\theta = -P/K.$$

В этой зоне функции s и v относительно быстро уменьшаются с расстоянием от источника, а их зависимость от времени такая же, как для соответствующих функций на поверхности полости.

Тем не менее, дилатацию и избыточное давление нельзя получить из приближенного уравнения (5.27) для смещений. Чтобы получить правильные выражения, описывающие поведение θ и P , необходимо учесть второе слагаемое в формуле (5.17) для функции $s(R, t)$.

2. Промежуточная зона

С увеличением расстояния от источника влияние второго члена в правой части выражений (5.17) для смещения и скорости становится все более за-

метным. Поэтому с изменением расстояния R изменяется и форма волновых полей $s(R, t)$ и $v(R, t)$, как функций времени. Пример такого поведения для смещения представлен на рис. 5.2, а.

3. Дальняя зона

Как следует из соотношений (5.17), на достаточно больших расстояниях

$$s(R, t) \approx \frac{ma}{4\pi c \rho_0 R} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right],$$

$$v(R, t) \approx \frac{ma^2}{4\pi c \rho_0 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$
(5.28)

и

$$P(R, t) \approx \frac{ma^2}{4\pi R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right].$$

В этой зоне, в отличие от предыдущего случая, все волновые поля убывают с расстоянием одинаковым образом и относительно медленно. Как и в ближней зоне, здесь поведение волны как функции времени не зависит от расстояния до источника.

В соответствии с (5.28) отношение скорости к избыточному давлению определяется как

$$v/P = 1/c\rho_0 = 1/Z.$$
(5.29)

Как мы уже знаем, параметр

$$Z = c\rho_0$$
(5.30)

называется, по аналогии с электрическими цепями, волновым сопротивлением или импедансом среды. Скорость и давление играют роль, соответственно, тока и напряжения. При изучении плоских волн в слоистых средах мы будем часто использовать понятие импеданса, как это уже делалось в случае пружины.

С увеличением расстояния от источника кривизна сферических поверхностей волны становится меньше. Это приводит к увеличению области, где волну можно рассматривать как плоскую волну практически одинаковой амплитуды.

ДИЛАТАЦИЯ ВБЛИЗИ ИСТОЧНИКА

Прежде чем рассматривать примеры сферических волн в однородной среде, интересно обсудить связь между скоростью сферической полости и деформацией среды вблизи источника. Выберем с этой целью достаточно малый интервал времени

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

так, чтобы практически любую функцию $f(at)$, характеризующую смещение поверхности полости

$$S(R_0, t) = s_0 f(at) \quad \text{и} \quad s_0 > 0, \quad a > 0,$$

можно было приближенно представить как

$$f(at) = a_0 + a_1(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2 \quad (5.31)$$

и так, чтобы эта функция не меняла знака. Помимо этого, предположим, что

$$a_2(t - t_1)^2 < |a_1(t - t_1)| \quad \text{и} \quad 2a_2(t - t_1) < |a_1|.$$

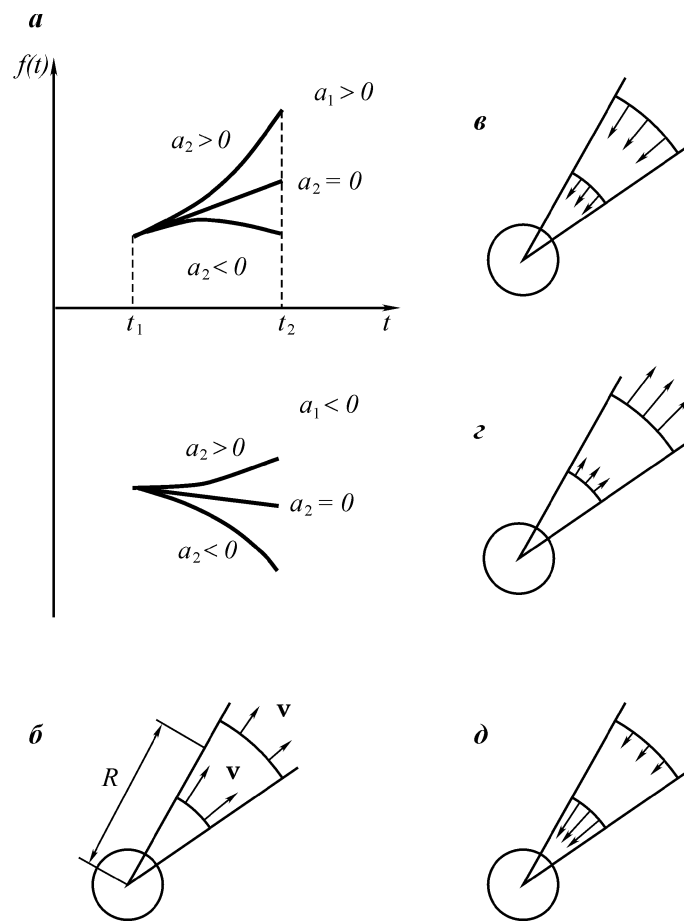


Рис. 5.3. Скорость источника и деформация в его окрестности

Соответственно, первая и вторая производные определяются как

$$\begin{aligned} f'(at) &= [a_1 + 2a_2(t - t_1)]a, \\ f''(at) &= 2a_2a^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Далее естественно различать три случая:

$$1) a_2 > 0, \quad 2) a_2 < 0, \quad 3) a_2 = 0,$$

для которых функция $f(at)$ ведет себя различным образом (рис. 5.3, а). Рассмотрим эти случаи отдельно друг от друга.

Случай 1: $a_2 > 0$

Предположим сначала, что $a_1 > 0$. Тогда скорость поверхности полости направлена вдоль радиуса R ($f' > 0$) и увеличивается со временем. Рассмотрим элементарный сферический объем, показанный на рис. 5.3, \hat{a} , на интервале времени

$$t_1 + \frac{R}{c} < t < t_2 + \frac{R}{c}.$$

Здесь мы пренебрегли растяжением ΔR , которое мало по сравнению с расстоянием R от начала координат.

Поскольку движение поверхности полости вызывает распространение волны в сторону от источника, мы должны заключить, что чем больше расстояние, на котором находится частица объема, тем меньше ее скорость (рис. 5.3, \hat{a}). Поскольку радиальная компонента скорости v_R является положительной, мы видим, что объем находится в состоянии сжатия ($\theta < 0$), и, соответственно,

$$P > 0.$$

Если коэффициент a_1 отрицательный, то скорость поверхности полости направлена к началу координат $R = 0$ и ее величина уменьшается со временем. Следовательно, абсолютная величина $|v|$ на фронте элементарного объема больше, чем величина скорости в его задней части (рис. 5.3, \hat{a}), и в этом случае также наблюдается сжатие.

Случай 2: $a_2 < 0$

Если коэффициент a_1 положителен, скорость поверхности полости уменьшается со временем и направлена вдоль радиуса R , соответственно, скорость передней части объема больше, чем задней. По этой причине объем находится в состоянии растяжения (рис. 5.3, \hat{a}) и $P < 0$. Если же коэффициент a_1 отрицательный, скорость поверхности полости направлена в сторону, противоположную радиусу R , и ее величина растет со временем. Следовательно, скорость частиц, расположенных в задней части объема, больше

скорости частиц в его передней части (рис. 5.3, ä), и в этом случае объем также испытывает растяжение ($P < 0$).

Случай 3: $a_2 = 0$

В этом случае скорость движения поверхности полости постоянная, и, следовательно, ее смещение линейно растет со временем. Очевидно, что на интервале времени

$$t_1 + \frac{R}{c} < t < t_2 + \frac{R}{c}$$

частицы элементарного объема обладают одинаковой скоростью и, следовательно, в нашем приближении ($f''' = 0$) дилатация отсутствует.

Далее мы обсудим поведение сферических волн, имеющих различную зависимость от времени.

Пример 1

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ смещение поверхности полости начинает увеличиваться и затем в момент времени τ достигает некоторого постоянного значения s_0 (рис. 5.4, а). В частности, если интервал времени τ , на котором изменяется функция $f(at)$, становится бесконечно малым, мы в пределе получим ступенчатую функцию

$$f(at) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Как следует из (5.17) и рис. 5.4, а, в каждый момент времени $t > \tau$ имеется сферический волновой слой

$$c(t - \tau) \leq R \leq ct,$$

внутри которого частицы движутся с различными скоростями, формируя таким образом зоны сжатия и растяжения.

В то же время позади этого сферического слоя мы имеем

$$s(R, t) = m/4\pi\rho_0 R^2, \quad v = 0, \quad P_a = 0, \quad (5.34)$$

т.е. эта часть среды находится в равновесии и дилатация здесь отсутствует. Единственный результат действия этой волны состоит в том, что смещения частиц быстро убывают с расстоянием, но не зависят от времени.

Для случая, когда $f(at)$ является ступенчатой функцией, мы имеем

$$\begin{aligned} s(R, t) &= \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} h\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right] + \frac{ma}{4\pi\rho_0 cR} \delta\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \\ v(R, t) &= \frac{ma}{4\pi\rho_0 R^2} \delta\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right] + \frac{ma^2}{4\pi\rho_0 cR} \delta'\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \end{aligned} \quad (5.35)$$

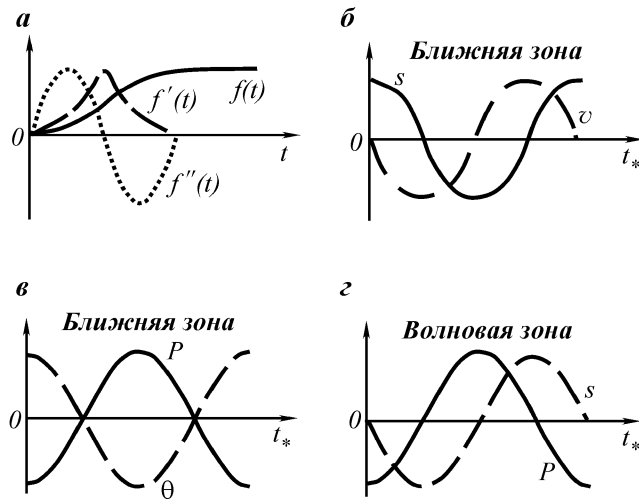


Рис. 5.4. Поведение смещения, скорости и давления на поверхности источника (а); синусоидальная волна в ближней зоне (б, в); синусоидальная волна в дальней зоне (г): $t_* = t - R/c$

$$P(R, t) = \frac{ma^2}{4\pi R} \delta' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right].$$

Здесь h , δ и δ' обозначают соответственно ступенчатую функцию, дельта-функцию и ее первую производную. Конечно, такой случай является предельным, поскольку ни ступенчатая, ни дельта-функция в действительности не реализуются.

Пример 2

Предположим теперь, что смещение поверхности полости мгновенно возрастает в момент времени $t = 0$, затем остается постоянным в течение интервала Δt , а после этого мгновенно исчезает:

$$f(at) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta t, \\ 0 & \text{при } t > \Delta t. \end{cases} \quad (5.36)$$

Применяя результаты, полученные в первом примере, мы видим, что, как и ранее, волна движется от источника и занимает сферический слой толщиной

$$\Delta R = c\Delta t.$$

Внутри слоя смещение равняется

$$s(R, t) = m/4\pi\rho_0 R^2,$$

при условии, что

$$R/c < t < R/c + \Delta t,$$

а скорости частиц, избыточное давление и дилатация равны нулю.

В то же время поведение волновых полей на фронте волны и в ее хвосте описывается равенствами (5.35). Когда волна приходит в некоторую точку среды, она порождает смещение $s(R)$, которое затем не изменяется в течение интервала времени Δt . После этого хвост волны приводит к появлению смещения той же величины, но противоположного направления, в результате чего частицы возвращаются в свои исходные позиции.

Пример 3

Пусть теперь колебания полости описываются синусоидальной функцией с круговой частотой ω :

$$s(t) = s_0 \cos \omega t. \quad (5.37)$$

Предположим также, что этот процесс начался бесконечно давно, и, следовательно, в соответствии с выражениями (5.17) и (5.18) в каждой точке жидкости

$$\begin{aligned} s(R, t) &= \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{\omega R}{c} \sin \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \\ v(R, t) &= \frac{-m\omega}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\sin \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) + \frac{\omega R}{c} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

и

$$P(R, t) = -\frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right),$$

$$\theta(R, t) = \frac{m\omega^2}{4\pi K R} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right).$$

Очевидно, что эти функции удовлетворяют волновому уравнению и граничным условиям. Поскольку данная волна описывает стационарный (установившийся) процесс, нет необходимости учитывать начальные условия. В каждой точке среды все волны являются периодическими функциями времени и их период равняется

$$T = 2\pi/\omega = 1/f. \quad (5.39)$$

Зависимость этих полей от расстояния также носит периодический характер, но при этом изменяется амплитуда. Чтобы исследовать роль расстояния R , удобно снова использовать понятие длины волны λ :

$$\lambda = cT = c/f = 2\pi c/\omega. \quad (5.40)$$

Тогда вместо выражений (5.38) получим

$$\begin{aligned} s(R, t) &= \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{2\pi R}{\lambda} \sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \right], \\ v(R, t) &= \frac{m\omega}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) + \frac{2\pi R}{\lambda} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

и

$$\begin{aligned} P(R, t) &= \frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \\ \theta(R, t) &= \frac{m\omega^2}{4\pi K R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

В отличие от общего случая волн с произвольной зависимостью от времени, в данном случае довольно легко оценить диапазон расстояний, соответствующих ближней, промежуточной и дальней зонам.

Действительно, как следует из (5.41) и (5.42), для расстояний, много меньших длины волны λ :

$$R \ll \lambda \quad (5.43)$$

имеем

$$\begin{aligned} s(R, t) &\approx \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \\ v(R, t) &\approx \frac{m\omega}{4\pi\rho_0 R^2} \sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \\ P(R, t) &= -\frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

и

$$\theta = -P/K.$$

Поведение полей во времени в ближней зоне показано на рис. 5.4, \hat{a} , \hat{b} . В ближней зоне смещение и дилатация изменяются синхронно, причем между ними и скоростью частиц существует фазовый сдвиг, равный $\pi/2$.

Проследим теперь за тем, как меняются эти функции в течение одного периода T . В момент времени $t = 0$ поверхность полости испытывает максимальное растяжение $s = s_0$, однако ее скорость равняется нулю. Затем радиус полости начинает уменьшаться и растяжение исчезает в момент времени

$$t = \pi/2\omega.$$

Это означает, что в течение интервала

$$0 \leq t \leq \pi/2\omega$$

скорость направлена в сторону начала координат, а ее значение увеличивается.

По этой причине каждый элементарный объем в ближней зоне, находящийся на расстоянии R , испытывает растяжение, когда

$$R/0 \leq t \leq R/c + \pi/2\omega.$$

Поскольку на интервале

$$\pi/2\omega \leq t \leq 3\pi/2\omega$$

скорость поверхности полости увеличивается, тот же самый элементарный объем начинает сжиматься при условии, что

$$R/c + \pi/2\omega < t < R/c + 3\pi/2\omega.$$

В момент времени $t = 3\pi/(2\omega)$ поверхность полости возвращается в первоначальное положение, а скорость достигает своего максимального положительного значения.

Затем, в течение последнего интервала периода

$$3\pi/2\omega < t < 2\pi/\omega$$

скорость падает.

Следовательно, элемент объема снова начинает растягиваться, когда

$$R/c + 3\pi/2\omega < t < R/c + 2\pi/\omega.$$

В отличие от описанного случая, в промежуточной зоне поведение волнового поля во времени зависит от расстояния между источником и точкой наблюдения.

С увеличением расстояния R или с уменьшением длины волны λ влияние второго слагаемого в выражении (5.41) становится, в общем случае, доминирующим, и мы получаем следующие выражения для волнового поля в дальней зоне:

$$\begin{aligned} s(R, t) &= -\frac{m}{2\rho_0\lambda R} \sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \\ v(R, t) &= -\frac{m\omega}{2\rho_0\lambda R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \\ P(R, t) &= -\frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Формулы (5.45) справедливы, если расстояние R больше длины волны λ , т.е.

$$R > \lambda, \quad (5.46)$$

и, соответственно, эта зона обычно называется волновой. Она играет важную роль в сейсмологии, поскольку там наблюдения ведутся в большинстве случаев на расстояниях, превышающих длину волны.

Граница между промежуточной и волновой зонами существенно зависит от частоты. В частности, с увеличением частоты ω волновая зона начинается на более близких расстояниях от источника. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Предположим, что частотный диапазон волн есть

$$10 \text{ Гц} < f < 100 \text{ Гц},$$

а их фазовая скорость равна

$$c = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Тогда, по определению, длина волны изменяется в пределах

$$20 \text{ м} < \lambda < 200 \text{ м}.$$

Поведение волнового поля во времени в волновой зоне показано на рис. 5.4, а, и оно, безусловно, отличается от поля в ближней зоне. Прежде всего, скорость и избыточное давление здесь изменяются синхронно во времени и в пространстве, а их отношение остается постоянным:

$$\frac{v}{p} = \frac{2\pi}{\lambda \omega \rho_0} = \frac{1}{c \rho_0} = \frac{1}{Z}, \quad (5.47)$$

где Z обозначает волновой импеданс.

Как мы уже знаем, в волновой (дальней) зоне указанное отношение справедливо для любой функции $f(at)$, характеризующей колебания в источнике.

ПОТОК ЭНЕРГИИ

В главе 4 мы показали, что распространение энергии описывается вектором Пойнтинга

$$\mathbf{Y} = P \mathbf{v}. \quad (5.48)$$

Далее, учитывая (5.41) и (5.42), для радиальной компоненты этого вектора мы имеем

$$Y = \frac{m^2 \omega^3}{16\pi^2 \rho_0 R^3} \left(\sin x \cos x + \frac{2\pi R}{\lambda} \cos^2 x \right), \quad (5.49)$$

где

$$x = \omega(t - R/c).$$

Определим среднее значение потока энергии

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{S_0} Y dS dt$$

по сферической поверхности радиуса R за период T . В силу сферической симметрии,

$$I = \frac{4\pi R^2}{T} \int_0^T Y dt$$

или

$$I = \frac{m^2 \omega^3}{4\pi \rho_0 R T} \left[\int_0^T \sin \chi \cos \chi dt + \frac{2\pi R}{\lambda} \int_0^T \cos^2 \chi dt \right].$$

Поскольку первый интеграл исчезает, и

$$\cos^2 \chi = \frac{1 + \cos 2\chi}{2},$$

мы получим

$$I = m^2 \omega^3 / 4\lambda \rho_0. \quad (5.50)$$

Представим себе замкнутый контур l , расположенный на некоторой сферической поверхности радиуса R . Проводя прямые из начала координат к каждой точке l , мы получим конус (рис. 5.5, а), представляющий собой векторную трубку вектора Пойнтинга. Семейство таких трубок дает нам возможность визуализации поля независимо от длины волны.

Полезно также кратко обсудить деформацию элементарного объема, вызванную сферической волной. Рассмотрим сначала малый объем, ограниченный координатными поверхностями, показанными на рис. 5.5, а. Поскольку смещение имеет только радиальную компоненту

$$\mathbf{s} = s_R \mathbf{i}_R, \quad s_\theta = s_\varphi = 0,$$

изменение объема происходит из-за движения частиц вдоль оси R . В то же время угол между элементарными поверхностями, формирующими данный

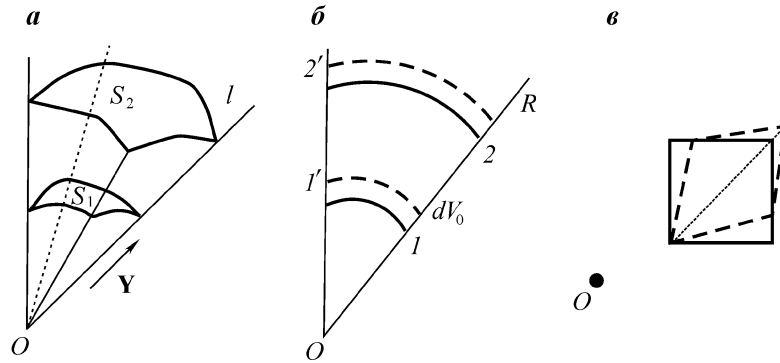


Рис. 5.5. Вектор Пойнтинга. Деформация

объем, остается постоянным и равняется $\pi/2$. Если объем dV имеет произвольную ориентацию относительно осей координат, то затем он трансформируется в ромб (рис. 5.5, â). В общем случае новый объем отличается от исходного. Как мы знаем, для таких деформаций

$$\text{rot } \mathbf{s} = 0,$$

т.е. элементарный объем не вращается и в нем отсутствуют деформации простого сдвига.

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА А ОТ ЧАСТОТЫ

Ранее мы получили приближенное выражение (5.15) для коэффициента А. Теперь целесообразно найти значение А в частотном диапазоне, по-прежнему полагая $|s_R(t)| \ll R_0$.

Применяя формулу Эйлера, выражение (5.12) для синусоидальных волн можно переписать как

$$\varphi(R, t) = \text{Re}(\Phi e^{-i\omega t}). \quad (5.51)$$

Здесь

$$\Phi(k, R) = \ddot{A} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (5.52)$$

является комплексной амплитудой, а k – волновым числом.

Таким же образом мы введем комплексную амплитуду для смещения:

$$s(R, t) = \text{Re}(S e^{-i\omega t})$$

и, по определению,

$$S = \text{grad } \Phi \text{ или } S = \partial \Phi / \partial R.$$

Следовательно, после дифференцирования равенства (5.52) получим

$$S(k, R) = -\frac{\ddot{A}}{R^2} e^{ikR} + \frac{ik\ddot{A}}{R} e^{ikR}. \quad (5.53)$$

Чтобы определить неизвестный коэффициент \ddot{A} , мы снова используем граничное условие на поверхности полости, где смещение

$$s(R_0, t) = \text{Re}(s_0 e^{-i\omega t}),$$

или, учитывая (5.37), получим

$$S(R_0, t) = s_0. \quad (5.54)$$

Сравнение (5.53) с (5.54) дает

$$s_0 = -\frac{\ddot{A}}{R_0^2} e^{ikR_0} + \frac{ik\ddot{A}}{R_0} e^{ikR_0}.$$

Отсюда

$$A = \frac{s_0 R_0^2}{1 - ikR_0} e^{-ikR_0}. \quad (5.55)$$

Подставив последнее выражение в формулу (5.52), мы получим следующее выражение для комплексной амплитуды скалярного потенциала:

$$\Phi(k, R_0, R) = -\frac{s_0 R_0^2}{1 - ikR_0} \frac{e^{ik(R-R_0)}}{R}. \quad (5.56)$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$kR_0 = 2\pi R_0/\lambda,$$

заключаем, что если длина волны λ значительно превышает радиус полости:

$$\lambda/R_0 \gg 2\pi \text{ и } R/R_0 \gg 1, \quad (5.57)$$

то выражение (5.15) даст корректное значение коэффициента \ddot{A} при условии, что $|s_R(t)| \ll R_0$.

Так как радиус полости очень мал, неравенства (5.57) справедливы и для относительно высоких частот. Этот результат можно применить и для нестационарных волн, при условии, что они сформированы в основном синусоидальными волнами, длина волны которых значительно превосходит радиус полости.

В общем случае произвольной длины волны скалярный потенциал можно представить в следующем виде (см. приложение 7):

$$\varphi(R, t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) F(\omega) e^{-i(\omega t - kR)} d\omega,$$

где $\ddot{A}(\omega)$ определяется выражением (5.55), а $F(\omega)$ – спектр функции $f(at)$, задаваемый формулой (5.8).

5.2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Пусть в однородной среде имеется бесконечно длинная цилиндрическая полость радиуса r_0 (рис. 5.6, а). В момент времени $t = 0$ она начинает колебаться так, что смещение ее поверхности в радиальном направлении описывается следующим образом:

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(at) & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & t > \tau. \end{cases} \quad (5.58)$$

Здесь $f(at)$ – произвольная функция времени, обладающая первой и второй производными и одинаковая во всех точках поверхности полости.

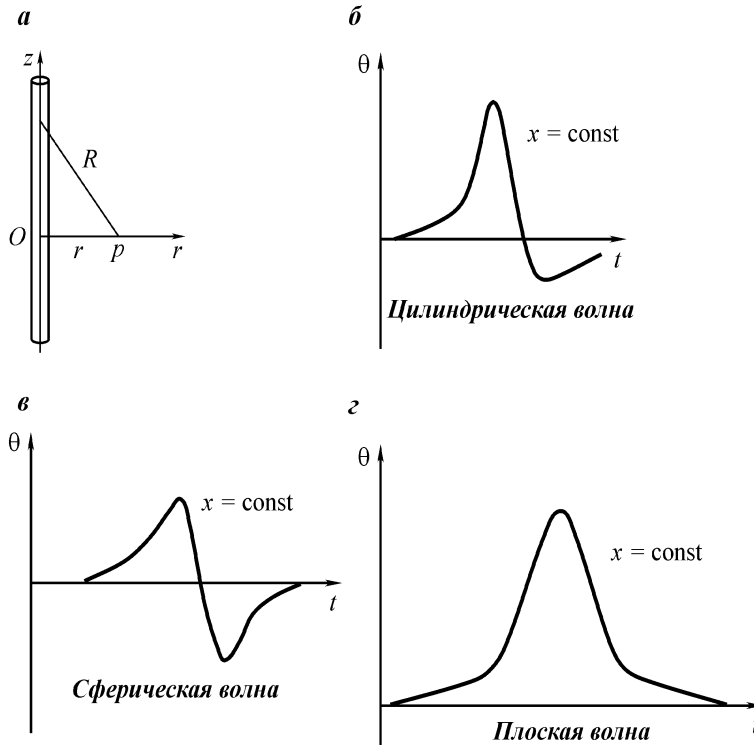


Рис. 5.6. Линейный источник (а); дилатация для различных волн как функция времени ($\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$)

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КАК СУПЕРПОЗИЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

Выберем цилиндрическую систему координат, ось z которой направлена вдоль источника. Очевидно, что источник возбуждает уходящую волну, зависящую только от координаты r . Как и в предыдущем разделе, выведем сначала выражение для скалярного потенциала смещения φ :

$$\mathbf{s} = \text{grad } \varphi \quad \text{или} \quad s_r = \partial \varphi / \partial r. \quad (5.59)$$

В цилиндрической системе координат волновое уравнение для потенциала записывается как

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (5.60)$$

так как волновое поле не зависит от других координат.

В отличие от сферически симметричного случая, решение уравнения (5.60) в общем случае нельзя выразить через элементарные функции. По-

этому мы используем два различных метода, которые позволят нам определить функцию φ . В основе одного из них лежит принцип суперпозиции, а в другом используется решение волнового уравнения для синусоидальных функций. Рассмотрим сначала первый подход. Линейный источник можно представить как сумму бесконечного числа элементарных источников одинаковой интенсивности, действующих синхронно во времени. В соответствии с этим волновое поле является в каждый момент результатом суперпозиции сферических волн от элементарных источников, и согласно (5.12) мы имеем

$$\varphi(r, t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f[a(t - R/c)]}{R} dz, \quad (5.61)$$

где постоянная A определяется из условия, заданного вблизи источника, а R обозначает расстояние от элементарного источника до точки наблюдения r .

Как следует из рис. 5.6, а,

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Поскольку элементарные источники, расположенные на одинаковом расстоянии от точки наблюдения r , вызывают одинаковые волновые поля, выражение (5.61) можно переписать как

$$\varphi(r, t) = 2A \int_0^{\infty} \frac{f[a(t - R/c)]}{R} dz. \quad (5.62)$$

Таким образом, мы получили выражение для потенциала φ в интегральной форме.

По определению, функция

$$A \frac{f[a(t - R/c)]}{R}$$

отлична от нуля на интервале

$$\frac{R}{c} < t < \frac{R}{c} + \tau. \quad (5.63)$$

ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН

Простой физический смысл подынтегрального выражения в формуле (5.62) позволяет объяснить некоторые основные свойства волн, порожденных линейным источником. Прежде всего, учитывая тот факт, что источник имеет бесконечную длину и его интенсивность не зависит от координаты z , мы заключаем, что избыточное давление P и дилатация θ остаются постоянными на цилиндрической поверхности радиуса r . В то же время смещение и скорость частиц направлены по нормали к этой поверхности, где сохраняются также и их амплитуды. В силу указанной геометрии эта волна называется цилиндрической.

Все элементарные источники порождают в один и тот же момент времени волны одинаковой интенсивности, однако эти источники расположены на разном расстоянии от точки наблюдения. Поскольку источник, расположенный в окрестности начала координат ($r = 0, z = 0$), является ближайшим к точке p (рис. 5.6, а), волна от этого источника приходит раньше других. Таким образом, волновой фронт, имеющий форму цилиндрической поверхности, достигает наблюдателя в момент времени

$$t = r/c, \quad (5.64)$$

и в каждой точке вступление волны вызвано источником, расположенным на расстоянии r .

С течением времени в точку наблюдения начинают приходить элементарные сферические волны от все большего числа удаленных источников. Результирующее возмущение среды определяется суперпозицией этих волн. При этом необходимо различать два основных свойства этого явления. Как следует из выражения (5.58), линейный источник возбуждает колебания в течение интервала времени τ , а затем его действие прекращается. В этот момент заканчивается каждая из сферических волн. В частности, это означает, что момент времени

$$t = r/c + \tau$$

является последним моментом, когда источник, расположенный в окрестности начала координат, дает вклад в результирующую волну. В последующем интервал оси z , на котором источники уже прекратили вносить свой вклад в волновое поле в заданной точке, становится все больше. Иными словами, сферические волны от этих источников уже прошли через точку наблюдения. Соответственно, усиливается относительное влияние источников, расположенных на более далеких расстояниях R . Однако амплитуда сферических волн обратно пропорциональна расстоянию. Этот анализ показывает, что когда время стремится к бесконечности, суперпозиции этих волн, т.е. волновое поле, возбужденное линейным источником, становится меньше и стремится к нулю:

$$\varphi(r, t) \rightarrow 0, \quad s(r, t) \rightarrow 0, \quad v(r, t) \rightarrow 0,$$

и

$$P(r, t) \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow \infty. \quad (5.65)$$

Цилиндрическая волна имеет еще одно интересное свойство. Поскольку линейный источник является бесконечно длинным, для любого момента времени t всегда можно указать такой удаленный источник, от которого сферическая волна достигнет точки наблюдения еще позже. Таким образом, в отличие от сферической волны, цилиндрическая волна затухает в течение бесконечно долгого времени, т.е. она не заканчивается, и в этом смысле она напоминает процесс диффузии. Конечно, все это справедливо только для бесконечно длинного источника. Например, если длина линейного источни-

ка равняется $2\ddot{a}$, а точка наблюдения расположена в плоскости симметрии $z = 0$, то хвост волны, которая в данном случае не является цилиндрической, приходит в момент времени

$$t = \frac{R}{c} + \tau, \quad R = \sqrt{r^2 + l^2}.$$

Выражение (5.62) удобно переписать в виде

$$\varphi(r, t) = 2A \begin{cases} 0 & t < r/c, \\ 1 & t \geq r/c. \end{cases} \quad (5.66)$$

Здесь

$$I \int_0^\infty \frac{f[a(t - R/c)]}{R} dz. \quad (5.67)$$

Ранес мы пришли к заключению, что волновые поля исчезают, когда время стремится к бесконечности. Этот же результат следует из (5.67). Поскольку положение каждого из элементарных источников по отношению к точке наблюдения характеризуется величиной R , заменим переменную z в этом выражении на R .

В результате получим

$$z = \sqrt{R^2 - r^2}$$

и

$$dz = \frac{RdR}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Отсюда

$$I = \int_r^\infty \frac{f[a(t - R/c)]}{\sqrt{R^2 - r^2}} dR.$$

Вводя обозначение

$$x = t - R/c$$

или

$$R = c(t - x),$$

получим

$$dR = -cdx$$

и

$$I = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{f[(ax)dx]}{\sqrt{(t-x)^2 - r^2/c^2}}.$$

Поскольку функция $f(ax)$ отлична от нуля на интервале

$$0 \leq x \leq \tau,$$

имеем

$$I = \int_0^{\tau} \frac{f(ax)dx}{\sqrt{(t-x)^2 - r^2/c^2}}. \quad (5.68)$$

Последнее выражение позволяет определить асимптотическое поведение, когда время стремится к бесконечности. В этом случае знаменатель в (5.68) стремится к t , и мы получаем

$$I = \frac{1}{t} \int_0^{\tau} f(ax)dx, \quad \text{если } t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы убедились в том, что с увеличением времени существует такой момент, когда скалярный потенциал и, следовательно, амплитуда волновых полей начинает постепенно уменьшаться.

Рассмотрим теперь интеграл

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} P dt,$$

характеризующий распределение дилатации в цилиндрической волне.

Поскольку

$$P = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

мы имеем

$$L = -\rho_0 \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt = \rho_0 \left[\frac{\partial \varphi(t_1)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(\infty)}{\partial t} \right],$$

где t_1 – произвольный момент времени, удовлетворяющий неравенству

$$t_1 < r/c.$$

Учитывая, что волновые поля отсутствуют до момента вступления волны и исчезают, когда время неограниченно растет, мы должны заключить, что

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} P dt = 0. \quad (5.69)$$

Следовательно, как и в случае сферической волны, в цилиндрической волне существуют зоны сжатия и растяжения, которые распределены таким образом, что интеграл L равен нулю. Поведение функции $\theta(t)$ для цилиндри-

ческой и сферической волны показано на рис. 5.6, а и 5.6, б соответственно.

Как следует из выражения 5.62, легко вывести выражения для волновых полей. Так, например, избыточное давление определяется как

$$P(r, t) = -2A\rho_0 a^2 \int_0^\infty \frac{f''[a(t - R/c)]}{R} dz.$$

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Получим решение волнового уравнения для гармонических волн. Пусть смещение поверхности полости линейного источника задается выражением

$$s = s_0 \cos \omega t \quad \text{или} \quad s(t) = \operatorname{Re}(s_0 e^{-i\omega t}). \quad (5.71)$$

Тогда скалярный потенциал в каждой точке среды можно представить как

$$\varphi(r, \omega, t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

или

$$\varphi(r, \omega, t) = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t}), \quad (5.72)$$

где

$$\Phi = \varphi_0 e^{-i\alpha} \quad (5.73)$$

является комплексной амплитудой потенциала.

Подстановка (5.72) в (5.60) дает уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + k^2 \Phi = 0. \quad (5.74)$$

Здесь $k = \omega/c$ – волновое число.

Приведенное выше уравнение является уравнением Бесселя нулевого порядка. Как известно, его решением являются функции Бесселя первого и второго рода:

$$J_0(kr) \text{ и } Y_0(kr).$$

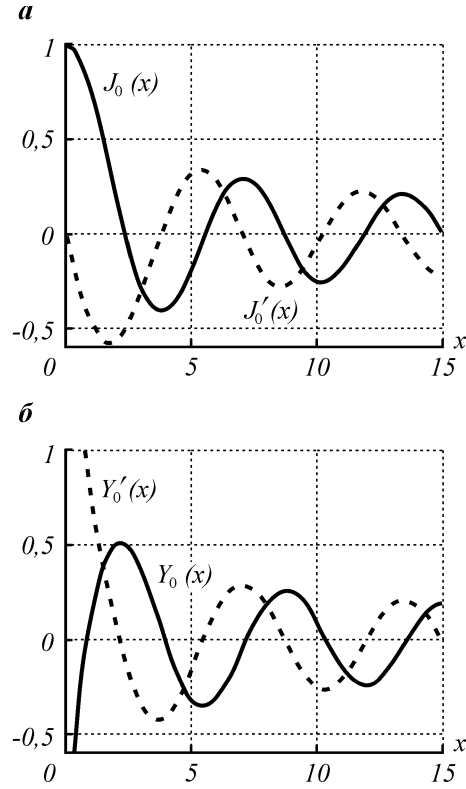
Поведение этих функций и их производных показано на рис. 5.7, а, б. В частности, когда аргумент kr мал,

$$J_0(kr) \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad Y_0(kr) \rightarrow \frac{2}{\pi} \ln kr, \quad \text{если } kr \rightarrow 0, \quad (5.75)$$

т.е. функции Бесселя второго рода имеют логарифмическую особенность.

В противоположном случае, когда kr велико, функции Бесселя и их производные ведут себя как синусоидальные функции, амплитуда которых относительно медленно уменьшается:

Рис. 5.7. Функции Бесселя



$$J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.76)$$

$$Y_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{если } kr \gg 1.$$

Это асимптотическое поведение соответствует волновой зоне, поскольку, если $r/\lambda > 1$, то

$$kr = \frac{\omega}{c} r = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1.$$

Предположим, что функция $J_0(kr)$ описывает поведение потенциала в однородной среде:

$$\varphi(r, \omega, t) = \text{Re}(A J_0(kr) e^{-i\omega t}).$$

Тогда согласно (5.76) мы имеем в волновой зоне

$$\varphi(r, \omega, t) = A \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \cos \omega t, \quad \text{если } \frac{r}{\lambda} > 1.$$

Последнее выражение может характеризовать стоячую волну. Как мы знаем, такая волна возникает благодаря суперпозиции волн с одинаковыми частотами. Однако приведенная выше функция не удовлетворяет условию на бесконечности, где волна должна вести себя как уходящая. Таким образом, функцию $J_0(kr)$ нельзя использовать для описания волнового поля, возбуждаемого линейным источником в однородной среде. Конечно, такое же заключение можно сделать и в отношении функции Бесселя второго рода $Y_0(kr)$.

Чтобы удовлетворить условию на бесконечности, мы используем функции Ганкеля второго рода, которые определяются следующим образом:

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr)$$

и

$$(5.77)$$

$$H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - iY_0(kr).$$

Обе эти функции являются комбинациями функций Бесселя и, следовательно, они также являются решениями уравнения (5.74).

Теперь мы покажем, что использование функций Ганкеля позволяет удовлетворить условию на бесконечности. Как следует из (5.76) и (5.7), асимптотическое поведение функций Ганкеля описывается выражениями

$$H_0^{(1)}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)}$$

и

$$(5.78)$$

$$H_0^{(2)}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \pi/4)}, \text{ если } kr \gg 1.$$

Представим, прежде всего, комплексную амплитуду скалярного потенциала как

$$\Phi(r, \omega) = A H_0^{(2)}(kr).$$

Отсюда

$$\varphi(r, \omega, t) = \text{Re} \{ H_0^{(2)}(kr) e^{-i\omega t} \}.$$

Принимая во внимание второе из выражений (5.78), мы видим, что с увеличением расстояния от источника произведение $\Phi e^{-i\omega t}$ стремится к следующему выражению:

$$\Phi e^{-i\omega t} = A \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(\omega t + kr - \pi/4)}, \text{ если } \frac{r}{\lambda} > 1.$$

Последняя формула описывает волну, распространяющуюся к началу координат, и поэтому она не удовлетворяет условию на бесконечности.

Однако если комплексная амплитуда потенциала записывается как

$$\Phi(r, \omega) = A H_0^{(1)}(kr), \quad (5.79)$$

то указанное требование выполняется. Действительно, используя (5.78), получаем

$$\Phi(r, \omega) e^{-i\omega t} \approx A \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \omega t - \pi/4)}, \quad \text{если } \frac{r}{\lambda} > 1, \quad (5.80)$$

что, как известно, характеризует уходящую волну.

Как следует из выражения (5.79), скалярный потенциал $\varphi(r, \omega, t)$ удовлетворяющий условию на бесконечности, определяется как

$$\varphi(r, \omega) = \operatorname{Re} [A H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}]. \quad (5.81)$$

Таким образом, мы показали, что выбор одной из функций $H_0^{(1)}(kr)$ или $H_0^{(2)}(kr)$ определяется зависимостью от времени: $e^{i\omega t}$ или $e^{-i\omega t}$.

Например, если решение волнового уравнения имеет вид

$$\varphi(r, \omega, t) = \operatorname{Re}(\Phi e^{i\omega t}),$$

то комплексную амплитуду необходимо записывать как

$$\Phi = A H_0^{(2)}(kr).$$

Данный анализ показывает также, что если рассматривается волна в объеме конечных размеров (в направлении r), то решение можно представить через функции Бесселя

$$J_0(kr) \text{ и } Y_0(kr).$$

Заметим, что до настоящего момента коэффициент A оставался неизвестным.

По аналогии со сферическими волнами определим коэффициент A , используя граничное условие вблизи источника. Предположим, что радиус линейного источника r_0 достаточно мал, так что

$$kr_0 \gg 1.$$

Другими словами, длина волны λ много больше r_0 :

$$\lambda \gg r_0.$$

Тогда, принимая во внимание выражения (5.75) и (5.79), вблизи источника имеем

$$\Phi = A \frac{2i}{\pi} \ln kr, \quad \text{если } kr \ll 1.$$

Поскольку

$$S = \partial \Phi / \partial r,$$

комплексная амплитуда смещения есть

$$S = \frac{2i}{\pi} \frac{A}{r}, \text{ если } kr \ll 1. \quad (5.82)$$

С другой стороны, из (5.71) следует, что

$$S(r_0, \omega) = s_0. \quad (5.83)$$

Сравнение двух последних равенств дает

$$s_0 = \frac{2i}{\pi} \frac{A}{r_0}$$

или

$$A = -\frac{i\pi}{2} s_0 r_0. \quad (5.84)$$

Таким образом, выражение для комплексной амплитуды потенциала записывается в виде

$$\phi(r_0, \omega) = -\frac{i\pi}{2} r_0 s_0 H_0^{(1)}(kr), \text{ если } r > r_0 \quad (5.85)$$

или

$$\Phi(r_0, \omega) = -\frac{\pi r_0 s_0}{2} [Y_0(kr) - iJ_0(kr)].$$

Соответственно, для потенциала (5.72) имеем

$$\varphi(r, t) = \frac{\pi r_0 s_0}{2} [Y_0(kr) \cos \omega t - J_0(kr) \sin \omega t]. \quad (5.86)$$

Эта функция удовлетворяет волновому уравнению и условиям вблизи источника и на бесконечности, и, следовательно, она описывает волновые поля, возбуждаемые линейным источником в однородной среде.

Конечно, поведение функций Бесселя $J_0(kr)$ и $Y_0(kr)$, а также функций Ганкеля $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ известно во всех деталях.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Поскольку

$$s_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v = \frac{\partial s}{\partial t} \quad \text{и} \quad P = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

поля цилиндрической волны задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned} s(r, t) &= -\frac{\pi}{2} k r_0 s_0 \operatorname{Re} \left\{ i H_0^{(1)'}(kr) e^{-i\omega t} \right\}, \\ v(r, t) &= -\frac{\pi}{2} k r_0 s_0 \omega \operatorname{Re} \left\{ H_0^{(1)'}(kr) e^{-i\omega t} \right\}, \\ P(r, t) &= -\frac{\pi}{2} k r_0 s_0 \omega^2 \operatorname{Re} \left\{ i H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} \right\}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

где

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(0)}(x).$$

Для иллюстрации рассмотрим волновую зону. Как следует из формул (5.78) и (5.81),

$$\varphi(r, t) = \frac{\pi r_0 S_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \sin\left(kr - \omega t - \frac{\pi}{4}\right), \text{ если } r > \lambda. \quad (5.88)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} s &= r_0 S_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \frac{\cos(kr - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{r}}, \\ v &= r_0 S_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \omega \frac{\sin(kr - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{r}}, \\ P &= r_0 S_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2}} k \omega^2 \rho_0 \frac{\sin(kr - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{r}}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Мы видим, что в волновой зоне поля убывают с расстоянием гораздо быстрее, а именно, как $1/\sqrt{r}$.

Такая зависимость связана с тем, что поток энергии через произвольную цилиндрическую поверхность радиуса r должен оставаться постоянным. Действительно, площадь такой поверхности прямо пропорциональна r , а вектор Пойнтинга

$$\mathbf{Y} = P\mathbf{v}$$

ведет себя как $1/r$, так что произведение площади на этот вектор не меняется.

Возвращаясь к общему случаю соотношений (5.87), описывающих волновое поле на любом расстоянии от источника, следует заметить следующее.

1. В случае сферической волны, вызванной единичным источником, выражение для любого из волновых полей записывается в виде произведения двух функций:

$$f_1(R) \operatorname{Re} e^{-i\omega(t-R/c)} \text{ или } f_2(R) \operatorname{Im} e^{-i\omega(t-R/c)}.$$

Присутствие аргумента $t - R/c$ ясно указывает на их волновую природу.

Однако этот аргумент отсутствует в случае цилиндрической волны, когда дело касается ближней или промежуточной зоны. Это можно объяснить тем, что в каждой точке волна является суперпозицией элементарных волн, источники которых находятся на разных расстояниях $k\Gamma$ от точки наблюдения. В волновой зоне, где расстояние r больше длины волны λ , эффект распространения виден непосредственно из выражений (5.88)–(5.89), поскольку все элементарные волны относятся к этой зоне.

2. В соответствии с выражениями (5.89) мы имеем в волновой зоне

$$v/P = 1/c\rho_0 = 1/Z,$$

что наблюдается также и в случае сферической волны.

3. С увеличением расстояния от источника кривизна волновых поверхностей $\gamma = \text{const}$ становится меньше, и, соответственно, объем, в пределах которого цилиндрическую волну можно интерпретировать как плоскую, становится больше.

4. Очевидно, что, зная решение граничной задачи для синусоидальных волн, мы можем описать нестационарные волны, используя для этого интеграл Фурье.

5.3. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим теперь третий, самый простой тип волн. Предположим, что источник состоит из двух параллельных плоскостей бесконечной протяженности, расположенных в окрестности плоскости YOZ (рис. 5.8, а). Пусть в каждый момент времени эти плоскости движутся в противоположных направлениях так, что смещение s имеет только одну компоненту: $s_x = s(t)$, не зависящую от координат y и z . Очевидно, что колебания такого источника вызывают уходящую волну по обе его стороны.

Для определения волновых полей, мы могли бы использовать, как и ранее, скалярный потенциал. Однако, учитывая простоту геометрии волнового поля, мы можем начать непосредственно с выражения для смещения и предположить, что в окрестности источника оно меняется как

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0 & \tau < 0, \\ f(at) & 0 < t \leq \tau, \\ f(a\tau) & t > \tau. \end{cases} \quad (5.90)$$

Поскольку волновые поля зависят только от координаты x , волновое уравнение сильно упрощается, и мы имеем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (5.91)$$

Решение этого уравнения хорошо известно:

$$s(x, t) = A\varphi[a(t - x/c)] + B\varphi[a(t + x/c)].$$

Описанный выше источник генерирует одинаковые волны по обе стороны плоскости YOZ, и, следовательно, мы можем ограничиться диапазоном $x > 0$. В этом случае

$$s(x, t) = A\varphi[a(t - x/c)]. \quad (5.92)$$

Смещение (5.92) должно удовлетворять граничным условиям (5.90) на поверхности источника.

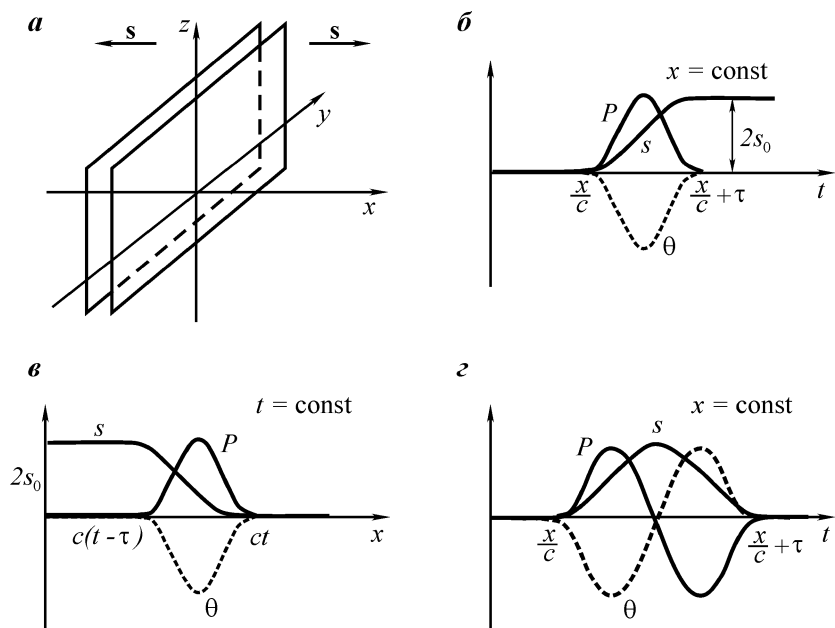


Рис. 5.8. Источник плоской волны (а); плоские волны как функции времени и расстояния (б, в, г)

Эти условия будут удовлетворены, если

$$A = s_0 \text{ и } \varphi[a(t - x/c)] = f[a(t - x/c)].$$

Таким образом,

$$s(x, t) = s_0 f[a(t - x/c)]. \quad (5.93)$$

Из соотношений

$$v = \partial s / \partial t, \quad \theta = \partial s / \partial x \text{ и } P = -K\theta$$

получаем волновые поля

$$s(x, t) = s_0 f[a(t - x/c)], \quad v(x, t) = s_0 a f'[a(t - x/c)]$$

и

$$\theta(x, t) = -\frac{s_0 a}{c} f'[a(t - x/c)]. \quad (5.94)$$

Здесь $K = \rho_0 c^2$.

По аналогии с синусоидальными колебаниями аргумент

$$a(t - x/c)$$

называется фазой волны.

Как видно из выражений (5.94), поверхности постоянной фазы являются плоскостями, перпендикулярными оси x . По этой причине эти волны называются плоскими. Они играют чрезвычайно важную роль в сейсмологии. Из выражений (5.94) следует, что фронт волны приходит в момент времени $t = x/c$, и его фаза равняется нулю. Затем, на интервале

$$\frac{x}{c} \leq t < \frac{x}{c} + \tau$$

частицы среды вовлекаются в движение, пока не наступит момент времени

$$t = x/c + \tau,$$

когда приходит хвост волны. Фаза на этой плоскости равняется $a\tau$. После прохождения этой плоскости движение частиц прекращается, и они находятся в состоянии покоя.

Следует заметить, что, в отличие от цилиндрических волн, у плоских волн так же, как у сферических, имеется фронт и хвост волны.

ПОВЕДЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Рассматривая поведение волновых полей как функции расстояния, целесообразно различать два временных интервала:

$$1) t \leq \tau \text{ и } 2) t \geq \tau.$$

В течение первого интервала движение частиц происходит в объеме среды, который определяется неравенствами

$$0 \leq x \leq ct,$$

но по-прежнему отсутствует, если

$$x > ct.$$

Во втором случае у волны имеется как фронтальная, так и хвостовая части, и соответственно имеется два диапазона расстояний, где волна отсутствует:

$$a) x > ct \text{ и } б) x < c(t - \tau).$$

В то же время волна присутствует в слое, ограниченном следующими двумя плоскостями:

$$x = c(t - \tau) \text{ и } x = ct.$$

В предыдущих разделах мы показали, что в пределах сферического или цилиндрического слоя всегда имеются такие зоны сжатия или растяжения, для которых интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dt$$

обращается в ноль. Однако в случае плоских волн этот интеграл не обязательно исчезает. Действительно, из последнего равенства (5.94) следует, что

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} P dt &= \frac{s_0 a K}{c} \int_{t_1}^{t_2} f' \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] dt = \\ &= \frac{s_0 K}{c} \left\{ f \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] - f \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right\},\end{aligned}\quad (5.95)$$

где

$$t_1 < x/c \quad \text{и} \quad t_2 > x/c + \tau.$$

Здесь t_1 – момент времени до прихода волны, а t_2 соответствует моменту времени, когда волна уже прошла через точку наблюдения.

Когда источник плоской волны возвращается в свое исходное положение,

$$f(at_2) = f(at_1) = 0$$

и, следовательно, в пределах волнового слоя имеются зоны сжатия и растяжения и

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dt = 0. \quad (5.96)$$

Предположим теперь, что смещение в источнике не обращается в нуль, т.е.

$$f(at) \neq 0, \quad \text{если} \quad t \geq \tau.$$

Так, например, со временем смещение изменяется и асимптотически стремится к некоторому постоянному значению функции $f(at)$.

В соответствии с (5.95) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dt = \frac{K s_0}{c} f \left[a \left(t_2 - \frac{x}{c} \right) \right]. \quad (5.97)$$

Таким образом, в отличие от сферической и цилиндрической волны, в данном случае интеграл может быть не равен нулю. В частности, можно представить себе волну, в которой происходит только сжатие или только растяжение.

Этот результат можно описать следующим образом. Если интеграл в (5.95) равен нулю, то частицы возвращаются в свое первоначальное положение за хвостом волны. Если же интеграл отличен от нуля, эти частицы также находятся в равновесии, но они смещены на некоторое расстояние от своего первоначального положения. Имеется еще одно интересное свойство плоских волн, а именно взаимосвязь между скоростью частиц и избыточным давлением. Как следует из равенства (5.94),

$$v/P = c/K = 1/\rho_0 c = 1/Z. \quad (5.98)$$

Как мы показали ранее, последнее равенство наблюдается также в волновой зоне сферической и цилиндрической волны, и это совпадение не случайно.

Оценим отношение v/c . Полагая

$$P = 2 \cdot 10^3 \text{ Па} \text{ или } P = 160 \text{ дБ}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

имеем

$$K = \rho_0 c^2 = 10^3 \cdot 2,25 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 2,25 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$$

и, следовательно,

$$\frac{v}{c} \approx \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2}{2,25 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2} \approx 10^{-6},$$

т.е. скорость частиц на несколько порядков меньше фазовой скорости волны даже при высоком давлении.

Для иллюстрации поведения плоской волны рассмотрим два примера.

Пример 1

Предположим, что смещение в источнике постепенно растет и достигает своего максимального значения. Его зависимость от времени описывается следующим выражением:

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \cos \frac{\pi}{\tau} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2, & t > \tau. \end{cases}$$

Соответственно, волновое поле $s(x, t)$ имеет вид

$$s(x, t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ 1 - \cos \frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 2, & t > \tau + \frac{x}{c}. \end{cases}$$

Таким образом, для дилатации θ и избыточного давления P имеем

$$\theta = \partial s / \partial x \text{ и } P = -K\theta,$$

где

$$\theta(x, t) = -\frac{\pi s_0}{\tau c} \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ \sin \frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 2, & t > \tau + \frac{x}{c}. \end{cases}$$

Поведение этих полей как функций времени показано на рис. 5.8, а.

Как следует из (5.98), скорость частиц, а также давление зависят от времени и расстояния от источника одинаковым образом.

Очевидно, что распределение давления как функции расстояния характеризуется тремя диапазонами:

$$1) x > ct, \quad 2) c(t - \tau) \leq x \leq ct, \quad 3) x < c(t - \tau).$$

Избыточное давление отлично от нуля только в промежуточном диапазоне. В то же время позади волны частицы смещены на расстояние, равное $2s_0$, и остаются в состоянии покоя (рис. 5.8, б). Данный пример соответствует случаю, когда существует только один тип деформации (сжатие) и частицы не возвращаются в свое первоначальное положение.

Пример 2

Предположим теперь, что смещение в источнике описывается следующей формулой:

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \cos \frac{2\pi}{\tau} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Отсюда для волновых полей вытекают следующие выражения:

$$s(x, t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ 1 - \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 0, & t > \tau + \frac{x}{c} \end{cases}$$

и

$$\theta(x, t) = -\frac{2\pi s_0}{\tau c} \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 0, & t > \tau + \frac{x}{c} \end{cases}$$

тогда как

$$P = -K\theta \quad \text{и} \quad v = \frac{c}{K} P.$$

Поведение этих функций, характеризующих волновое поле в пространстве и времени, показано на рис. 5.8, а, 5.9, а.

В отличие от предыдущего примера, волновое поле здесь имеет две зоны: зону сжатия и зону растяжения. Позади этих зон частицы среды возвращаются в свое исходное положение.

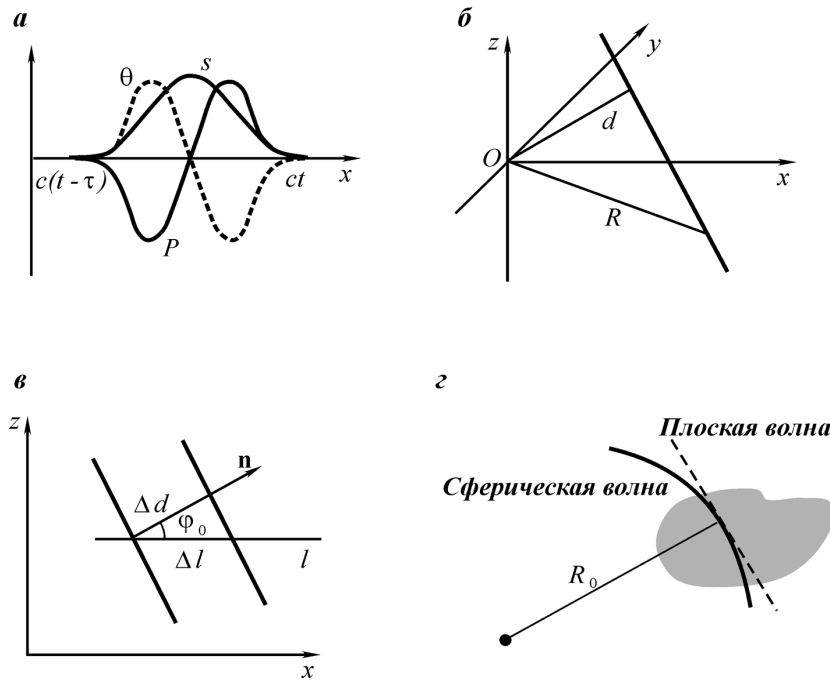


Рис. 5.9. Плоская волна как функция расстояния (а); ориентация фазовой поверхности (б); кажущаяся скорость (в); переход к плоской волне (г)

Очевидно, что, если колебания в источнике описываются во времени синусоидальными функциями, то волна существует повсюду, а зоны сжатия и растяжения чередуются друг с другом.

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

До сих пор мы предполагали, что волна распространяется вдоль оси x . Для последующего изучения полезно рассмотреть также общий случай, когда волна имеет произвольную ориентацию (рис. 5.9, б). С этой целью выберем декартову прямоугольную систему координат x, y, z с началом в некоторой точке O , расположенной в плоскости источника, где волна возникает в момент времени $t = 0$.

Тогда для смещения и избыточного давления имеем

$$s = s_0 f \left[a \left(t - \frac{d}{c} \right) \right] \mathbf{n}$$

и

$$P = \frac{s_0 K a}{c} f' \left[a \left(t - \frac{d}{c} \right) \right].$$

(5.99)

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор в направлении распространения волны, d – расстояние от начала координат до любой из фазовых поверхностей, например до фронта волны.

Расстояние естественно выразить через координаты произвольной точки фазовой поверхности и компоненты единичного вектора \mathbf{n} .

Очевидно, что радиус-вектор

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}.$$

Как видно из рис. 5.9, \hat{a} , расстояние

$$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{R} = n_x x + n_y y + n_z z. \quad (5.100)$$

Соответственно вместо выражения (5.99) получим

$$s(x, t) = s_0 f \left[a \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right) \right] \quad (5.101)$$

и

$$P(x, t) = \frac{s_0 K a}{c} f' \left[a \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right) \right],$$

где

$$a \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right)$$

является фазой.

Коэффициенты n_x , n_y и n_z являются проекциями единичного вектора на координатные оси и по определению они равняются направляющим косинусам:

$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \cos \beta, \quad n_z = \cos \gamma, \quad (5.102)$$

где α , β и γ – углы между вектором \mathbf{n} и координатными осями.

Как известно (см. приложение 1),

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (5.103)$$

и

$$n_x \leq 1, \quad n_y \leq 1, \quad n_z \leq 1.$$

Предположим, что на интервале времени Δt фазовая поверхность перемещается на расстояние Δd :

$$\Delta d = c \Delta t. \quad (5.104)$$

Если мы рассмотрим распространение волны вдоль произвольной прямой l , то указанная поверхность пересечет эту линию в точке на расстоянии Δl , и, как видно из рис. 5.9, \hat{a} ,

$$\Delta l = \Delta d / \cos \varphi_0,$$

где φ_0 – угол между прямыми d и l . Таким образом, скорость фазовой поверхности вдоль прямой l равна

$$c_l = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{c}{\cos \varphi_0}, \quad (5.105)$$

и с ростом φ_0 эта скорость неограниченно возрастает. В частности, на фазовой поверхности скорость c_l равняется бесконечности.

Как следует из (5.102) и (5.105), скорости фазовой поверхности вдоль осей координат определяются следующими равенствами:

$$c_x = c/n_x, \quad c_y = c/n_y, \quad c_z = c/n_z. \quad (5.106)$$

В отличие от фазовой скорости c , которая определяется только физическими параметрами среды ρ_0 и K , функция c_l , называемая кажущейся скоростью волны, зависит также от направления прямой l .

Запишем выражения для синусоидальных волн. Согласно (5.101) имеем

$$s(x, t) = s_0 \cos \omega \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right) \quad (5.107)$$

и

$$P(x, t) = -\frac{s_0 K \omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right).$$

Каждую из этих формул можно записать в другом виде. Например, для смещения имеем

$$s(x, t) = s_0 \cos[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)], \quad (5.108)$$

где

$$k_x = \omega n_x / c, \quad k_y = \omega n_y / c, \quad k_z = \omega n_z / c. \quad (5.109)$$

Иногда бывает удобно ввести вектор распространения \mathbf{k} , имеющий компоненты

$$k_x = k n_x, \quad k_y = k n_y, \quad k_z = k n_z \quad (5.110)$$

или

$$k_x = k \cos \alpha, \quad k_y = k \cos \beta, \quad k_z = k \cos \gamma.$$

Здесь

$$k = \omega/c.$$

Следовательно, выражение (5.108) можно представить как

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - \mathbf{kR}). \quad (5.111)$$

Конечно, ни плоская, ни цилиндрическая волна в реальности не существуют, поскольку их источники должны обладать бесконечно большой энергией. В то же время при определенных условиях эти модели волн могут интерпретироваться как достаточно точная аппроксимация реально существующих волн. Например, рассмотрим снова сферическую волну. Увеличение расстояния R от источника приводит к двум эффектам. Прежде всего, волновые поля начинают медленно затухать и, в соответствии с (5.17), на достаточно больших расстояниях мы имеем

$$\begin{aligned} s(R, t) &= \frac{R_0^2 s_0 a}{cR} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \\ v(R, t) &= \frac{R_0^2 s_0 a^2}{cR} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \\ P(R, t) &= \frac{R_0^2 s_0 a^2}{R} \rho_0 f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Во-вторых, кривизна волновой поверхности становится меньше, и это означает, что гораздо большую ее часть можно приближенно заменить плоской волной.

Полагая в (5.112)

$$\frac{R_0^2 s_0 a}{cR} = A$$

и заменяя функцию $f' [a(t-R/c)]$ функцией $f [a(t-R/c)]$, мы приходим к выражению (5.94).

Таким образом, поведение сферической волны на достаточно больших расстояниях и в пределах некоторого объема конечных размеров (рис. 5.9, \tilde{a}) практически совпадает с поведением плоской волны. В частности, в случае синусоидальной волны эта эквивалентность выполняется в волновой зоне ($R > \lambda$) при условии, что расстояние R достаточно велико.

Если сферическая волна является нестационарной, то плоская волна также может служить относительно точной аппроксимацией на больших расстояниях от источника и в волновой зоне:

$$R > \lambda_0.$$

Здесь λ_0 – наибольшая длина волны в спектре, которая еще дает существенный вклад в амплитуду сферической волны.

В заключение заметим следующее. С геометрической точки зрения мы рассмотрели три различные волны: сферическую, цилиндрическую и плоскую. Все эти волны обладают одним общим свойством, которое заключается в том, что избыточное давление, дилатация, а также амплитуда смещений и скорость частиц остаются постоянными на фазовой поверхности:

$$P = C_1, \quad \theta = C_2, \quad |s| = C_3, \quad |v| = C_4. \quad (5.113)$$

В дальнейшем мы будем изучать волны более общего типа, когда волновые поля изменяются на фазовых поверхностях. Примером таких волн являются гравитационные волны.