

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Здесь описываются некоторые алгебраические операции над скалярными и векторными функциями, используемые в данной работе.

1. В общем случае скаляр  $T$  и вектор  $\mathbf{M}$  являются функциями точки  $p$ :

$$T = T(p) \text{ и } \mathbf{M} = \mathbf{M}(p). \quad (1)$$

Скаляр  $T$  определяется абсолютной величиной  $|T|$  и знаком, а вектор  $\mathbf{M}$  характеризуется модулем (длиной)  $M$  и направлением  $\mathbf{i}_m$ :

$$\mathbf{M}(p) = M(p)\mathbf{i}_m. \quad (2)$$

Здесь  $M(p)$  – положительная величина,  $\mathbf{i}_m$  – единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором  $\mathbf{M}$ :

$$|\mathbf{i}_m| = 1. \quad (3)$$

По определению, у скалярной величины нет направления, а вектор не является ни положительным, ни отрицательным. Точка  $p$ , в которой изучается поведение этих функций, обычно называется точкой наблюдения. Положение этой точки в пространстве задается радиус-вектором  $\mathbf{L}_{op}$  или тремя координатами  $x_1, x_2$  и  $x_3$ .

В обоих случаях требуется задать начало системы координат в некоторой точке  $O$ , положение которой известно. Тогда радиус-вектор  $\mathbf{L}_{op}$  можно записать как

$$\mathbf{L}_{op} = L_{op} \mathbf{i}, \quad (4)$$

где  $L_{op}$  – расстояние от начала координат до точки наблюдения;  $\mathbf{i}$  – единичный вектор, направленный по радиусу от начала координат к точке наблюдения (рис. 1, *a*).

Итак, в качестве аргументов функций  $T(p)$  и  $\mathbf{M}(p)$  можно выбрать либо радиус-вектор, либо три координаты этой точки:

$$T(\mathbf{L}_{op}) \text{ или } T(x_1, x_2, x_3) \quad (5)$$

и

$$\mathbf{M}(\mathbf{L}_{op}) \text{ или } \mathbf{M}(x_1, x_2, x_3).$$

Далее мы будем также использовать криволинейную систему координат, образованную тремя взаимно ортогональными семействами координатных линий  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , направления которых задаются единичными векторами (рис. 1, *б*).

Для того чтобы определить положение точки наблюдения, необходимо вычислить ее координаты  $x_1, x_2$  и  $x_3$  вдоль координатных линий.

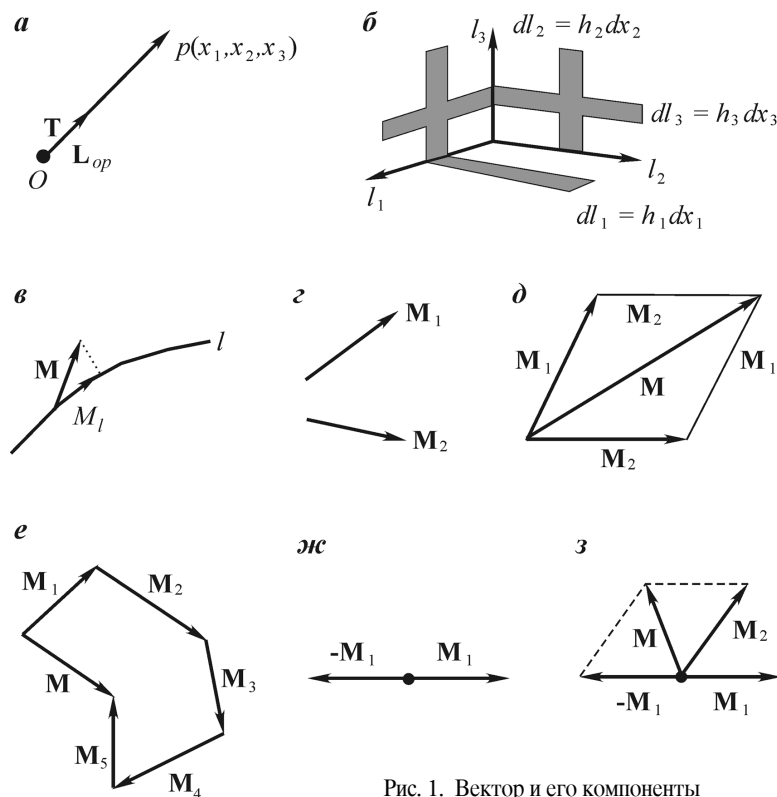


Рис. 1. Вектор и его компоненты

2. Введем скалярную и векторную компоненту вектора  $\mathbf{M}$  вдоль некоторого направления  $l$  следующим образом (рис. 1, в):

$$M_l = M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l) \text{ и } \mathbf{M}_l = M_l \mathbf{i}_l. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{i}_l$  – единичный вектор вдоль кривой  $l$ , а  $(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l)$  – угол между векторами  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{i}_l$ . Заметим, что скалярная компонента  $M_l$  положительна, если этот угол острый, и отрицательна, если угол становится тупым.

Вектор  $\mathbf{M}$  часто описывают, используя его скалярные и векторные компоненты вдоль координатных линий  $l_1, l_2$  и  $l_3$ :

$$M_l = M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l), \quad \mathbf{M}_l = M_l \mathbf{i}_l \quad (7)$$

и  $l = (1, 2, 3)$ .

Здесь  $(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l)$  – угол между вектором  $\mathbf{M}$  и единичным вектором  $\mathbf{i}_l$ , задающим направление соответствующей координатной линии.

3. Суммирование векторов производится по правилу параллелограмма и, конечно, оно отличается от суммирования скаляров. Пусть имеется два век-

тора  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  (рис. 1,  $\varepsilon$ ). Составим из них параллелограмм, показанный на рис. 1,  $\delta$ . По определению, сумма векторов также является вектором:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.$$

Модуль этого вектора равняется длине диагонали параллелограмма, и он направлен к концу второго вектора. Очевидно, что последовательное использование этого правила позволяет найти сумму произвольного числа векторов. Эта процедура показана на рис. 1,  $e$ .

Для того чтобы найти разность векторов  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ , необходимо учесть, что векторы

$$\mathbf{M}_3 = -\mathbf{M}_1 \text{ и } \mathbf{M}_1$$

имеют одинаковую длину и противоположны по направлению (рис. 1,  $ж$ ). Снова используя правило параллелограмма, получим

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1, \quad (9)$$

и разность двух векторов также направлена вдоль диагонали (рис. 1,  $з$ ).

Следует заметить, что если направления векторов совпадают или являются противоположными, то для них операции суммирования и вычитания производятся так же, как и для скаляров.

4. Теперь, используя правило параллелограмма, вектор  $\mathbf{M}$  можно представить через его векторные и скалярные компоненты вдоль координатных линий. Действительно, как видно из рис. 2,  $a$ ,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \quad (10)$$

где  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  – векторные компоненты.

Обобщение на трехмерный случай очевидно (рис. 2,  $б$ ):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_{12}.$$

Здесь

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 \quad (11)$$

или

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3. \quad (12)$$

Поскольку векторные компоненты образуют прямоугольник, длина вектора определяется выражением

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}.$$

В то же время, если известны длина и направляющие косинусы вектора  $\mathbf{M}$ , то его скалярная компонента определяется формулой (6).

Из соотношений (2), (6) и (11) получим

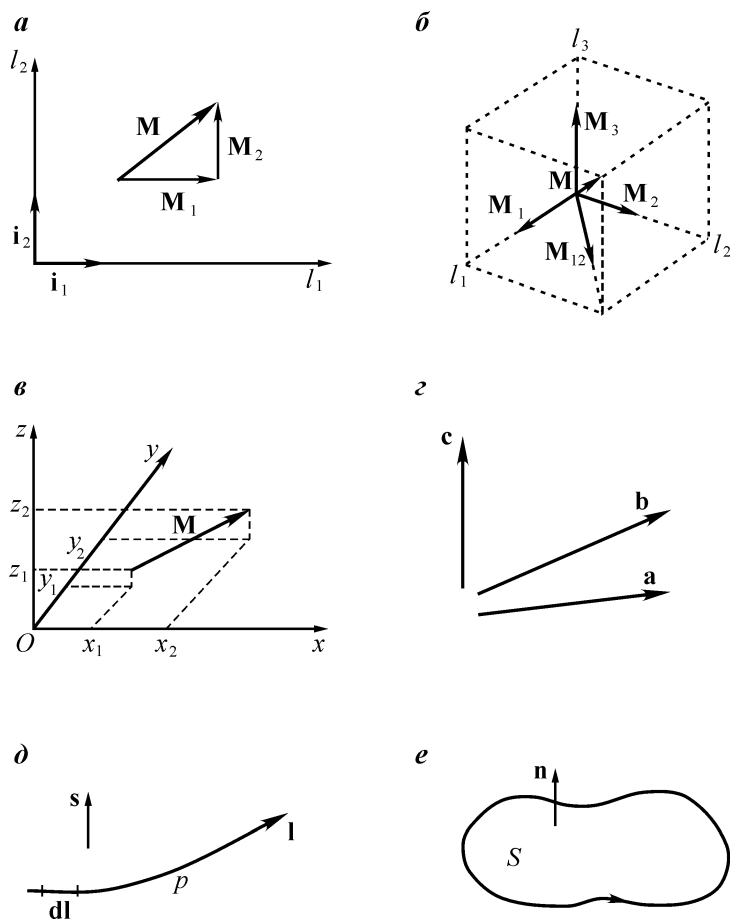


Рис. 2. Скалярные и векторные компоненты. Векторное произведение. Взаимная ориентация кривых и поверхностей

$$M \mathbf{i}_m = M \cos \alpha \mathbf{i}_1 + M \cos \beta \mathbf{i}_2 + M \cos \gamma \mathbf{i}_3$$

или

$$\mathbf{i}_m = \cos \alpha \mathbf{i}_1 + \cos \beta \mathbf{i}_2 + \cos \gamma \mathbf{i}_3, \quad (14)$$

т.е. направляющие косинусы  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$  являются проекциями единичного вектора  $\mathbf{i}_m$  на координатные оси. Из равенства (13) следует, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (15)$$

Пусть координатами начала и конца вектора  $\mathbf{M}$  являются

$x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$ .

Тогда, как это видно из рис. 2,  $\alpha$ , скалярные компоненты равны разности соответствующих координат:

$$M_1 = x_2 - x_1, \quad M_2 = y_2 - y_1, \quad M_3 = z_2 - z_1. \quad (16)$$

Следовательно, направляющие косинусы и длина вектора  $M$  определяются как

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{M}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{M}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{M} \quad (17)$$

и

$$M = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Мы имеем два разных представления вектора:

$$\mathbf{M} = M \mathbf{i}_m \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3.$$

Последняя форма представления является более удобной для суммирования и вычитания векторов. В частности,

$$\mathbf{M} \pm \mathbf{N} = (M_1 \pm N_1)\mathbf{i}_1 + (M_2 \pm N_2)\mathbf{i}_2 + (M_3 \pm N_3)\mathbf{i}_3. \quad (18)$$

5. В отличие от скаляров, для векторов существует две операции умножения: скалярное и векторное произведение, а операция деления отсутствует.

Скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3$$

и

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3 \quad (19)$$

определяется как

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (20)$$

где  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  – угол между этими векторами.

Таким образом, данное произведение является скаляром, а его знак определяется углом  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . В частности, если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

Поскольку мы рассматриваем только ортогональные системы координат, то

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = 0$$

и

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_3 = 1. \quad (21)$$

Скалярное произведение также очень просто выражается через компоненты

векторов. Перемножая векторные компоненты из правой части формулы (19), получим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (22)$$

Это вторая форма представления скалярного произведения.

Равенство (20) позволяет определить угол между двумя векторами. Используя соотношения (14) и (22), имеем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \mathbf{i}_a \cdot \mathbf{i}_b = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

или

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos \alpha_a \cos \alpha_b + \cos \beta_a \cos \beta_b + \cos \gamma_a \cos \gamma_b. \quad (23)$$

Рассмотрим вместо произвольного вектора  $\mathbf{b}$  единичный вектор  $\mathbf{i}_l$ . Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_l = a \cos(\alpha, \mathbf{i}_l) = a_l, \quad (24)$$

где  $a_l$  – проекция вектора  $\mathbf{a}$  на кривую  $l$ . Другими словами, чтобы найти проекцию вектора на некоторое направление, мы должны взять скалярное произведение этого вектора и единичного вектора в заданном направлении. Если направления этих векторов совпадают, то  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$  и скалярное произведение сводится к произведению длин этих векторов.

Рассмотрим теперь второй тип умножения. Векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (25)$$

является вектором, перпендикулярным к каждому из них. Его длина равняется площади параллелограмма, образованного этими векторами:

$$c = a b \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (26)$$

Направление векторного произведения  $\mathbf{c}$  определяется из условия, согласно которому векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  должны образовывать правую тройку (см. рис. 2, з).

Следовательно

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (27)$$

Согласно формуле (26) векторное произведение двух параллельных векторов равняется нулю, а его максимальное значение достигается, когда векторы перпендикулярны друг другу. Так, например, для единичных векторов ортогональной системы координат

$$\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 \quad (28)$$

и

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 0.$$

Перемножая векторные компоненты из формулы (19) и используя равенства (28), приходим к другому выражению для векторного произведения:

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Его можно записать как

$$\mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{i}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i}_3. \quad (30)$$

6. Рассмотрим теперь еще две операции над векторами. Смешанное произведение трех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  является скалярной величиной, равной объему параллелепипеда, образованного этими тремя векторами:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (31)$$

или

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Двойное векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

является более сложной операцией, однако его можно представить в виде разности двух векторов:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (33)$$

Данное равенство бывает очень полезным для упрощения алгебраических преобразований.

Из определения смешанного произведения следует, что

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}. \quad (34)$$

7. Известные правила дифференцирования скалярных функций можно применять и для непрерывных векторных функций. Так, например,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dx} + \frac{d\mathbf{b}}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \varphi \mathbf{a} &= \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dx} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dx}, \\ \frac{d}{dx}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dx} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dx}, \\ \frac{d}{dx}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dx} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dx}. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь  $\varphi$  – скалярная функция,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – векторные функции, переменная  $x$

является их аргументом. В частности,  $x$  может быть координатой точки наблюдения.

Аналогичные соотношения можно написать и для более сложных комбинаций векторных и скалярных функций. В общем случае как длина, так и направление вектора являются функциями координат точки наблюдения. В соответствии с формулой (2), производная векторной функции  $\mathbf{M}(p)$  по аргументу  $x$  записывается как

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \mathbf{i}_m + M \cdot \frac{d\mathbf{i}_m}{dx}. \quad (36)$$

В частности, производная векторной компоненты вдоль координатной линии определяется следующим выражением:

$$\frac{dM_k}{dx_k} = \frac{dM_k}{dx_k} \cdot \mathbf{i}_k + M_k \cdot \frac{d\mathbf{i}_k}{dx_k}, \quad (37)$$

где  $\mathbf{i}_k$  – единичный вектор вдоль линии  $l_k$ ,  $x_k$  – соответствующая координата.

В криволинейной системе координат направления единичного вектора  $\mathbf{i}_k$ , как правило, являются функциями положения точки наблюдения и, следовательно, в этом случае второе слагаемое в формуле (37) не равно нулю.

8. Введем понятие ориентированного элементарного смещения  $d\mathbf{l}$ :

$$d\mathbf{l} = dl \mathbf{i}_l = d\mathbf{l}_1 + d\mathbf{l}_2 + d\mathbf{l}_3 = dl_1 \mathbf{i}_1 + dl_2 \mathbf{i}_2 + dl_3 \mathbf{i}_3. \quad (38)$$

Здесь  $dl$  обозначает модуль вектора  $d\mathbf{l}$ , равный длине этого сегмента, а  $dl_k$  и  $d\mathbf{l}_k = dl_k \mathbf{i}_k$  являются соответственно скалярной и векторной компонентами вектора  $d\mathbf{l}$  вдоль координатной линии. Ориентация кривой  $l$  в пространстве определяется выбором ее положительного направления, т.е. вектором  $d\mathbf{l}$ . Аналогичным образом, ориентированный элемент поверхности  $d\mathbf{S}$  можно представить как

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{n} = dS_1 \mathbf{i}_1 + dS_2 \mathbf{i}_2 + dS_3 \mathbf{i}_3. \quad (39)$$

Здесь  $dS$  обозначает длину вектора  $d\mathbf{S}$ , равную площади поверхности элемента,  $\mathbf{n}$  – единичную нормаль к этой поверхности, а

$$dS_k = dS \cos(\mathbf{dS}, \mathbf{i}_k), \quad d\mathbf{S}_k = dS_k \mathbf{i}_k \quad (40)$$

являются скалярной и векторной проекцией  $d\mathbf{S}$  на поверхность, перпендикулярную к координатной линии  $l_k$ . Ориентация поверхности  $d\mathbf{S}$  определяется ее нормалью  $\mathbf{n}$ . Мы будем различать переднюю и заднюю стороны этой поверхности и введем соглашение, согласно которому нормаль всегда направлена от задней стороны к передней.

Для того чтобы охарактеризовать взаимную ориентацию векторов, мы будем использовать только правило правой руки, которое можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть положение точки наблюдения меняется вдоль некоторой кривой  $l$  в положительном направлении  $d\mathbf{l}$  (рис. 2,  $\partial$ ). Будем говорить, что вектор  $d\mathbf{l}$  образует правостороннюю систему с произ-



вольным вектором  $\mathbf{s}$ , если для наблюдателя, находящегося в конце вектора  $\mathbf{s}$ , движение точки  $p$  происходит против часовой стрелки. Например, можно рассмотреть поверхность  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}$ , ограниченную контуром  $l$  (рис. 2,  $e$ ). В соответствии с правилом правой руки, направление  $d\mathbf{l}$  должно быть выбрано таким образом, чтобы оно указывало на вращение вокруг вектора  $\mathbf{n}$  против часовой стрелки. В общем случае три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образуют правостороннюю систему, если их направления соответствуют правилу правой руки (рис. 2,  $z$ ). В частности, в правосторонней системе координат единичные векторы подчиняются соотношениям (28).

9. Рассмотрим кратко основные свойства криволинейной ортогональной системы координат. Как отмечалось ранее, три взаимно перпендикулярные линии  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , заданные в каждой точке пространства, образуют три семейства координатных линий. Вдоль каждой такой линии изменяется только одна координата, а две остальных остаются постоянными. Например, координаты  $x_2$  и  $x_3$  не меняются вдоль координатной линии  $l_1$ . Положение точки можно характеризовать также тремя семействами координатных поверхностей  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , ориентация которых такова, что координатная линия  $l_k$  перпендикулярна поверхности  $S_k$  в каждой точке. На каждой координатной поверхности остается неизменной только одна координата. Указанные три семейства поверхностей перпендикулярны друг другу, так же, как и три семейства координатных линий. Из рис. 1,  $b$  видно, что элементы координатных поверхностей  $dS_k$ , ограниченных координатными линиями, определяются векторами

$$d\mathbf{S}_1 = dl_2 dl_3 \mathbf{i}_1, \quad d\mathbf{S}_2 = dl_1 dl_3 \mathbf{i}_2, \quad d\mathbf{S}_3 = dl_1 dl_2 \mathbf{i}_3. \quad (41)$$

Соответственно элементарный объем, ограниченный координатными поверхностями записывается как

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3. \quad (42)$$

Введем теперь метрические коэффициенты, устанавливающие связь между длиной элементарного сегмента координатной линии  $dl_k$  и изменением соответствующей координаты  $dx_k$ , т.е.

$$dl_1 = h_1 dx_1, \quad dl_2 = h_2 dx_2, \quad dl_3 = h_3 dx_3. \quad (43)$$

Здесь  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  – метрические коэффициенты системы координат, являющиеся обычно функциями, зависящими от точки. Аналитические выражения для метрических коэффициентов выводятся, как правило, из анализа геометрии координатных линий.

Рассмотрим простейшие системы координат.

### Прямоугольная декартова система координат

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Все координатные линии являются прямыми, а координатные поверхности – плоскостями.

Отсюда

$$\begin{aligned} h_1 &= h_2 = h_3 = 1, \\ dl_1 &= dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz, \\ dS_1 &= dy \, dz, \quad dS_2 = dx \, dz, \quad dS_3 = dx \, dy, \\ dV &= dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (44)$$

### Цилиндрическая система координат

$$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z.$$

Координатные линии  $l_1$  и  $l_3$  являются прямыми, а  $l_2$  – окружностью. Координатная поверхность  $r = \text{const}$  является цилиндром,  $\varphi = \text{const}$  – полуплоскостью,  $z = \text{const}$  – горизонтальной плоскостью.

Таким образом,

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1, \\ dl_1 &= dr, \quad dl_2 = r \, d\varphi, \quad dl_3 = dz, \\ dS_1 &= r \, d\varphi \, dz, \quad dS_2 = dr \, dz, \quad dS_3 = r \, dr \, d\varphi, \\ dV &= r \, dr \, d\varphi \, dz. \end{aligned} \quad (45)$$

### Сферическая система координат

Координатная линия  $l_1$  является прямой, а  $l_2$  и  $l_3$  – соответственно полуокружностью и окружностью. Координатная поверхность  $R = \text{const}$  является сферой,  $\theta = \text{const}$  – боковой поверхностью конуса с вершиной в начале координат, а  $\varphi = \text{const}$  – полуплоскостью.

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R \sin \theta, \\ dl_1 &= dR, \quad dl_2 = R \, d\theta, \quad dl_3 = R \sin \theta \, d\varphi, \\ dS_1 &= R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad dS_2 = R \sin \theta \, dR \, d\varphi, \quad dS_3 = R \, dR \, d\theta, \\ dV &= R^2 \sin \theta \, dR \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned} \quad (46)$$

10. Полезно ввести еще одно понятие – телесного угла. С этой целью проведем прямые из точки наблюдения к точкам, принадлежащим границе поверхности  $S$  (рис. 3,  $a$ ). Эти прямые образуют конус, телесный угол которого  $\omega(p)$  характеризует угол, под которым поверхность  $S$  видна из точки  $p$ . Этот угол может быть положительным, отрицательным или равняться нулю. Он определяется как

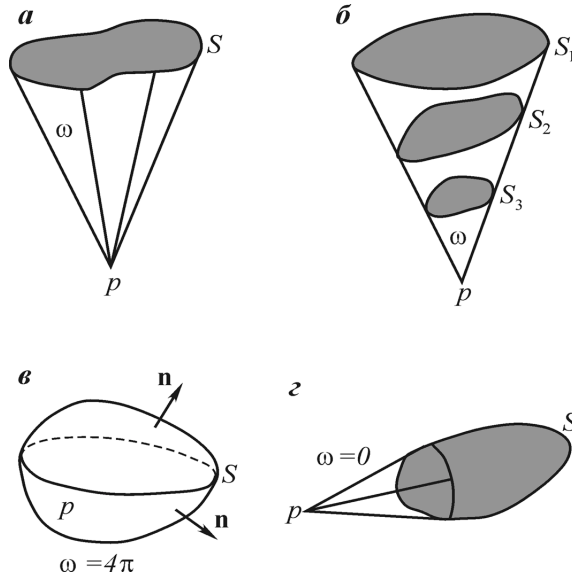


Рис. 3. Примеры телесных углов

$$\omega(p) = \int_S \frac{\mathbf{dS} \cdot \mathbf{L}_{pq}}{L_{pq}^3}, \quad (47)$$

где  $L_{pq}$  – расстояние от точки  $p$  до произвольной точки на поверхности  $S$  (рис. 3, а);  $\mathbf{dS} = dS \mathbf{n}$ .

Существенно, что все поверхности, ограниченные данным конусом видны под одним и тем же углом  $\omega(p)$ , при условии, что мы наблюдаем из точки  $p$  либо переднюю, либо заднюю стороны этих поверхностей (рис. 3, б). В противном случае телесные углы будут различаться знаком. Если предположить, что одна из поверхностей, ограниченных данным конусом, является сферой  $S_{sph}$  с радиусом  $L_{pq}$ , то выражение (47) упростится следующим образом:

$$\omega(p) = \pm \frac{S_{sph}}{L_{pq}^2}. \quad (48)$$

В этом широко используемом выражении вычисление телесного угла сводится к определению соответствующей сферической поверхности.

Пусть некоторый объем  $V$  окружен произвольной замкнутой поверхностью  $\hat{S}$  (рис. 3, в, г). Тогда из равенства (48) следует, что телесный угол, под которым видна поверхность  $S$ , равняется

$$\omega(p) = \begin{cases} \pm 4, & p \text{ внутри } V, \\ 0, & p \text{ вне } V. \end{cases} \quad (49)$$

Этот важный результат часто используется при изучении различных полей.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1. Определим скалярное поле как функцию, зависящую от точки  $p$ :

$$T = T(p). \quad (1)$$

Другими словами, будем считать, что за исключением координат точки  $p$ , все остальные факторы являются константами.

В общем случае предполагается, что данное поле является однозначной функцией. В основном мы будем изучать поведение этой функции в окрестности ее регулярных точек, где поле ведет себя непрерывным образом. Однако иногда мы будем рассматривать сингулярные точки, линии и поверхности, где поле терпит разрыв.

2. Классическими примерами скалярных полей являются давление, высота над уровнем моря, температура, время прихода волн и плотность горных пород. Помимо перечисленных полей, имеющих ясный физический смысл, к данному типу относятся также поля, которые вводятся для упрощения изучения более сложных векторных полей. Примерами таких вспомогательных полей являются потенциалы гравитационного и электрического поля, а также акустический потенциал.

3. Исследуем теперь поведение скалярного поля  $T(p)$  в окрестности его регулярной точки  $p$ . Для этого выберем некоторое направление  $l$  (рис. 1, *a*) и посмотрим, как вдоль этой кривой меняется рассматриваемое поле. Это изменение характеризуется производной  $T(p)$  по длине дуги, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta l}. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta T$  обозначает разность значений функции  $T$ :

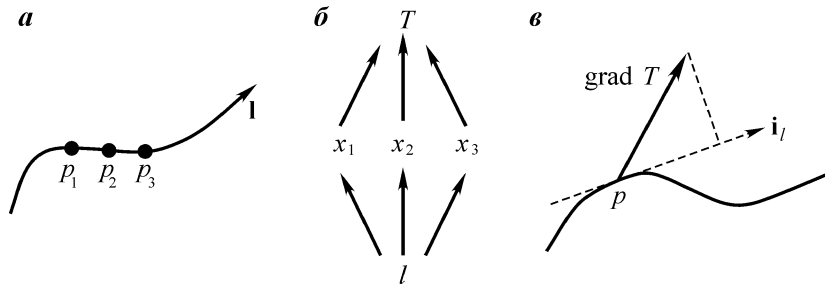


Рис. 1. Градиент и производная по направлению

$$\Delta T = T(p_2) - T(p_1),$$

а  $\Delta l$  – расстояние между точками  $p_1$  и  $p_2$ .

Из определения (2) следует, что производная  $\partial T / \partial l$  характеризует величину относительного изменения поля  $T$  вдоль кривой  $l$ . Эта величина равна приращению  $\Delta T$ , деленному на соответствующий интервал  $\Delta l$ .

В общем случае производная  $\partial T / \partial l$  меняется при изменении направления кривой  $l$ , проходящей через точку  $p$ , т.е. в окрестности любой точки наблюдения существует бесконечное число производных.

4. Все эти производные можно выразить через одну единственную векторную функцию, описывающую данное поле. Для того чтобы решить эту задачу, воспользуемся тем, что изменению длины дуги  $l$  соответствует изменение координат точки  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Связь поля  $T(p)$  с координатами точки  $p$  и длиной дуги  $l$  показана на рис. 1, б. Используя цепное правило для производной, получим

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial l}, \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial x_1}{\partial l} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial l_1}{\partial l}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial l} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial l_2}{\partial l}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial l} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial l_3}{\partial l},$$

так как метрические коэффициенты практически не меняются в пределах малых интервалов вдоль координатных линий  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ .

Равенство (3) записывается теперь как

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial l_1}{\partial l} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial l_2}{\partial l} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial l_3}{\partial l} \quad (4)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial l_3} \frac{\partial l_3}{\partial l}. \quad (5)$$

Здесь  $\partial l_1$ ,  $\partial l_2$  и  $\partial l_3$  – скалярные компоненты вектора  $d\mathbf{l}$  вдоль координатных линий:

$$\frac{\partial l_1}{\partial l} = \cos(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}), \quad \frac{\partial l_2}{\partial l} = \cos(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}), \quad \frac{\partial l_3}{\partial l} = \cos(\mathbf{l}_3, \mathbf{l}).$$

Следовательно, правую часть формулы (5) можно представить в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \mathbf{i}_l \cdot \text{grad } T. \quad (6)$$

Здесь

$$\mathbf{i}_l = \cos(l_1, l) \mathbf{i}_1 + \cos(l_2, l) \mathbf{i}_2 + \cos(l_3, l) \mathbf{i}_3$$

является единичным вектором, характеризующим направление кривой  $l$  в точке  $p$ , по которому берется производная.

5. Вектор

$$\text{grad } T = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \mathbf{i}_3$$

или

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial l_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial T}{\partial l_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial T}{\partial l_3} \mathbf{i}_3 \quad (7)$$

называется градиентом скалярного поля и, согласно формуле (6), любую производную по направлению скалярного поля  $\partial T / \partial l$  можно представить через градиент. Из этого равенства также следует, что  $\text{grad } T$  указывает направление максимального увеличения поля. Величина  $|\text{grad } T|$  равняется максимальной производной  $\partial T / \partial l$  в окрестности точки наблюдения (рис. 1, *в*). Это означает, что градиент характеризует только поведение поля. Следовательно, он не зависит от всех других факторов и, в частности, от системы координат. Другими словами, вектор

$$\mathbf{M} = \text{grad } T$$

инвариантен относительно замены координат. Смысл градиента виден из формулы (6), которая показывает, что вместо того, чтобы брать производную  $\partial T / \partial l$  по длине дуги кривой  $l$ , достаточно просто спроектировать  $\text{grad } T$  на это направление. Чтобы подчеркнуть этот факт, запишем формулу (6) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \text{grad}_l T. \quad (8)$$

Таким образом, производная скалярного поля по произвольному направлению  $l$  является проекцией градиента на это направление (рис. 1, *в*).

6. В качестве иллюстрации приведем выражения для  $\text{grad } T$  в различных системах координат.

#### Прямоугольная декартова система координат

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}.$$

### Цилиндрическая система координат

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{i}_z. \quad (9)$$

### Сферическая система координат

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial R} \mathbf{i}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi.$$

7. Градиент скалярного поля часто бывает удобно записать в следующем виде:

$$\text{grad } T = \nabla T. \quad (10)$$

Здесь  $\nabla$  – оператор, имеющий различные выражения в разных системах координат. Так, например, в прямоугольной системе координат

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11)$$

8. Во многих случаях приходится иметь дело с такими полями  $T(\psi)$ , аргумент  $\psi$  которых сам является функцией координат. В этом случае можно записать

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial T}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Следовательно, как следует из первого соотношения (7),

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial \psi} \text{grad } \psi. \quad (12)$$

Например, если поле является функцией расстояния между двумя точками:

$$\psi = L_{qp},$$

то

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial L_{qp}} \nabla L_{qp}. \quad (13)$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

#### ВВЕДЕНИЕ

Наша цель состоит в том, чтобы описать некоторые фундаментальные математические понятия, которые используются при изучении векторных полей различной природы. Гравитационные, электрические, магнитные и электромагнитные поля являются классическими примерами векторных полей, описывающих определенные физические явления. Смещение, скорость и ускорение частиц среды, связанные с распространением акустических или упругих волн, также являются векторными полями. Каждое из указанных полей вызвано некоторым генератором, список которых приведен в табл. 1. В этой таблице  $\delta_m$  и  $\delta_e$  – объемные плотности соответственно массы и заряда;  $\mathbf{j}_c$  и  $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$  – плотности тока проводимости и тока смещения;  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  – скорость изменения магнитного поля во времени. Наконец,  $P_a$  – это давление, вызванное деформацией среды.

Из табл. 1 видно, что существует два типа генераторов векторного поля. Генераторы, относящиеся к первому типу, описываются скалярными функциями, такими как масса, заряд или давление, и называются источниками. Второй тип – это вихри. К этому типу генераторов относятся  $\mathbf{j}_c$ ,  $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$  и  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ , и распределение таких генераторов описывается векторными функциями.

Очевидно, что некоторые поля могут вызываться только источниками, а другие – только вихрями. Наконец, существуют поля, появление которых связано с наличием источников обоих типов.

С физической точки зрения очевидно, что поведение поля определяется распределением генераторов. Поэтому естественно установить связь между каждым таким генератором и соответствующим ему полем. Такой подход используется при построении теории векторных полей. Поскольку существует два типа генераторов, мы выведем соответствующие этим типам два фундаментальных уравнения, играющих роль связующих “мостов” между векторным полем  $\mathbf{M}(a)$  и его генераторами. Такой же подход будет использоваться

Т а б л и ц а 1

Поле	Генераторы
Гравитационное $\mathbf{g}$ Электрическое $\mathbf{E}$ Магнитное $\mathbf{B}$ Электромагнитное $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ Смещения частиц $\mathbf{s}$ , связанные с акустическими волнами	Массы $\delta_m$ Заряды $\delta_e$ Токи проводимости и молекулярные токи Скорость изменения магнитного поля $\partial \mathbf{B} / \partial t$ и токи смещения $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ Давление $P_a$



при изучении вспомогательных векторных полей, которые вводятся, чтобы упростить анализ реальных векторных полей.

В принципе, можно было бы поступить и другим образом. Действительно, поскольку векторное поле  $\mathbf{M}(a)$  можно представить в виде

$$\mathbf{M}(p) = M_1(p)\mathbf{i}_1 + M_2(p)\mathbf{i}_2 + M_3(p)\mathbf{i}_3,$$

изучение этого векторного поля можно свести к изучению трех скалярных полей  $M_1(p)$ ,  $M_2(p)$  и  $M_3(p)$ . Однако такой подход полезен только в том случае, когда требуется задать поведение векторного поля в зависимости от точки наблюдения.

## 1. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ

Чтобы вывести соотношение, связывающее векторное поле с его источниками, удобно ввести понятие векторной линии (линии тока). По определению, каждый элемент  $d\mathbf{l}^m$  векторной линии параллелен самому полю  $\mathbf{M}$ , т.е.

$$\cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}^m) = 1. \quad (1)$$

Другими словами, в каждой точке поле  $\mathbf{M}$  тангенциально линии векторного поля (рис. 1, а), т.е. элемент  $d\mathbf{l}^m$  и вектор  $\mathbf{M}$  имеют одни и те же направляющие косинусы.

Поэтому мы можем записать

$$\frac{\partial l_1}{M_1} = \frac{\partial l_2}{M_2} = \frac{\partial l_3}{M_3}. \quad (2)$$

Последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение, задающее линии векторного поля.

Здесь

$$d\mathbf{l} = dl_1\mathbf{i}_1 + dl_2\mathbf{i}_2 + dl_3\mathbf{i}_3.$$

Поскольку линии векторного поля указывают направление поля в каждой точке, они наглядно демонстрируют геометрию векторного поля. Эти линии можно также использовать для иллюстрации поведения модуля  $M$  как функции точки наблюдения  $p$ . С этой целью рассмотрим элемент поверхности  $dS^m$ , расположенный в плоскости, перпендикулярной линиям векторного поля.

Предположим, что число линий  $dN$ , пересекающих эту поверхность, прямо пропорционально модулю векторного поля

$$dN = \alpha M dS^m, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – некоторая постоянная, не зависящая от координат точки.

Плотность линий векторного поля равняется

$$\frac{dN}{dS^m} = \alpha M,$$

т.е. она увеличивается в тех местах, где поле более сильное, и наоборот.

Важно различать два типа векторных линий, а именно: открытые и замкнутые (рис. 1, *в*). Первый тип имеет концевые точки  $g_m^+$  и  $g_m^-$ , а у второго такие точки отсутствуют.

Указанные точки являются геометрической моделью источников векторного поля (см. рис. 1, *з*, *д*, *е*).

## 2. ЧИСЛО ВЕКТОРНЫХ ЛИНИЙ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЬ

По аналогии с действительными и комплексными числами можно ввести такое правило, которое позволит сосчитать количество векторных линий, пересекающих произвольную поверхность  $S$  (рис. 1, *ж*, *з*). Если линия пересекает поверхность  $S$  и угол между  $d\mathbf{l}^m$  и  $d\mathbf{S}$  не превышает  $\pi/2$ , то осуществляется положительный переход через эту поверхность. По определению, в этом случае линии идут от задней к передней стороне поверхности. И наобо-

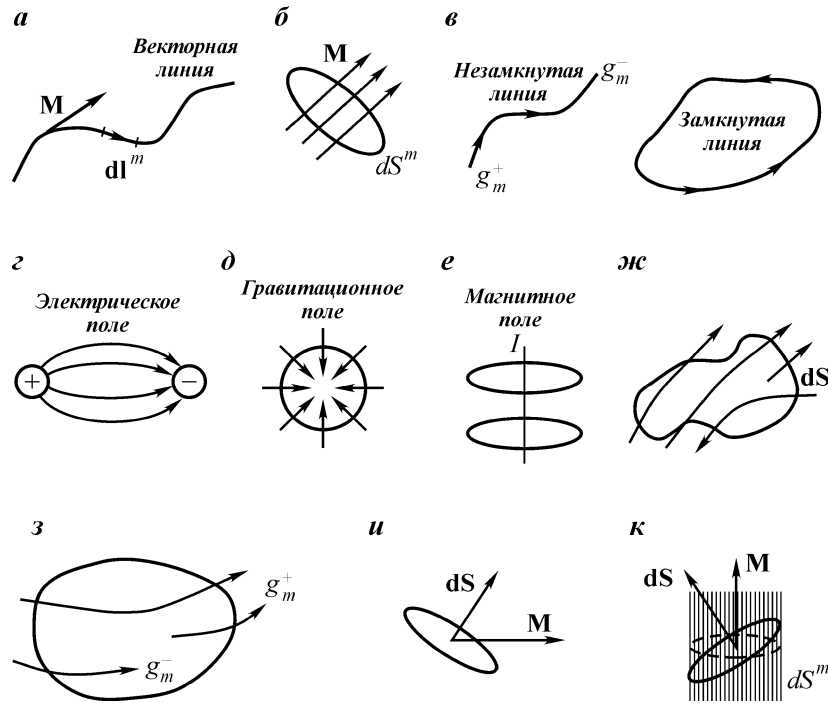


Рис. 1. Векторные линии (линии тока)

рот, если угол между  $d\mathbf{l}^m$  и  $d\mathbf{S}$  больше, чем  $\pi/2$ , то переход является отрицательным. Таким образом, полное число линий векторного поля, пересекающих поверхность, определяется в общем случае разностью между количеством векторных линий, дающих положительный и отрицательный вклад.

Рассмотрим теперь частный случай замкнутой поверхности, изображенной на рис. 1, з. В каждой точке поверхности нормаль  $\mathbf{n}(d\mathbf{l} = d\mathbf{S} \mathbf{n})$  направлена в сторону от объема  $V$ , окруженного поверхностью  $S$ . Если векторная линия не заканчивается внутри объема  $V$ , ее вклад равен нулю. Действительно, когда данная линия пересекает поверхность от ее передней стороны к задней, то пересечение является отрицательным. После этого та же самая линия снова пересекает данную поверхность, но в обратной последовательности, проходя сначала заднюю, а затем переднюю стороны. В этом случае пересечение является положительным. Соответственно, полное число векторных линий равно нулю. Отсюда можно сделать вывод о том, что число векторных линий, пересекающих замкнутую поверхность, определяется числом конечных точек, заключенных внутри объема. Так, например, линия, имеющая внутри объема точку  $g_m^+$  или  $g_m^-$ , дает соответственно положительный или отрицательный вклад.

Таким образом, число векторных линий, пересекающих замкнутую поверхность, равняется

$$N = g_m^+ - g_m^-. \quad (4)$$

Здесь  $g_m^+$  и  $g_m^-$  – полное число положительных и отрицательных точек внутри объема.

### 3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Введем теперь одно из основных понятий векторного анализа, а именно поток. Потоком  $dF$  векторного поля  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  через элементарную площадку  $d\mathbf{S}(\mathbf{r})$  (рис. 1, з) называется скалярное произведение

$$dF = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5)$$

Поскольку

$$dF = M dS \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{S}), \quad (6)$$

поток может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В последнем случае поле  $\mathbf{M}$  будет тангенциальным к площадке  $d\mathbf{S}$ .

Произвольную поверхность можно представить как сумму элементарных поверхностей. Тогда поток поля  $\mathbf{M}$  через поверхность  $S$  равняется

$$F = \int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7)$$

И, наконец, поток через замкнутую поверхность  $S$  определяется как

$$F = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8)$$

Далее мы увидим, что последнее определение играет очень важную роль при изучении распределения источников. Для того чтобы оценить поток, выразим его через число векторных линий. Рассмотрим сначала элемент  $dS^m$  (рис. 1, б). Учитывая, что векторы  $d\mathbf{S}^m$  и  $\mathbf{M}$  параллельны друг другу, поток векторного поля запишем как

$$dF = M dS^m.$$

Отсюда, в соответствии с равенством (3), получим

$$dF = \frac{1}{\alpha} dN. \quad (9)$$

Таким образом, в данном простейшем случае поток  $dF$  равняется, с точностью до константы, числу векторных линий, пересекающих поверхность  $dS^m$ , и, конечно, этот поток положителен. Рассмотрим снова элементарную поверхность  $dS$ , произвольно ориентированную относительно поля  $\mathbf{M}$ . Из рис. 1, а видно, что ее проекция  $dS^m$  на плоскость, перпендикулярную полю  $\mathbf{M}$ , есть

$$dS^m = dS \cos(\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}).$$

Поскольку число векторных линий, пересекающих поверхности  $dS$  и  $dS^m$ , одинаково, приходим к равенству

$$dN = \alpha M dS^m = \alpha M dS \cos(\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S})$$

или

$$dN = \alpha \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \alpha dF. \quad (10)$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, поток векторного поля с точностью до константы  $1/\alpha$  равняется числу векторных линий, пересекающих данный элемент:

$$dF = \frac{dN}{\alpha}. \quad (11)$$

Как мы уже знаем, обе величины  $dF$  и  $dN$  могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Обобщение на случай произвольной поверхности  $S$  очевидно:

$$F = \int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} N, \quad (12)$$

где  $N$  – полное число векторных линий, пересекающих поверхность  $S$ .

#### 4. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть теперь поверхность  $S$  является замкнутой. В соответствии с формулой (12) поток векторного поля через эту поверхность

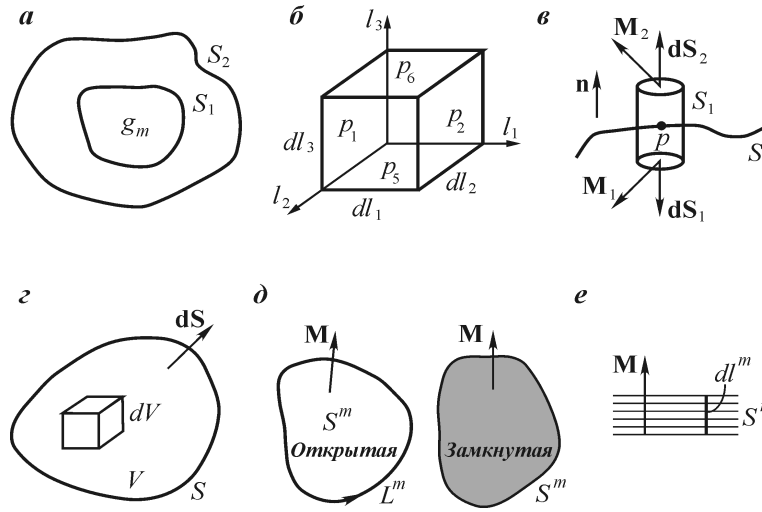


Рис. 2. Поток через замкнутую поверхность. Дивергенция. Нормальные поверхности

$$F = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} N. \quad (13)$$

Здесь  $N$  – число векторных линий, пересекающих замкнутую поверхность  $S$ .

С учетом равенства (4) последнее выражение можно записать как

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} g^m, \quad (14)$$

где

$$g_m = g_m^+ - g_m^-. \quad (15)$$

Таким образом, поток векторного поля через замкнутую поверхность определяется полным числом концевых точек внутри выделенного объема. Равенство (14) является одной из основных формул теории поля, поскольку оно устанавливает связь между полем  $\mathbf{M}$  и концевыми точками векторных линий, т.е. его источниками. Конечно, поразительный результат, описываемый этим выражением, было довольно трудно предсказать заранее. Действительно, изменение поверхности  $S_1$  приводит к изменению величины и направления поля  $\mathbf{M}$  на  $S_1$ , а также к изменению области интегрирования. Можно было бы ожидать, что поток  $F$  через новую поверхность  $S_2$  будет отличаться от того, который был для поверхности  $S_1$  (рис. 2, а). Однако в действительности, если эти поверхности окружают одинаковое число концевых точек, то оба потока равны друг другу:

$$\oint_{S_1} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_2} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}.$$

Следует также заметить, что поток

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$$

не зависит от тех концевых точек линий векторного поля, которые располагаются вне объема  $V$ .

Итак, мы показали, что концевые точки являются геометрическими моделями реальных источников. Рассмотрим в качестве иллюстрации гравитационное, электрическое и магнитное поля. Из физических законов, управляющих поведением этих полей, следует, что

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\epsilon_0}, \quad \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma m, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Здесь  $A_g$  и  $\gamma$  – константы,  $e$  и  $m$  – полный заряд и масса внутри объема, окруженного поверхностью  $S$ .

Смысл формулы (14) особенно ясен в случае магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Существует бесконечное количество магнитных полей различной величины и направления, однако во всех случаях поток поля  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность равен нулю. Физический смысл этого результата состоит в том, что у данного поля нет источников (магнитных зарядов).

Мы будем ассоциировать концевые точки с источниками даже тогда, когда станем рассматривать вспомогательные поля, хотя в этом случае источники, конечно, являются фиктивными. Таким образом, формулу (14) можно записать как

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q, \quad (16)$$

где  $k_1$  – некоторая постоянная;  $Q$  – количество источников в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ .

## 5. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Из формулы (14) следует, что поток

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$$

определяет разность между положительными и отрицательными источниками:

$$Q = Q_+ - Q_-. \quad (17)$$

Тем не менее, он не характеризует их распределение внутри объема. Чтобы преодолеть этот недостаток, рассмотрим такой малый объем  $\Delta V$ , в котором источники (положительные либо отрицательные) распределены равномерно.

Плотность источников в таком объеме можно определить следующим образом:

$$\frac{\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = k_1 \frac{Q}{\Delta V} = k_1 \delta(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Здесь функция  $\delta(\mathbf{r})$  равняется плотности источников, а отношение

$$\frac{\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \text{div } \mathbf{M} \quad (19)$$

называется дивергенцией векторного поля.

Таким образом,

$$\text{div } \mathbf{M} = k_1 \delta(\mathbf{r}), \quad (20)$$

т.е. дивергенция поля  $\mathbf{M}$  в точке  $\mathbf{r}$  определяет плотность источников в окрестности этой точки.

Так, например,

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi \gamma \delta_m, \text{div } \mathbf{E} = \frac{\delta_e}{\epsilon_0}, \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (21)$$

где  $\delta_m$  и  $\delta_e$  – соответственно объемная плотность и плотность зарядов.

В частности, если источники в окрестности некоторой точки отсутствуют, то

$$\text{div } \mathbf{M} = 0.$$

## 6. ВЫРАЖЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ

Как следует из определения (19), для того, чтобы вычислить  $\text{div } \mathbf{M}$ , необходимо выполнить интегрирование по поверхности  $S$ . Это довольно громоздкая процедура, и мы попытаемся заменить ее более простой операцией дифференцирования.

С этой целью рассмотрим элементарный объем

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3, \quad (22)$$

образованный элементами координатных поверхностей (см. рис. 2, б). Поскольку данный объем ограничен координатными поверхностями, поверхностный интеграл по каждой из сторон  $dS$  можно представить в виде скалярного произведения

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_n) \cdot d\mathbf{S},$$

где  $\mathbf{r}_n$  – средняя точка указанной поверхности.

Тогда поток запишется как

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{M}(p_2) \cdot d\mathbf{S}_1(p_2) + \mathbf{M}(p_1) \cdot d\mathbf{S}_1(p_1) + \mathbf{M}(p_4) \cdot d\mathbf{S}_2(p_4) + \\ + \mathbf{M}(p_3) \cdot d\mathbf{S}_2(p_3) + \mathbf{M}(p_6) \cdot d\mathbf{S}_3(p_6) + \mathbf{M}(p_5) \cdot d\mathbf{S}_3(p_5). \quad (23)$$

Поскольку единичные векторы каждой из сторон направлены в сторону от объема, мы имеем

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = M_1(p_2) dS_1(p_2) + M_1(p_1) dS_1(p_1) + M_2(p_4) dS_2(p_4) - \\ - M_2(p_3) dS_2(p_3) + M_3(p_6) dS_3(p_6) - M_3(p_5) dS_3(p_5). \quad (24)$$

Учитывая, что расстояние  $dl$  между противоположными сторонами мало, предположим, что поток между ними изменяется линейно. Тогда вместо выражения (24) получим

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial(M_1 dS_1)}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial(M_2 dS_2)}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial(M_3 dS_3)}{\partial l_3} dl_3. \quad (25)$$

Равенство (19) запишется в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_2 dl_3} \left[ \frac{\partial}{\partial l_1} (M_1 dS_1) dl_1 + \frac{\partial}{\partial l_2} (M_2 dS_2) dl_2 + \frac{\partial}{\partial l_3} (M_3 dS_3) dl_3 \right] \quad (26)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_2 h_3 M_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 M_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 M_3)}{\partial x_3} \right], \quad (27)$$

так как

$$dl_1 = h_1 dx_1, \quad dl_2 = h_2 dx_2, \quad dl_3 = h_3 dx_3.$$

Таким образом, мы заменили операцию интегрирования дифференцированием, и выражение (27) описывает дивергенцию векторного поля в произвольной регулярной точке, где существуют производные вдоль координатных линий. В качестве примера приведем выражения для дивергенции векторного поля в различных системах координат.

#### Декартова прямоугольная система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (28)$$

#### Цилиндрическая система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r M_r)}{\partial r} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial M_z}{\partial z} \right]. \quad (29)$$



### Сферическая система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial(R^2 \sin \theta M_R)}{\partial R} + \frac{\partial(R \sin \theta M_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(R M_\varphi)}{\partial \varphi} \right]. \quad (30)$$

По определению, дивергенция характеризует плотность источников, и, следовательно, при замене координат ее значение не изменится. Иными словами,  $\operatorname{div} \mathbf{M}$ , так же, как и  $\operatorname{grad} T$ , является инвариантом.

### 7. ПОВЕРХНОСТНЫЙ АНАЛОГ $\operatorname{div} \mathbf{M}$

Выражение (27) дивергенции векторного поля через производные справедливо только в регулярных точках, где поле  $\mathbf{M}$  непрерывно. Однако это условие выполняется не везде, и поле  $\mathbf{M}$  может иметь особенности.

Пусть источники распределены по поверхности  $S$  с плотностью  $\Sigma(p)$  (рис. 2,  $\sigma$ ).

Применяя формулу (16) к элементарному цилиндру, получим

$$\mathbf{M}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{M}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \oint_{S_1} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 \Sigma(p) dS. \quad (31)$$

Здесь

$$d\mathbf{S}_2 = dS \mathbf{n}, \quad d\mathbf{S}_1 = -dS \mathbf{n}, \quad \mathbf{M}_2 \text{ и } \mathbf{M}_1$$

обозначают поле на противоположных сторонах цилиндра с боковой поверхностью  $S_1$ .

С уменьшением высоты цилиндра поверхностный интеграл в формуле (31) исчезает, и мы получаем

$$M_{2n}(p) - M_{1n}(p) = k_1 \Sigma(p), \quad (32)$$

т.е. разность нормальных компонент поля определяется плотностью источников в данной точке.

В частности, в тех местах, где плотность равна нулю, нормальная компонента  $M_n$  является непрерывной функцией.

Таким образом, мы получили соотношения трех типов между полем  $\mathbf{M}$  и его источниками:

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = k_1 \delta \quad \text{и} \quad M_{2n} - M_{1n} = k_1 \Sigma. \quad (33)$$

### 8. ФОРМУЛА ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО

Предположим, что внутри объема  $V$ , окруженного поверхностью  $S$ , поле  $\mathbf{M}$  является непрерывным (рис. 2,  $\varepsilon$ ). По определению, число источников в элементарном объеме  $dV$  определяется как

$$\operatorname{div} \mathbf{M} dV = k_1 \delta dV.$$

Следовательно, интегрирование по объему дает

$$\oint_V \operatorname{div} \mathbf{M} dV = k_1 Q.$$

С другой стороны,

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q,$$

и, соответственно,

$$\oint_V \operatorname{div} \mathbf{M} dV = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (34)$$

Последнее выражение – это известная формула Гаусса – Остроградского, которая имеет множество приложений и, в частности, играет основополагающую роль при решении обратных задач. Это связано с тем, что соотношение (34) устанавливает связь между значениями поля на поверхности  $S$ , которые часто известны, и полем внутри объема.

## 9. НОРМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ $S^m$ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ $\mathbf{M}$

Найдем теперь связь между полем  $\mathbf{M}$  и вторым типом генераторов – вихрями. Для этого удобно ввести понятие нормальной поверхности  $S^m$  (рис. 2,  $\partial$ ), в каждой точке которой поле направлено вдоль единичного вектора нормали  $\mathbf{n}$ , т.е. от задней стороны к передней.

Как и в случае векторных линий, мы будем различать два типа нормальных поверхностей: открытые и замкнутые (рис. 2,  $\partial$ ). Первый тип поверхностей ограничен краевой линией  $L^m$  – ориентированной кривой, направление которой выбирается таким образом, чтобы поле  $\mathbf{M}$  подчинялось правилу правой руки. Очевидно, что нормальные поверхности позволяют наглядно представить векторное поле  $\mathbf{M}$ . Более того, с их помощью можно охарактеризовать поведение его модуля  $M$ . С этой целью рассмотрим нормальные поверхности, проведенные через элемент  $dl^m$ . Число этих поверхностей пропорционально полю  $\mathbf{M}$ :

$$dN = \beta M dl^m, \quad (35)$$

как это показано на рис. 2,  $e$ .

Здесь следует сделать два замечания:

а) подобно тому, как концевые точки векторных линий показывали распределение источников, краевые линии  $L^m$  нормальных поверхностей представляют собой геометрическую модель вихрей;

б) несмотря на то, что нормальные поверхности  $S^m$  можно ввести только для определенного класса векторных полей, их, тем не менее, очень удобно использовать.

# **10. ЧИСЛО НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ОРИЕНТИРОВАННУЮ КРИВУЮ**

Введем, как и в случае векторных линий, правило, позволяющее вычислять число нормальных поверхностей, пересекающих произвольный элемент кривой  $d\mathbf{l}$ . Это правило очень простое. Если угол между  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{M}$  не превышает  $\pi/2$ , то пересечение считается положительным. В противном случае, когда этот угол больше, чем  $\pi/2$ , пересечение является отрицательным (рис. 3, *a*). Если ориентированная кривая  $l$  имеет конечную длину, то полное число нормальных поверхностей, пересекающих данную кривую (рис. 3, *б*), равняется разности положительных и отрицательных пересечений. Рассмотрим наиболее важный случай, когда кривая  $l$  замкнута. Предположим сначала, что краевые линии  $L^m$  не пересекают поверхность, ограниченную кривой  $l$  (рис. 3, *в*). В этом случае число пересечений  $N$  нормальных поверхностей также равняется нулю. Действительно, каждая из нормальных поверхностей  $S^m$  имеет два пересечения с кривой  $l$ , одно из которых является положительным, а другое – отрицательным. Таким образом, полное число пересечений  $N$  равняется нулю. Другой случай показан на рис. 3, *г*. Две нормальные поверхности пересекают кривую  $l$ , однако их пересечения имеют противоположные знаки, так что полное число пересечений  $N$  по-прежнему равно нулю. Из рисунка также видно, что две краевые линии  $L^m$  пересекают поверхность  $S$  в противоположных направлениях. Следовательно, число таких линий, пересекающих поверхность  $S$ , ограниченную кривой  $l$ , также равно нулю. Очевидно, что в общем случае, показанном на рис. 3, *д*, полное число пересечений нормальных поверхностей с замкнутой кривой равняется

$$N = L^m_+ - L^m_-.$$

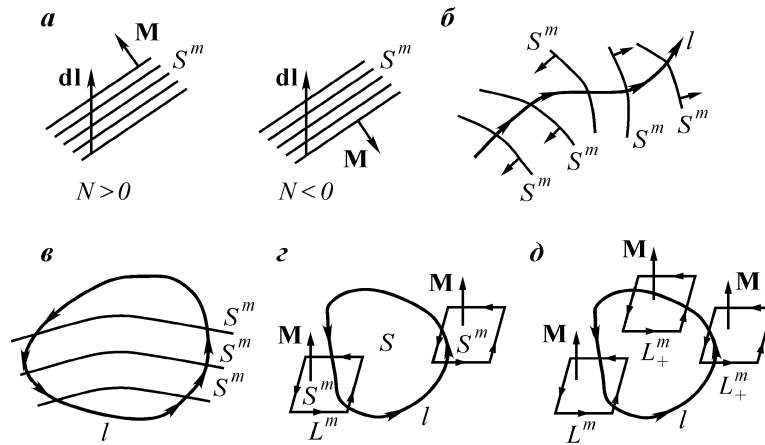


Рис. 3. Нормальные поверхности и их краевые линии

Здесь  $L_+^m$  и  $L_-^m$  – полное число положительных и отрицательных пересечений краевых линий нормальных поверхностей с поверхностью  $S$ .

## 11. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Введем еще одно фундаментальное понятие векторного анализа, а именно циркуляцию векторного поля. Рассмотрим сначала скалярное произведение

$$dV = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = M dl \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}). \quad (37)$$

По определению,  $dV$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Поскольку кривую  $l$  можно представить в виде суперпозиции элементарных перемещений, имеем

$$V = \int \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (38)$$

В частности, для замкнутой кривой это выражение дает

$$V = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (39)$$

Для того чтобы понять смысл последнего интеграла, мы свяжем функцию  $V$  с числом пересечений пути  $l$  нормальными поверхностями. С этой целью рассмотрим несколько случаев. Прежде всего, из формул (35) и (37) для элемента дуги  $dl^m$  получим

$$dN = \beta dV$$

или

$$dV = \frac{dN}{\beta}, \quad (40)$$

где  $dN$  и  $dV$  – положительные, поскольку направления векторов  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{M}$  совпадают (рис. 4,  $a$ ).

Предположим теперь, что ориентация элемента  $d\mathbf{l}$  относительно поля  $\mathbf{M}$  является произвольной. Поскольку его проекция  $dl^m$  на направление поля  $\mathbf{M}$  пересекает одинаковое число  $dN$  нормальных поверхностей, мы имеем

$$dN = \beta M dl^m = \beta M dl \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}),$$

т.е.

$$dN = \beta \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \beta dV$$

или

$$dV = \frac{dN}{\beta}. \quad (41)$$

В отличие от предыдущего случая (см. рис. 4, а), здесь  $dV$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Поскольку произвольную кривую  $l$  можно представить в виде суммы элементарных перемещений  $d\mathbf{l}$ , полное число пересечений равняется

$$N = \beta \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{или} \quad V = \frac{N}{\beta}. \quad (42)$$

Таким образом, во всех перечисленных выше случаях функция  $V$  выражается через положительные и отрицательные пересечения нормальных поверхностей  $S^m$ . Если кривая – замкнутая, что для нас является наиболее важным случаем, то в соответствии с формулой (36) мы имеем

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\beta} (L_+^m - L_-^m) = \frac{L^m}{\beta}. \quad (43)$$

Таким образом, мы приходим к основополагающему результату, состоящему в том, что циркуляция векторного поля

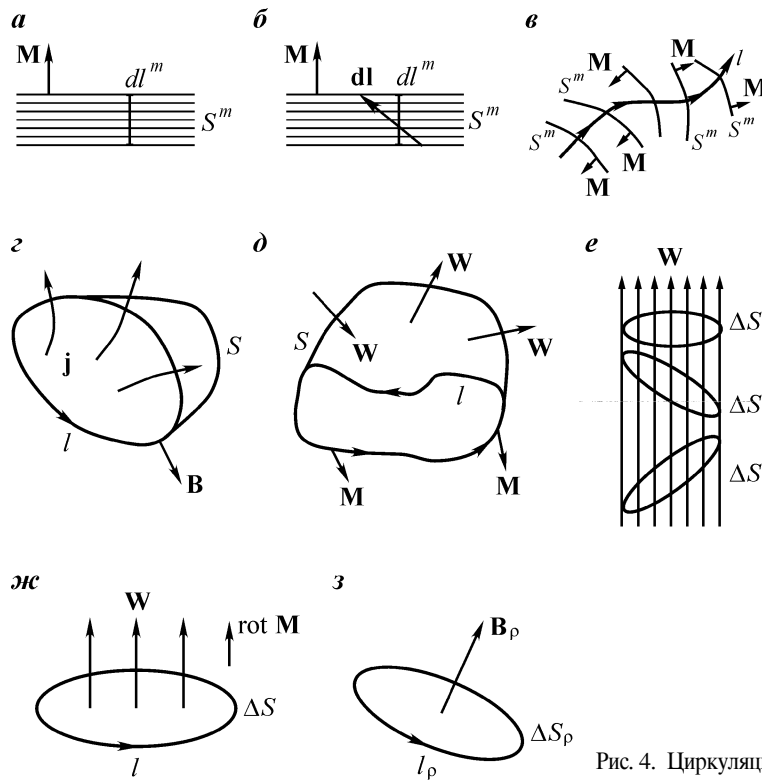


Рис. 4. Циркуляция и ротор

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

характеризует число тех краевых линий нормальных поверхностей, которые пересекают поверхность, ограниченную контуром интегрирования  $l$ . Как уже отмечалось ранее, линии обрыва  $L^m$  являются геометрической моделью вихрей, и именно поэтому формула (43) имеет такое важное значение. Например, из законов физики известно, что циркуляция гравитационного и электрического полей равна нулю:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Такое поведение легко объяснимо, поскольку единственными генераторами этих полей являются массы и заряды.

С другой стороны, в случае магнитного поля  $\mathbf{B}$ , порожденного токами проводимости, мы имеем

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (44)$$

где  $I$  – ток через произвольную поверхность  $S$ , ограниченную кривой  $l$  (рис. 4, з).

По определению, ток является потоком вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ :

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

и, соответственно,

$$I = \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (45)$$

Существенно, что векторные линии поля  $\mathbf{j}$ , а также краевые линии  $L^m$  являются замкнутыми, и это поле характеризует распределение вихрей. Другой пример ненулевой циркуляции – это электромагнитная индукция. Из закона Фарадея следует, что

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (46)$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (47)$$

а  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  – вектор плотности вихрей, порождающих электрический ток.

Таким образом, в обоих примерах циркуляция определяется потоком вектора плотности вихрей. Сравнение выражения (43) с формулами (45) и (47) позволяет переписать последнее равенство в следующем виде :

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = k_2 \oint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S}. \quad (48)$$

Здесь  $k_2$  – постоянная,  $W$  – плотность вихрей поля  $\mathbf{M}$  (рис. 4,  $\partial$ ).

Соотношение (48) связывает поле  $\mathbf{M}$  и его генераторы – вихри. Оно представляет собой второе фундаментальное соотношение теории поля.

## 12. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Циркуляция имеет те же недостатки, что и поток через замкнутую поверхность, а именно, она не описывает в общем случае распределение вихрей. Чтобы найти вектор плотности вихрей  $\mathbf{W}$ , рассмотрим малую замкнутую кривую  $l$ , лежащую в некоторой плоскости, и предположим, что распределение этого вектора на поверхности  $\Delta S$ , ограниченной контуром  $l$ , является равномерным. Как видно из рис. 4,  $e$ , поток вектора  $\mathbf{W}$  и, следовательно, циркуляция

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

существенно зависят от ориентации поверхности  $\Delta S$ . Пусть  $\Delta S$  находится в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{W}$  (рис. 4,  $ж$ ). Тогда из формулы (48) следует, что

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = k_2 W \Delta S$$

или

$$\frac{\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = k_2 W. \quad (49)$$

Вектор

$$\text{rot } \mathbf{M} = \frac{\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{n} = k_2 W \mathbf{n} \quad (50)$$

называется ротором векторного поля  $\mathbf{M}$ , и

$$\mathbf{W} = W \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, перпендикулярный поверхности  $\Delta S$ .

По определению, модуль  $\text{rot } \mathbf{M}$  равняется, с точностью до константы, плотности вихрей  $W$ , а его направление совпадает с направлением вихря. Следует заметить, что направления векторов  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{W}$  подчиняются правилу правой руки. В тех точках, где вихри отсутствуют,

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0. \quad (51)$$

В частности, последнее равенство выполняется везде в случае электрического

и гравитационного полей, а также в случае поля смещения частиц, связанного с акустическими волнами в однородной среде.

### 13. ВЫРАЖЕНИЕ РОТОРА ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ

Как и в случае дивергенции, интегрирование в формуле (50) удобно заменить дифференцированием. С этой целью введем вектор  $\mathbf{C}$  таким образом, чтобы его компонента вдоль любого направления  $\rho$  (рис. 4, з) определялась как

$$C_\rho = \frac{\oint_{l_\rho} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_\rho}. \quad (52)$$

Из равенства (48) следует, что каждая из компонент вектора  $\mathbf{C}$  прямо пропорциональна потоку вихрей через соответствующую элементарную поверхность. Следовательно, максимальное значение указанной компоненты наблюдается, когда направление  $\rho$  совпадает с направлением вихрей, т.е.

$$C_\rho = \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{n}. \quad (53)$$

Другими словами, выражения (50) и (52) описывают один и тот же вектор, и это дает нам возможность найти компоненты  $\text{rot } \mathbf{M}$  вдоль координатных линий (рис. 5, а). Рассмотрим сначала кривую, лежащую в координатной плоскости  $S_1$ . Выполняя интегрирование, получим

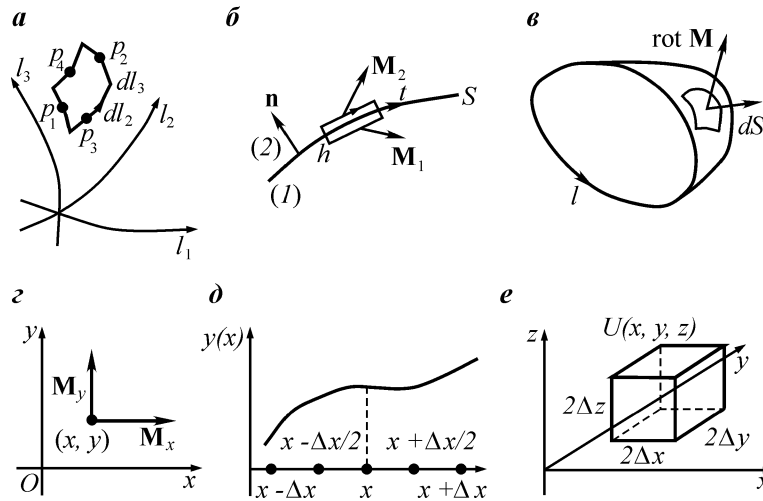


Рис. 5. Лапласиан и ротор



$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} &= \mathbf{M}(p_2) \cdot d\mathbf{l}_3(p_2) + \mathbf{M}(p_1) \cdot d\mathbf{l}_3(p_1) + \mathbf{M}(p_4) \cdot d\mathbf{l}_2(p_4) + \\
&+ \mathbf{M}(p_3) \cdot d\mathbf{l}_2(p_3) = M_3(p_2) dl_3(p_2) - M_3(p_1) dl_3(p_1) - M_2(p_4) dl_2(p_4) + \\
&+ M_2(p_3) dl_2(p_3).
\end{aligned} \tag{54}$$

Поскольку длины  $dl_2$  и  $dl_3$  малы, можно предположить, что компоненты поля и перемещения меняются линейно. Тогда соотношение (54) переписывается как

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial(M_3 dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(M_2 dl_2)}{\partial l_3} dl_3$$

или

$$\text{rot}_1 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_2 dl_3} \left[ \frac{\partial(M_3 dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(M_2 dl_2)}{\partial l_3} dl_3 \right]. \tag{55}$$

Аналогично, интегрирование вдоль элементарных замкнутых кривых, лежащих в координатных плоскостях  $S_2$  и  $S_3$  дает

$$\text{rot}_2 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_3} \left[ \frac{\partial(M_1 dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(M_3 dl_3)}{\partial l_1} dl_1 \right] \tag{56}$$

и

$$\text{rot}_3 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_2} \left[ \frac{\partial(M_2 dl_2)}{\partial l_1} dl_1 - \frac{\partial(M_1 dl_1)}{\partial l_2} dl_2 \right]. \tag{57}$$

Легко проверить, что последние три равенства эквивалентны следующему выражению:

$$\text{rot } \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 M_1 & h_2 M_2 & h_3 M_3 \end{vmatrix}, \tag{58}$$

которое характеризует распределение вихрей в регулярных точках волнового поля, где его компоненты являются непрерывными функциями.

Ниже приводятся выражения компонент  $\text{rot } \mathbf{M}$  в простейших системах координат.

#### Декартова прямоугольная система координат

$$\text{rot}_x \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z},$$

$$\text{rot}_y \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \quad (59)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{M} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}.$$

#### Цилиндрическая система координат

$$\text{rot}_r \mathbf{M} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r M_\varphi)}{\partial z} \right],$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{M} = \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}, \quad (60)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{M} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r M_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \right].$$

#### Сферическая система координат

$$\text{rot}_R \mathbf{M} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial (R \sin \theta M_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (R M_\theta)}{\partial \varphi} \right],$$

$$\text{rot}_\theta \mathbf{M} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial M_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial (R \sin \theta M_\varphi)}{\partial R} \right], \quad (61)$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{M} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial (r M_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial M_R}{\partial \theta} \right].$$

Ротор векторного поля описывает распределение вихрей и так же, как  $\text{grad } T$  и  $\text{div } \mathbf{M}$ , инвариантен к замене координат.

#### 14. ПОВЕРХНОСТНЫЙ АНАЛОГ $\text{rot } \mathbf{M}$

Как мы знаем, соотношение (58) можно использовать только в регулярных точках. Найдем теперь соотношение между полем  $\mathbf{M}$  и вихрями  $\mathbf{W}_S$ , распределенными на поверхности  $S$ . Применяя формулу (48) к кривой  $l$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{W}_S$  (рис. 5, б), получим

$$\mathbf{M}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 + \mathbf{M}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = k_2 W_S dl$$

или

$$M_{2t} - M_{1t} = k_2 W_S, \quad (62)$$

поскольку

$$d\mathbf{l}_2 = -d\mathbf{l}_1$$

и расстояние  $h$  между двумя сторонами поверхности стремится к нулю.

Здесь  $M_{1t}$  и  $M_{2t}$  – тангенциальные компоненты поля на разных сторонах поверхности.

Соотношение (62) можно записать как

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = k_2 \mathbf{W}_S, \quad (63)$$

откуда видно, что разность тангенциальных компонент определяет плотность и направление вихрей на поверхности. Например, в случае поверхностных токов  $\mathbf{i}$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \mathbf{i}.$$

Таким образом, мы получили три вида соотношений, связывающих поле  $\mathbf{M}$  и его источники – вихри:

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = k_2 \oint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{rot } \mathbf{M} = k_2 \mathbf{W},$$

и

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = k_2 \mathbf{W}_S. \quad (64)$$

## 15. ФОРМУЛА СТОКСА

Рассмотрим произвольную замкнутую кривую  $l$  и поверхность  $S$ , ограниченную этой кривой (рис. 5, в).

Из формулы (50) следует, что скалярное произведение

$$\text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$$

задает поток вектора плотности вихрей  $\mathbf{W}$  через элементарную площадку  $d\mathbf{S}$ . С точностью до постоянной  $k_2$  поток через поверхность  $S$  определяется как

$$\int_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}.$$

С другой стороны, этот же поток можно выразить через циркуляцию (см. формулу 48) поля. Отсюда получим

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (65)$$

Это соотношение представляет собой известную формулу Стокса, связывающую значения поля  $\mathbf{M}$  вдоль замкнутой кривой  $l$  с его значениями на поверхности  $S$ . Формулу Гаусса – Остроградского и формулу Стокса можно рассматривать как соотношения, связывающие поле и его генераторы: источники и вихри.

В качестве иллюстрации формулы Стокса рассмотрим поле  $\mathbf{M}$  на плоскости XOY (рис. 5, z), где

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}, \quad dS = dx dy$$

и

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}.$$

Предполагая, что

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} = \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0,$$

мы вместо равенства (65) получим

$$\oint_1 (M_x dx + M_y dy) = \int_S \left( \frac{\partial M_y}{\partial z} - \frac{\partial M_x}{\partial z} \right) dS. \quad (66)$$

В дальнейшем используем это соотношение для того, чтобы продемонстрировать некоторые замечательные свойства комплексной переменной.

## 16. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Согласно формулам (33) и (64), существует два основополагающих соотношения, связывающих поле  $\mathbf{M}$  и его генераторы:

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q, \quad \text{div } \mathbf{M} = k_1 \delta, \quad M_{2n} - M_{1n} = k_1 \Sigma$$

(67)

и

$$\oint_1 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = k_2 \oint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{rot } \mathbf{M} = k_2 \mathbf{W}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = k_2 \mathbf{W}_S.$$

Если поле известно, то данные соотношения можно использовать для нахождения генераторов этого поля. И наоборот, если поле неизвестно, то соотношения (67) представляют собой систему уравнений, в результате решения которой это поле можно будет найти.

Например, в регулярных точках

$$\text{rot } \mathbf{M} = k_2 \mathbf{W}, \quad \text{div } \mathbf{M} = k_1 \delta. \quad (68)$$

Следующие примеры физических полей являются конкретными примерами данной системы.

### Гравитационное поле

$$\text{rot } \mathbf{g} = 0, \quad \text{div } \mathbf{g} = -4 \pi \gamma \delta.$$

### Электрическое поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta}{\varepsilon_0}.$$

### Магнитное поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

### Электромагнитное поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j}_c + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Эти примеры ясно показывают, что существуют следующие три типа векторных полей:

а) поле источников, для которых

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = k_1 \delta. \quad (69)$$

Это поле порождается только источниками;

б) вихревое поле:

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = k_2 \mathbf{W}, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0 \quad (70)$$

По определению, это поле не имеет источников;

в) поле  $\mathbf{M}$ , порожденное генераторами обоих типов. Такое поле подчиняется уравнениям (68).

Покажем теперь, что произвольное поле  $\mathbf{M}$  можно представить в виде суммы трех полей. Действительно, можно записать

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3, \quad (71)$$

где поля  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  удовлетворяют соответственно уравнениям (69) и (70), а поле  $\mathbf{M}_3$  вообще не имеет генераторов, т.е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}_3 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M}_3 = 0.$$

Поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{M}_1 + \operatorname{div} \mathbf{M}_2 + \operatorname{div} \mathbf{M}_3 = \operatorname{div} (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3)$$

и

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{M}_2 + \operatorname{rot} \mathbf{M}_3 = \operatorname{rot} (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3),$$

поле  $\mathbf{M}$  является решением уравнения (68). Равенство (71) составляет сущность теоремы Гельмгольца, играющей важную роль при изучении различ-

ных векторных полей. Следует заметить, что в общем случае поля  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  и  $\mathbf{M}_3$  связаны друг с другом.

## 17. СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ

Система уравнений (68) состоит из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и, в принципе, позволяет найти три компоненты векторного поля и его генераторы. Конечно, решить такую систему очень сложно. Чтобы упростить эту задачу, введем понятие потенциала. Рассмотрим сначала поле источников, которое подчиняется равенствам (69). Из первого уравнения этой системы следует, что

$$\mathbf{M} = \text{grad } U$$

или

(72)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{i}_3,$$

где  $U$  – произвольная функция, имеющая первую производную. Из определения (58) видно, что всегда выполняется следующее равенство:

$$\text{rot grad } U = 0$$

или

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0. \quad (73)$$

Кроме того, вместо формулы (72) можно записать

$$\mathbf{M} = -\text{grad } U. \quad (74)$$

Таким образом, мы показали, что произвольное поле источников  $\mathbf{M}$  можно представить через скалярную функцию  $U$ . Этот результат имеет очень большое практическое значение, поскольку скалярное поле всегда легче изучать, чем векторное. Функцию  $U$  обычно называют скалярным потенциалом векторного поля  $\mathbf{M}$ . Поскольку существует бесконечное число функций  $U$ , характеризующих одно и то же векторное поле  $\mathbf{M}$  (эти функции могут отличаться друг от друга, например, некоторой постоянной), скалярный потенциал вряд ли имеет какой-то физический смысл.

Для того чтобы описать поведение потенциала, подставим равенство (72) во второе уравнение (69). Это дает следующий результат:

$$\text{div grad } U = k_1 \delta$$

или

$$\nabla^2 U = \Delta U = k_1 \delta. \quad (75)$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (75) называется лапласианом потенциала  $U$ . С учетом соотношений (27) и (72) имеем

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] = k_1 \delta. \quad (76)$$

Таким образом, вместо системы уравнений (69) мы получили дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно потенциала  $U$ . Поскольку лапласиан характеризует плотность источников, он инвариантен относительно замены координат.

Рассмотрим далее вихревое поле, описываемое системой уравнений (70). Из второго уравнения этой системы:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$$

следует, что

$$\mathbf{M} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (77)$$

Используя соотношения (27) и (58) легко убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (78)$$

Как и в случае скалярного потенциала, существует бесконечное число векторных функций  $\mathbf{A}$ , описывающих одно и то же поле  $\mathbf{M}$ . Например, такие функции могут отличаться друг от друга только градиентом некоторой функции:  $\operatorname{grad} \varphi$ . Чтобы получить уравнение для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , подставим выражение (77) в первое из уравнений (70). Это дает

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = k_2 \mathbf{W}. \quad (79)$$

Воспользуемся теперь соотношением

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

которое можно проверить, проанализировав каждую из компонент в левой и правой части.

Тогда вместо равенства (79) мы приходим к выражению

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = k_2 \mathbf{W}. \quad (80)$$

Поскольку существует бесконечное количество функций  $\mathbf{A}$ , описывающих одно и то же поле  $\mathbf{M}$ , выберем среди них ту, которая удовлетворяет равенству

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (81)$$

Уравнение (80) тогда заметно упрощается, и мы получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -k_2 \mathbf{W}. \quad (82)$$

Таким образом, мы выразили поля источников и вихрей через скалярный и векторный потенциалы:

$$\mathbf{M}_1 = \text{grad } U \text{ и } \mathbf{M}_2 = \text{rot } \mathbf{A}.$$

В общем случае векторное поле (71), вызванное источниками и вихрями, можно представить как

$$\mathbf{M} = \text{grad } U + \text{rot } \mathbf{A}. \quad (83)$$

Это равенство представляет собой другую форму теоремы Гельмгольца. Что касается поля  $\mathbf{M}_3$  из формулы (71), то его можно выразить как через скалярный, так и через векторный потенциал. Таким образом, информация об этом поле уже содержится в выражении (83).

## 18. ЛАПЛАСИАН И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Мы видели, что скалярный потенциал, описывающий поля источников, удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U = \Delta U = \text{div grad } U = k_1 \delta.$$

Хотя с физической точки зрения очевидно, что лапласиан определяет плотность источников, полезно также обсудить его математический смысл. Для этого обратимся к уравнению (76) и запишем его в декартовой системе координат.

Полагая  $h_1 = h_2 = h_3$ , получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = k_1 \delta. \quad (84)$$

Рассмотрим сначала функцию  $y(x)$  и выразим ее первую и вторую производные через значения самой функции. Как видно из рис. 5,  $\partial$ , первую производную можно записать как

$$y' \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{1}{\Delta x} [y(x + \Delta x) - y(x)],$$

и

$$y' \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{1}{\Delta x} [y(x) - y(x - \Delta x)].$$

Следовательно, вторая производная в точке  $x$  определяется выражением

$$y''(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x) - 2y(x)]$$

или



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2}{(\Delta x)^2} [y^{av}(x) - y(x)], \quad (85)$$

где

$$y^{av}(x) = \frac{y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x)}{2}$$

является средним значением функции в окрестности точки  $x$ .

Пусть

$$\partial^2 y / \partial x^2 = 0.$$

Это означает, что функция  $y(x)$  в окрестности точки  $x$  ведет себя линейным образом. Линейные функции представляют собой простейший класс функций  $y(x)$ . Соответственно, вторую производную  $\partial^2 y / \partial x^2$  можно трактовать как меру отклонения функции от ее линейного поведения в окрестности некоторой точки.

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (84). Из рис. 5, *e* следует, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [U(x + \Delta x, y, z) + U(x - \Delta x, y, z) - 2U(p)],$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2} [U(x, y + \Delta y, z) + U(x, y - \Delta y, z) - 2U(p)],$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{(\Delta z)^2} [U(x, y, z + \Delta z) + U(x, y, z - \Delta z) - 2U(p)].$$

Полагая

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = h,$$

получим

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2} \left[ \sum_{i=1}^6 U_i - 6U(p) \right]$$

или

$$\nabla^2 U = \frac{6}{h^2} [U^{av}(p) - U(p)]. \quad (86)$$

Здесь точка  $p$  является центром куба,  $U_i$  – значения потенциала на разных сторонах данного объема, а  $U^{av}(p)$  – среднее значение потенциала.

Таким образом, если потенциал в точке  $p$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = 0,$$

то его значение в этой точке совпадает со средним:

$$U^{av}(p) = U(p). \quad (87)$$

Функции, подчиняющиеся этому условию, называются гармоническими. По существу они представляют собой обобщение линейных функций на двух- и трехмерный случай. Таким образом, значение лапласиана  $\nabla^2 U$  характеризует отклонение потенциала от гармонической функции.

19. Согласно равенствам (75) операцию

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U$$

можно записать как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U.$$

Здесь  $\nabla$  – оператор, имеющий следующий вид:

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{i}_3.$$

Соответственно,

$$\operatorname{grad} U = \nabla U, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = \nabla \cdot \mathbf{M},$$

(89)

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{M}, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 = \Delta.$$

20. Получим еще два полезных соотношения, используя формулу Гаусса – Остроградского:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{M} dV = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (90)$$

Полагая

$$\mathbf{M} = \nabla U,$$

получим первую формулу Грина:

$$\int_V \nabla^2 U dV = \oint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS. \quad (91)$$

Предположим, что

$$\mathbf{M} = \varphi \nabla U - U \nabla \varphi.$$

Подстановка этого выражения в равенство (90) дает вторую формулу Грина

$$\int_V (\varphi \nabla^2 U - U \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS, \quad (92)$$

так как

$$\nabla(\varphi \nabla U - U \nabla \varphi) = \varphi \nabla^2 U + \nabla \varphi \cdot \nabla U - U \nabla^2 \varphi - \nabla U \cdot \nabla \varphi = \varphi \nabla^2 U - U \nabla^2 \varphi.$$

21. В заключение приведем несколько полезных формул для вычисления производных от различных произведений:

$$\nabla(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1\nabla\varphi_2 + \varphi_2\nabla\varphi_1,$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi,$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla \varphi \times \mathbf{a}),$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

#### ВВЕДЕНИЕ

В течение долгого времени использовались только положительные и отрицательные действительные числа, которые подразделяются на целые и дробные. Последние, в свою очередь, могут быть рациональными и иррациональными. Все эти числа характеризуются абсолютной величиной и знаком, и их можно представить как точки на прямой, например, на оси  $x$  (рис. 1). При этом расстояние от нуля до некоторой точки равняется абсолютной величине соответствующего числа.

Затем появились математические задачи, в которых потребовалось ввести другие, не действительные числа. По определению действительного числа  $x$  его квадрат всегда является числом положительным:  $x^2 > 0$ . Следовательно, алгебраическое уравнение

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

не может иметь действительных корней, поскольку

$$x^2 = -1. \quad (2)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, ввели новое число, которое называется мнимой единицей  $i$ . Как следует из уравнения (2),

$$x = \sqrt{-1} = i. \quad (3)$$

Основное свойство этого числа состоит в том, что его квадрат равен минус единице:

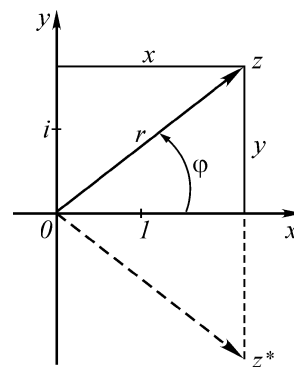


Рис. 1. Комплексная плоскость

$$i^2 = -1. \quad (4)$$

Соответственно,

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i$$

и т.д.

Естественным обобщением этого числа является произведение действительного числа  $y$  на мнимую единицу  $i$ , дающее чисто мнимое число

$$y i, \quad (5)$$

которое удобно наносить вдоль оси  $y$  (см. рис. 1).

Четыре простейшие операции над мнимыми числами, а именно суммирование, вычитание, умножение и деление выполняются точно так же, как и с действительными числами, но с учетом равенства (4).

### 1. КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО И ЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА

Следующий шаг – это введение комплексного числа, которое является суммой двух чисел, действительного и мнимого:

$$z = x + iy. \quad (6)$$

Здесь  $x$  и  $y$  называются действительной и мнимой частью комплексного числа и записываются как

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (7)$$

Они изменяются в следующих пределах:

$$-\infty < x < \infty \quad \text{и} \quad -\infty < y < \infty.$$

Равенство (6) задает комплексное число в алгебраической форме. Число  $z$  удобно изображать как точку на плоскости, показанной на рис. 1. Эту плоскость обычно называют комплексной плоскостью.

Рассмотрим теперь основные операции над комплексными числами, представленными в алгебраической форме. Суммирование и вычитание двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

выполняется следующим образом:

$$z_3 = z_2 \pm z_1 = (x_2 \pm x_1) + i(y_2 \pm y_1), \quad (8)$$

т.е. указанные операции производятся отдельно для действительных и мнимых частей.

Операция умножения записывается как

$$z_3 = z_2 z_1 = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) = x_2 x_1 + i^2 y_2 y_1 + i(x_2 y_1 + y_2 x_1),$$

или  $z_3 = x_3 + iy_3$ ,

где

$$x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad y_3 = x_2 y_1 + x_1 y_2. \quad (9)$$

Прежде чем рассмотреть частное двух комплексных чисел, полезно ввести число

$$z^* = x - iy, \quad (10)$$

комплексно сопряженное числу

$$z = x + iy.$$

Таким образом, действительные части чисел  $z$  и  $z^*$  совпадают, а мнимые части различаются знаком. Взаимное расположение  $z$  и  $z^*$  показано на рис. 1. Из равенств (9) следует, что произведение  $z$  и  $z^*$  является действительным числом. Действительно, перемножая эти числа, получим

$$zz^* = x^2 + y^2. \quad (11)$$

Последнее равенство позволяет нам определить операцию деления двух комплексных чисел:

$$z_3 = z_2/z_1.$$

Это отношение можно представить как

$$z_3 = \frac{z_2 z_1^*}{z_1 z_1^*}$$

или

$$z_3 = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Следовательно,

$$x_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (12)$$

Заметим, что два комплексных числа равны

$$z_1 = z_2,$$

если равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = y_2.$$

Однако в отличие от действительных чисел, неравенства

$$z_2 > z_1 \quad \text{или} \quad z_2 < z_1$$

не имеют никакого смысла.

## 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Для того чтобы определить степень и корень из комплексного числа, представим его в другой форме. Из рис. 1 видно, что положение числа на комплексной плоскости можно определить параметрами  $r$  и  $\varphi$ . Здесь  $r$  явля-

ется расстоянием от начала координат до точки и называется модулем комплексного числа. Второй параметр,  $\varphi$ , называется аргументом комплексного числа, и это угол между действительной осью  $x$  и радиусом  $r$ . Оба параметра изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq r < \infty \text{ и } 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (13)$$

Предполагается, что модуль  $r$  – всегда число положительное. Если точка, описывающая комплексное число, движется против часовой стрелки, ее аргумент увеличивается. В частности, аргументы всех положительных мнимых чисел равны  $\pi/2$ , а для отрицательных мнимых чисел  $\varphi = \pi$ .

Из приведенного на рис. 1 треугольника следует, что

$$x = r \cos \varphi \text{ и } y = r \sin \varphi. \quad (14)$$

Соответственно, формулу (6) можно переписать как

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (15)$$

Последнее выражение задает тригонометрическую форму комплексного числа. Очевидно, что равенства (14) устанавливают связь между алгебраической и тригонометрической формами. Операции суммирования и вычитания для обеих форм выполняются одинаковым образом.

Рассмотрим теперь как записывается произведение комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

В этом случае имеем

$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1) + \\ + i(\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)]$$

или

$$z_3 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_2 + \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 + \varphi_1)], \quad (16)$$

так как

$$\sin(\varphi_2 \pm \varphi_1) = \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

и

$$\cos(\varphi_2 \pm \varphi_1) = \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \mp \sin \varphi_2 \sin \varphi_1.$$

Таким образом, в соответствии с (16)

$$r_3 = r_1 r_2 \text{ и } \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (17)$$

Следовательно, тригонометрическая форма очень удобна для выполнения операции умножения. Аналогично, произведение нескольких комплексных чисел запишется как

$$z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где

$$r = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n \text{ и } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n. \quad (18)$$

Деление двух комплексных чисел приводит к следующему выражению:

$$z_3 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}$$

или

$$z_3 = \frac{r_2}{r_1} (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1),$$

так как

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) = 1.$$

Поэтому мы получаем

$$z_3 = \frac{r_2}{r_1} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

или

$$z_3 = \frac{r_2}{r_1} \text{ и } \varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (19)$$

откуда видны преимущества данной формы комплексного числа.

Рассмотрим теперь степень комплексного числа

$$W = z^n. \quad (20)$$

Здесь

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и

$$W = R(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Из выражений (18) следует, что

$$R = r^n \text{ и } \theta = n \varphi. \quad (21)$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить степень комплексного числа, нужно найти степень его модуля  $r^n$ , а аргумент  $\varphi$  умножить на  $n$ .

В частности, если  $r = 1$ , равенство (20) записывается как

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi. \quad (22)$$

Последнее соотношение – это хорошо известная формула Муавра, которая позволяет заметно упростить вычисление произведения комплексных чисел, а также применяется для многих других целей. Полагая, например,  $n = 2$ , получим



$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Определим теперь операцию взятия корня из комплексного числа:

$$W = z^{\frac{1}{n}}. \quad (23)$$

Здесь  $n$  – целое число, и

$$W = R(\cos \theta + i \sin \theta), \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

По определению, вместо выражения (23) можно записать

$$W^n = z,$$

$$R^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Используя формулу Муавра, получим

$$R^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r[(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k))]. \quad (24)$$

Аргумент  $\varphi$  в правой части этого выражения заменен на  $\varphi + 2\pi k$ . Это можно сделать, поскольку  $k$  является целым числом.

Из равенства двух комплексных величин следует, что

$$R^n = r \quad \text{или} \quad R = r^{\frac{1}{n}} \quad (25)$$

и

$$\theta_n = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

где

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Следовательно, равенства (25) позволяют вычислить  $n$  корней комплексного числа. Следует заметить, что, полагая  $k = n$ , мы снова получаем корень, соответствующий  $k = 0$ .

### 3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Для того чтобы получить третью форму комплексного числа, воспользуемся разложением в ряд Тейлора функций

$$\sin x, \quad \cos x, \quad e^z,$$

где  $x$  – действительное, а  $z$  – комплексное число.

Как известно, указанные разложения имеют следующий вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad (26)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

и

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Полагая  $z = ix$ , последнее разложение можно записать как

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

или

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right). \quad (27)$$

Сравнение формул (26) и (27) показывает, что

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (28)$$

Это замечательное соотношение, полученное Эйлером, имеет многочисленные приложения. Из него следует, например, что

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad (29)$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i2\pi} = 1 \text{ или } e^{i2\pi n} = 1, \quad (30)$$

где  $n$  – целое число.

Из выражений (15) и (28) мы приходим к экспоненциальной форме комплексного числа

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (31)$$

Эта форма представления удобна для выполнения операций умножения и деления, а также для возведения комплексных чисел в степень и для нахождения их корней. Кроме того, из выражения (31) мы имеем

$$\ln z = \ln r + i\varphi. \quad (32)$$

Таким образом, действительная часть  $\ln z$  равняется логарифму модуля  $z$ , а мнимая часть совпадает с аргументом (фазой)  $\varphi$  этого числа.

Другое важное применение экспоненциальной формы комплексных чисел связано с представлением синусоидальных функций. Рассмотрим в качестве иллюстрации функцию времени

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (33)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\varphi$  – начальная фаза. Оба этих параметра не зависят от времени, но могут быть функциями от точки наблюдения.

Согласно определению (28),

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{\pm ix}.$$

Следовательно,

$$s(t) = A \operatorname{Re} e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

или

$$s(t) = A \operatorname{Re} e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}, \quad (34)$$

так как  $A$  – действительное число.

Формулу (34) можно также записать как

$$s(t) = A \operatorname{Re} e^{j\varphi} e^{j\omega t}. \quad (35)$$

Вводя обозначение

$$\check{A} = A e^{-j\varphi}, \quad (36)$$

мы вместо (34) получим следующее выражение:

$$s(t) = \operatorname{Re} \check{A} e^{-j\omega t}, \quad (37)$$

где функция  $\check{A}$  называется комплексной амплитудой. Она содержит информацию об амплитуде и начальной фазе синусоидальной функции. Представление (37) бывает очень полезным при решении дифференциальных уравнений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

### ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Рассмотрим уравнения, которые можно представить в следующем виде:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f_1(t). \quad (1)$$

Здесь  $a_n$  – некоторые действительные постоянные коэффициенты,  $t$  – аргумент, например время наблюдения.

Уравнение (1) обычно описывает поведение линейной системы, схематически показанной на рис. 1 в виде прямоугольника. Соответственно, функцию  $f(t)$  можно интерпретировать как входное воздействие на систему, а функцию  $x(t)$  – как реакцию системы на это воздействие, т.е. выход. Следует заметить, что реальные системы, такие как упругая или акустическая среда, а также механические и электрические устройства довольно часто ведут себя как линейные системы.

Из уравнения (1) следуют два важных свойства линейных систем. По определению, функция  $x(t)$  является решением этого уравнения. Далее, очевидно, что если в уравнении (1) функцию  $f(t)$  заменить на  $mf(t)$ , где  $m$  есть некоторый постоянный коэффициент, то решением этого уравнения будет  $mx(t)$ . Другими словами, если вход в систему увеличить в  $m$  раз, то во столько же раз увеличится и выход. Предположим, что существуют функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$a_n \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + \dots + a_0 x_1(t) = f_1(t)$$

и

$$a_n \frac{d^n x_2(t)}{dt^n} + \dots + a_0 x_2(t) = f_2(t).$$

Суммируя эти уравнения и учитывая, что

$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + \frac{d^n x_2(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n} (x_1 + x_2),$$

получим

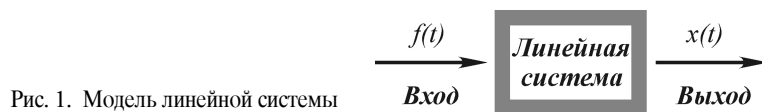


Рис. 1. Модель линейной системы

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad (2)$$

где

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (3)$$

Очевидно, что этот результат можно обобщить на произвольное число функций  $f_i(t)$ . Это означает, что выход системы, вызванный суммой входов  $f_i(t)$ , является суммой соответствующих выходов, т.е. если

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t),$$

то

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t). \quad (4)$$

Как отмечалось ранее, этот результат является очень важным свойством линейных систем. Прежде чем использовать выражение (4), рассмотрим однородное уравнение.

2. Полагая в (1)  $f(t) = 0$ , получим

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = 0. \quad (5)$$

Равенство (5) обычно описывает реакцию линейной системы (например, смещение масс или ток в электрической цепи) после окончания действия функции  $f(t)$ .

Решение этого уравнения можно найти методом проб и ошибок. Предположим сначала, что функция  $x(t)$  имеет вид

$$x(t) = A e^{rt}, \quad (6)$$

где  $A$  и  $r$  не зависят от аргумента  $t$ .

Подставляя формулу (6) в (5), получим

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0. \quad (7)$$

Таким образом, вместо дифференциального уравнения мы получили алгебраическое уравнение того же порядка  $n$ . Конечно, решение уравнения (5) можно искать и в несколько другой форме:

$$x(t) = B e^{-rt},$$

однако конечный результат от этого не изменится.

Уравнение (7) называется характеристическим и имеет  $n$  корней:

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n,$$

каждый из которых может быть действительным, мнимым или комплексным.

Для каждого корня  $r_i$  функция

$$A_i e^{r_i t}$$

удовлетворяет уравнению (5). Снова применяя принцип суперпозиции (4), получим полное решение однородного уравнения в виде

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \dots + A_n e^{r_n t}. \quad (8)$$

Очевидно, что функция  $x(t)$  удовлетворяет уравнению (5), независимо от того, какие значения принимают коэффициенты  $A_i$ , т.е. данное уравнение для каждого набора корней  $r_i$  имеет бесконечное число решений. Иными словами, неизвестные коэффициенты  $A_i$  невозможно определить, имея только однородное дифференциальное уравнение. Для того чтобы их вычислить, необходимо задать начальные условия, т.е. указать значения функции  $x(t)$  и ее производных в некоторый момент времени  $t$ :

$$x(t) = \varphi_0, \quad x'(t) = \varphi_1, \quad x''(t) = \varphi_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(t) = \varphi_{n-1}. \quad (9)$$

Примеры решения уравнения (5) приводятся в главе 2.

3. Обсудим далее решение неоднородного уравнения и рассмотрим три возможных случая, а именно, когда  $f(t)$  является синусоидальной, периодической или почти произвольной функцией.

Покажем, прежде всего, что решение уравнения (1) можно представить в виде следующей суммы:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t). \quad (10)$$

Здесь  $x_0(t)$  – произвольное решение однородного уравнения (5),  $x_1(t)$  – некоторое частное решение уравнения (1).

Действительно, подстановка равенства (10) в уравнение (1) даст

$$\begin{aligned} & \left[ a_n \frac{d^n x_0(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_0(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_0(t) \right] + \\ & + \left[ a_n \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_1(t) \right] = f(t). \end{aligned} \quad (11)$$

По определению, выражение в первых скобках равняется нулю, а выражение во вторых скобках – функции  $f(t)$ . Таким образом, функция  $x(t)$ , задаваемая равенством (10), является также решением неоднородного уравнения (1). Решение  $x_0(t)$  уравнения (5) было приведено ранее. Определим теперь второе слагаемое в правой части выражения (10) – частное решение  $x_1(t)$ . Полагая

$$f(t) = C \cos(\omega t + \varphi), \quad (12)$$

перепишем (1) в виде

$$a_n \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_1(t) = C \cos(\omega t + \varphi). \quad (13)$$

Помимо этого, рассмотрим также похожее уравнение

$$a_n \frac{d^n y_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y_1(t) = C \sin(\omega t + \varphi). \quad (14)$$

Умножая его на  $i$ , а затем складывая оба уравнения, получим

$$a_n \frac{d^n z_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} z_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 z_1(t) = C e^{-i(\omega t + \varphi)} = C e^{-i\omega t}. \quad (15)$$

Здесь

$$C = C e^{-i\varphi}$$

является комплексной величиной, и

$$z_1(t) = x_1(t) - i y_1(t). \quad (16)$$

Существенно, что

$$x_1(t) = \operatorname{Re} z_1(t). \quad (17)$$

Поскольку в правой части уравнения (15) вместо синусоидальной функции стоит

$$C e^{-i\omega t},$$

его решение заметно упрощается.

Это связано с тем, что

$$\frac{d}{dt} e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}, \quad \frac{d^2}{dt^2} e^{-i\omega t} = (-i\omega)^2 e^{-i\omega t}$$

и в общем случае

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-i\omega t} = (-i)^n \omega^n e^{-i\omega t}.$$

Благодаря этому поиск функции  $z_1$  становится чрезвычайно простой задачей.

Предположим, что

$$z_1(t) = B e^{-i\omega t}. \quad (18)$$

Подстановка этого выражения в формулу (15) дает

$$B[(-i\omega)^n a_n + (-i\omega)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0] = C$$

и

$$B = \frac{C}{(-i\omega)^n a_n + (-i\omega)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0}. \quad (19)$$

Таким образом, переход от равенства (13) к соотношению (15) приводит к значительному упрощению. Действительно, вместо дифференциального уравнения мы получили простейшее алгебраическое уравнение относительно неизвестного  $B$ .

Формулу (19) можно переписать в виде

$$B = B e^{-i\beta}, \quad (20)$$

где  $B$  и  $\beta$  – соответственно, амплитуда и аргумент комплексного числа  $B$ .

Как следует из выражения (18), частное решение уравнения (15) дается формулой

$$z_1(t) = B e^{-i\beta} e^{-i\omega t}$$

или

$$z_1(t) = B e^{-i(\omega t + \beta)}. \quad (21)$$

Наконец, воспользовавшись равенством (17), получим частное решение исходного уравнения (13) в виде

$$x_1(t) = B \cos(\omega t + \beta). \quad (22)$$

Величины  $B$  и  $\beta$ , определяемые формулой (19), являются соответственно амплитудой и фазой частного решения. Сравнивая равенства (12) и (22), приходим к выводу о том, что если входом в систему является синусоидальная функция, то частным решением будет также синусоидальная функция, имеющая ту же частоту, но другие амплитуду и фазу. Таким образом, мы показали, что использование формулы Эйлера заметно упрощает решение уравнения (13). Такой подход обычно называется операционным методом.

4. Согласно формуле (10) полное решение (выход линейной системы) является суммой двух слагаемых: одно из них можно назвать свободными колебаниями, и оно представляет собой решение  $x_0(t)$  однородного уравнения; другое является частным решением  $x_1(t)$ , характеризующим вынужденные колебания системы.

Таким образом, имеем

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \dots + A_n e^{r_n t} + B \cos(\omega t + \beta). \quad (23)$$

Здесь величины  $r_n$  являются корнями характеристического уравнения. Чтобы определить неизвестные коэффициенты  $A_i$ , необходимо использовать (так же, как и в случае однородного уравнения) начальные условия, сформулированные для полного решения  $x(t)$ . Из выражения (23) видно, что вход линейной системы всегда приводит к возникновению свободных и вынужденных колебаний. Поскольку реальные системы всегда являются диссипативными, свободные колебания  $x_0(t)$  со временем затухают, и в конце концов остаются только вынужденные колебания. В этом смысле можно сказать, что если входом в систему была синусоидальная функция, то выходом будет также синусоидальная функция той же частоты, при условии, что свободные колебания к этому моменту времени полностью исчезли. Это – одно из наиболее важных свойств линейных систем. Однако необходимо отметить, что в начальный период времени, когда еще присутствуют свободные колебания, полный выход  $x(t)$  может существенно отличаться от синусоидальной функции.



5. Мы описали операционный метод, позволяющий найти решение обыкновенного дифференциального уравнения в случае, когда входом является синусоидальная функция. Оказывается, что аналогичный подход можно использовать при решении линейного дифференциального уравнения с частными производными при условии, что его решение описывается синусоидальной функцией.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (24)$$

где  $\alpha$  – постоянный коэффициент,  $U$  – синусоидальная функция времени:

$$U = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (25)$$

В общем случае амплитуда  $A$  и фаза  $\varphi$  зависят также от координат точки наблюдения  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Поскольку функция  $U$  является произведением двух сомножителей

$$A(x, y, z, t) \text{ и } \cos[\omega t + \varphi(x, y, z)]$$

и каждый из них зависит от координат, подстановка этих сомножителей в формулу (24) не приводит ни к какому упрощению. В то же время использование комплексных переменных, в частности формулы Эйлера, становится очень эффективным. Чтобы воспользоваться этим, перепишем еще раз уравнение (24) в виде

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (26)$$

Здесь

$$V = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (27)$$

Далее, умножая выражение (26) на  $-i$  и складывая получившееся равенство с уравнением (24), находим

$$\nabla^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad (28)$$

где

$$Z(x, y, z, t) = U(x, y, z, t) + iV(x, y, z, t) \quad (29)$$

или

$$Z(x, y, z, t) = Z(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (30)$$

и

$$Z(x, y, z) = A e^{-i\varphi}. \quad (31)$$

Следует отметить, что решение уравнение (15) также представляется в виде произведения двух функций, одна из которых,  $V$ , является функцией только координат, а другая,  $e^{-i\omega t}$ , зависит только от времени.

Подстановка выражения (30) в уравнение (28) дает

$$\nabla^2 Z + k^2 Z = 0. \quad (32)$$

Здесь

$$k^2 = i \alpha \omega.$$

Таким образом, вместо уравнения диффузии (28) мы пришли к уравнению Гельмгольца (32) относительно комплексной амплитуды  $Z$ . Поскольку уравнение (32) не содержит времени, найти его решение относительно просто. Как следует из формулы (31), зная  $Z$ , затем можно найти амплитуду и фазу функции  $U$ , задаваемой выражением (25). Аналогичный подход можно использовать и при решении волнового уравнения:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

### РЯДЫ ФУРЬЕ

#### 1. Синусоидальные функции

$$A \sin x \text{ и } B \cos x \quad (1)$$

являются простейшими примерами периодических функций, причем их производные и первообразные – также периодические функции. Конечно, существует бесконечное множество других периодических функций, удовлетворяющих соотношению

$$f(x + l) = f(x), \quad (2)$$

где  $l$  обозначает период.

Примеры таких функций приведены на рис. 1.

2. В начале 19-го века Фурье показал, что почти любую периодическую функцию можно представить в виде следующей суммы:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega_1 x, \quad (3)$$

которая называется рядом Фурье.

Здесь  $n$  – целое число,  $a_n$  и  $b_n$  – постоянные коэффициенты, не зависящие от аргумента  $x$ , и

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{l}. \quad (4)$$

Перепишем выражение (3) в виде

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \omega_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \omega_n x, \quad (5)$$

где

$$\omega_n = n \omega_1 \text{ или } \omega_n = \frac{2\pi}{l_n}, \quad l_n = \frac{l}{n}. \quad (6)$$

По определению,  $\omega_n$  и  $l_n$  – соответственно частота и период члена ряда с номером  $n$ .

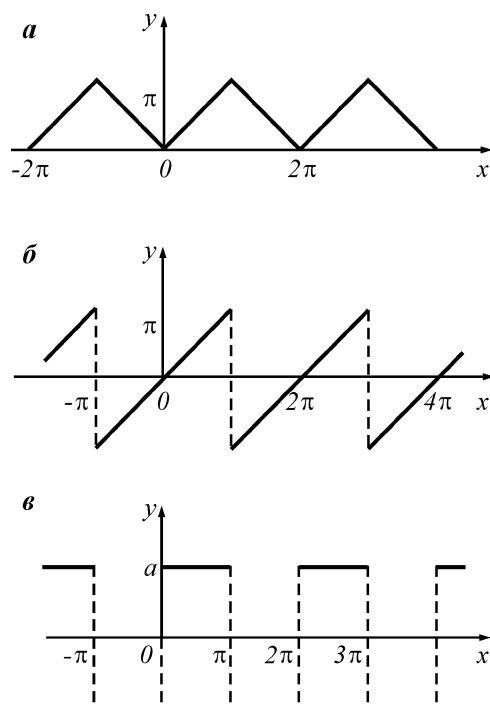
В частности, величины  $l_1 = l$  и  $\omega_1 = \omega$  первых членов

$$a_1 \sin \omega_1 x \text{ и } b_1 \sin \omega_1 x$$

характеризуют период и частоту самой функции  $f(x)$ .

Согласно формуле (3), функция  $f(x)$  представляется в виде суммы трех

Рис. 1. Периодические функции



членов. Первый член  $b_0$  является постоянной. Второй член представляет собой бесконечную сумму синусоидальных функций, имеющих различные амплитуды и частоты:

$$a_1 \sin \omega_1 x + a_2 \sin 2\omega_1 x + a_3 \sin 3\omega_1 x + \dots$$

Существенно, что первое слагаемое этой суммы и функция  $f(x)$  имеют одинаковые частоты. Однако с ростом  $n$  увеличивается и частота  $\omega_n$ , задаваемая формулой (6).

Следует заметить, что разность последовательных частот равняется  $\omega_1$ :

$$\omega_n - \omega_{n-1} = n \omega_1 - (n-1)\omega_1 = \omega_1 \quad \text{или}$$

$$\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{l}. \quad (7)$$

Третий член в выражении (5) также представляет собой бесконечную сумму:

$$a_1 \cos \omega_1 x + a_2 \cos 2\omega_1 x + a_3 \cos 3\omega_1 x + \dots$$

Фазовый сдвиг между членами с номером  $n$  в первой и второй сумме равен  $\pi/2$ . Члены этих сумм называются гармониками  $n$ -го порядка; в частности  $b_0$  является гармоникой нулевого порядка.

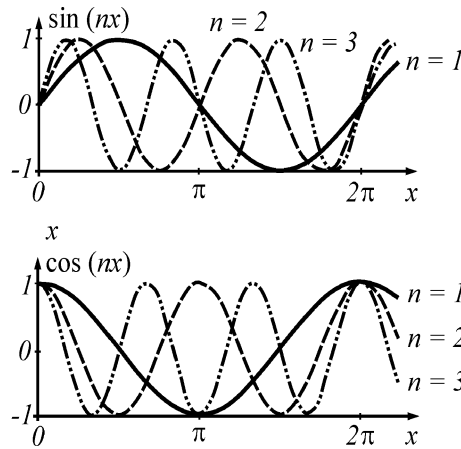


Рис. 2. Функции  $\sin nx$  и  $\cos nx$  для  $n = 1, 2, 3$

Поведение первых членов ряда, имеющих нулевые амплитуды, показано на рис. 2.

3. Очевидно, что равенство (5) выполняется только при определенных значениях коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ , и наша задача состоит в том, чтобы их найти. Процедура поиска этих коэффициентов состоит из трех шагов. Начнем с того, что определим  $b_0$ . Умножая левую и правую части формулы (5) на  $dx$  и интегрируя в пределах от  $-l/2$  до  $l/2$ , получим

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = b_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin n\omega_1 x dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos n\omega_1 x dx. \quad (8)$$

Поскольку

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(n\omega_1 x) dx = -\frac{\cos(n\omega_1 x)}{n\omega_1} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{n\omega_1} \left[ \cos\left(n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right) - \cos\left(-n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right) \right] = 0$$

и

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(n\omega_1 x) dx = \frac{\sin(n\omega_1 x)}{n\omega_1} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n\omega_1} \sin\left[\left(n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right) - \sin\left(-n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right)\right] = 0,$$

формула (8) принимает вид

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = lb_0 \quad (9)$$

или

$$b_0 = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx. \quad (10)$$

Таким образом, константа  $b_0$  определяется площадью под кривой  $f(x)$  на интервале, равном периоду  $l$ .

Чтобы найти коэффициенты  $a_n$ , умножим обе части формулы (5) на  $\sin(m\omega_1 x)$  и снова проинтегрируем в пределах интервала  $l$ . В результате получим

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin(m\omega_1 x) dx = b_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(m\omega_1 x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n, \quad (11)$$

где

$$M_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_1 x) dx$$

и

$$N_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(n\omega_1 x) \sin(m\omega_1 x) dx.$$

Здесь  $m \geq 1$  – любое целое число.

Используем далее равенства

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

и

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u,$$

а также

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

и

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

Из них следует, что

(12)

(13)

$$\begin{aligned}
\sin u \sin v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)], \\
\cos u \cos v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) + \cos(u+v)], \\
\sin u \cos v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) + \sin(u-v)].
\end{aligned}
\tag{14}$$

Полагая

$$u = n \omega_1 x \quad \text{и} \quad v = m \omega_1 x,$$

получим

$$M_n = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos[(n-m)\omega_1 x] dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos[(n+m)\omega_1 x] dx \right]. \tag{15}$$

Последнее выражение равняется нулю при  $n \neq m$ , поскольку разность  $n-m$  и сумма  $n+m$  являются целыми числами.

При  $n = m$  имеем

$$M_n = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2m\omega_1 x) dx \right]$$

или  $M_n = l/2$ .

Таким образом,

$$M_n = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \frac{l}{2} & n = m. \end{cases} \tag{16}$$

Соответственно, первая сумма в правой части выражения (15) преобразуется к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n = \frac{l}{2} a_m. \tag{17}$$

Из последнего равенства (14) видно, что все интегралы  $N_n$  исчезают:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n = 0. \tag{18}$$

Учитывая, что первый член

$$b_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(m\omega_1 x) dx$$

также равняется нулю, окончательно получим

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin(m\omega_1 x) dx = a_m \frac{l}{2}$$

или, заменяя  $m$  на  $n$ ,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx. \quad (19)$$

Теперь, умножая обе части формулы (5) на  $\cos(n\omega_1 x)$  и выполняя операции, аналогичные предыдущим, получим

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx. \quad (20)$$

Таким образом, мы показали, что ряд, стоящий в правой части выражения (5), совпадает с периодической функцией  $f(x)$ , если его коэффициенты  $b_0$ ,  $a_n$  и  $b_n$  связаны с функцией  $f(x)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx, \\ b_n &= \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Как отмечалось ранее,  $l$  является периодом функции  $f(x)$ , а  $\omega_1 = 2\pi/l$  – ее частотой.

Прежде чем обсуждать свойства рядов Фурье, заметим следующее:

- а) ряды Фурье представляют функцию на интервале, равном ее периоду  $l$ ;
- б) выражения (21) для коэффициентов были получены в предположении, что начало координат  $x = 0$  совпадает с серединой этого интервала. Например, если поместить точку  $x = 0$  в начало этого интервала, то замена переменной



$$y = x + \frac{l}{2}$$

даст

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\omega_1 x) dx, \\ b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos(n\omega_1 x) dx. \end{aligned} \quad (22)$$

4. Имеется два случая, при которых ряды Фурье имеют значительно более простой вид. Рассмотрим сначала случай, когда  $f(x)$  является четной функцией:

$$f(x) = f(-x), \quad (23)$$

Поскольку произведения

$$f(x) \sin(n\omega_1 x) \quad \text{и} \quad f(x) \cos(n\omega_1 x)$$

являются соответственно нечетной и четной функциями по отношению к середине интервала  $x = 0$ , коэффициенты  $a_n$  должны равняться нулю:

$$a_n = 0$$

и ряд Фурье принимает вид

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega_1 x), \quad (24)$$

где

$$b_0 = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) dx \quad (25)$$

и

$$b_n = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx. \quad (26)$$

И наоборот, если функция  $f(x)$  нечетная:

$$f(x) = -f(-x),$$

то подынтегральное выражение

$$f(x) \cos(n\omega_1 x)$$

также является нечетной функцией и, следовательно,

$$b_n = 0,$$

включая член  $b_0$ .

Соответственно, вместо формулы (5) имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega_1 x) \quad (27)$$

и

$$a_n = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx, \quad (28)$$

поскольку подынтегральное выражение является четной функцией.

Ряды Фурье для функций, представленных на рис. 1, имеют следующий вид:

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right),$$

$$y = 2 \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

и

$$y = \frac{4a}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

5. Полезно также представить ряды Фурье в несколько другой форме. Как следует из выражения (5),

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\omega_1 x) + b_n \cos(n\omega_1 x)]. \quad (29)$$

Полагая в этом выражении

$$a_n = A_n \sin \varphi_n \text{ и } b_n = A_n \cos \varphi_n, \quad (30)$$

получим

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 x - \varphi_n). \quad (31)$$

Из последней формулы видно, что периодическая функция описывается в общем случае постоянным слагаемым  $b_0$  и бесконечной суммой синусоидальных функций, имеющих различные амплитуды и начальные фазы. В то

же время, частоты  $\omega_n$  этих функций задаются выражениями (6). Наборы чисел  $A(\omega_n)$  и  $\varphi(\omega_n)$  обычно называются амплитудным и фазовым спектром периодической функции  $f(x)$  (рис. 3, а, б). Поскольку разность последовательных частот равняется конечному ненулевому значению  $\omega_1$ , такие спектры называются дискретными. Очевидно, что с увеличением периода  $l$ , разница между частотами  $\omega_n$  и  $\omega_{n-1}$  стремится к нулю. Можно ожидать, что в пределе  $l \rightarrow \infty$  спектр становится непрерывным.

6. Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет на интервале

$$-l/2 < x < l/2$$

следующим условиям Дирихле:

а)  $f(x)$  является однозначной, конечной функцией, имеющей конечное число разрывов;

б)  $f(x)$  имеет конечное число максимумов и минимумов.

Тогда из теории рядов Фурье следует, что во всех точках непрерывности ряд Фурье сходится к функции  $f(x)$ , а в точке разрыва  $x_0$  – к значению

$$\frac{f(x_0 - \varepsilon) + f(x_0 + \varepsilon)}{2}. \quad (32)$$

Здесь  $\varepsilon$  – бесконечно малая величина. Данное среднее значение двух предельных ординат естественно рассматривать в качестве значения функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$ . Некоторые из приведенных выше примеров иллюстрируют это интересное поведение рядов Фурье.

Заметим, что функции  $x^{-1}$  и  $\sin x^{-1}$  не удовлетворяют условиям Дирихле на интервале, содержащем точку  $x = 0$ .

7. Чтобы продемонстрировать сходимость рядов Фурье, рассмотрим функцию

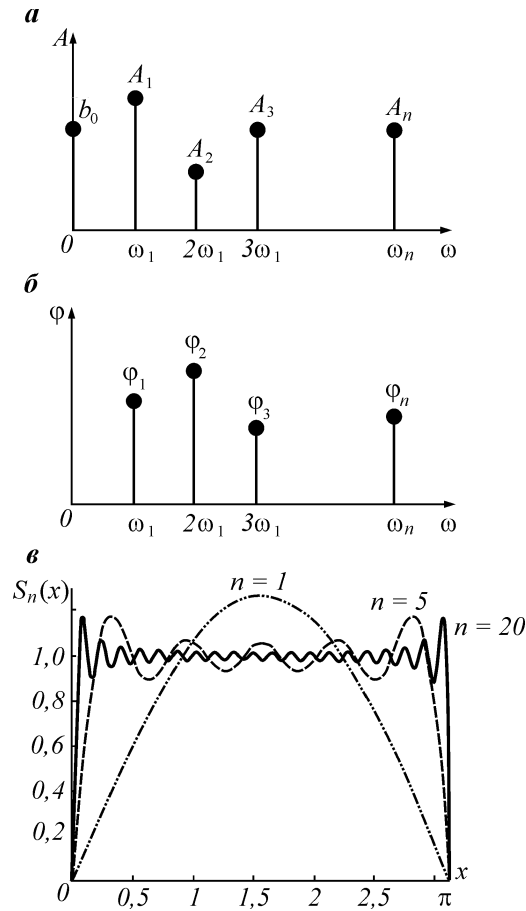
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0, \\ +1 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots \right]. \quad (33)$$

Отсюда видно, что, несмотря на то, что функция  $f(x)$  принимает постоянные значения в пределах каждого полупериода, на котором каждый из членов ряда (33) является синусоидальной функцией, сумма  $s_n$  достаточно быстро сходится к  $f(x)$  на интервале  $0 < x < \pi$  (рис. 3). Тем не менее, сходимость становится более медленной по мере приближения к точке разрыва, например  $x = 0$ , что приводит к необходимости учитывать все больше членов ряда. Как видно из рис. 3, в, с увеличением числа  $n$  растет также количество максимумов суммы  $s_n$ , и первый максимум приближается к точке  $x = 0$ . Отсюда следует, что в пределе  $n \rightarrow \infty$  значение этого максимума стремится к (1.18), а предельная ордината функции  $f(x)$  равна единице. Это явление было от-

Рис. 3. Спектр периодической функции. Эффект Гиббса



крыто Гиббсом. Таким образом, представлять функции их рядами Фурье вблизи точек разрыва не удобно.

8. Ранее мы нашли частное решение  $s_1(x)$  линейного дифференциального уравнения для случая, когда входом является синусоидальная функция

$$f(x) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (34)$$

В этом случае

$$s_1(x) = C \cos(\omega t + \tau). \quad (35)$$

Предположим теперь, что входом является периодическая функция  $f(x)$  с периодом  $l$  и частотой  $\omega_1 = 2\pi/l$ .

Тогда частное решение  $s_1(x)$  должно удовлетворять следующему уравнению:

$$a_n \frac{d^n s_1(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s_1(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 s_1(x) = f(x). \quad (36)$$

Используя разложение в ряд Фурье, получим

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 x - \varphi_n). \quad (37)$$

Применяя принцип суперпозиции, получим, что частное решение можно записать в виде ряда Фурье

$$s_1(x) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 x - \tau_n), \quad (38)$$

члены которого можно легко найти.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 7

### ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Как было показано ранее, периодическую функцию

$$f(x) = f(x + l),$$

удовлетворяющую условиям Дирихле, можно представить в виде ряда Фурье

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega_1 x, \quad (1)$$

где

$$\omega_n = n\omega_1 = n \frac{2\pi}{l}, \quad (2)$$

$$b_0 = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) dx, \quad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \sin n\omega_1 x dx$$

и (4)

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \cos n\omega_1 x dx.$$

С увеличением периода разность частот

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega_1 = \frac{2\pi}{l} \quad (5)$$

стремится к нулю, и, соответственно, в пределе  $l \rightarrow \infty$  спектр функции  $f(x)$  становится непрерывным. В то же время функция  $f(x)$  перестает быть периодической. Чтобы осуществить переход к предельному случаю, ряды Фурье необходимо соответствующим образом модифицировать.

2. Учитывая формулу Эйлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi,$$

вместо выражения (1) запишем

$$\begin{aligned}
f(x) &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in\omega_1 x} - e^{-in\omega_1 x}}{2i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{in\omega_1 x} + e^{-in\omega_1 x}}{2} = \\
&= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - ia_n}{2} e^{in\omega_1 x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n + ia_n}{2} e^{-in\omega_1 x}
\end{aligned} \quad (6)$$

или

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{in\omega_1 x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x}. \quad (7)$$

Здесь

$$c_n = \frac{b_n + ia_n}{2} \quad \text{и} \quad c_n^* = \frac{b_n - ia_n}{2}. \quad (8)$$

Как следует из выражений (4),

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{in\omega_1 x} dx \quad (9)$$

и

$$c_n^* = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx.$$

Здесь  $n$  – положительное целое число,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Сравнение равенств (9) показывает, что

$$c_n^* = c_{-n}. \quad (10)$$

Ряд (7) можно записать в двух различных формах, а именно:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x} \quad (11)$$

или

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\omega_1 x}$$

при условии, что в обеих суммах отброшен член с  $n = 0$ .

Из выражений (3) и (9) следует, что

$$b_0 = c_0 = c_0^*, \quad (12)$$

и, следовательно, равенства (11) можно переписать как

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x} \quad (13)$$

или

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{in\omega_1 x}, \quad (14)$$

и эти суммы уже содержат член с  $n = 0$ . Следует заметить, что каждая из представленных выше сумм совпадает с рядом Фурье (1), поскольку мнимые части сумм равны нулю.

Покажем теперь, как эти достаточно сложные выражения можно эффективно использовать для получения рядов Фурье в предельном случае, когда период  $l$  стремится к бесконечности.

Рассмотрим прежде всего выражения (9) и (13):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x}$$

и

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx.$$

Из них следует, что

$$f(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{in\omega_1 x} dx \right] e^{-in\omega_1 x}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{i\omega_n x} dx \right] e^{-i\omega_n x} \Delta\omega, \quad (15)$$

так как

$$l = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \Delta\omega.$$

В пределе, при  $l \rightarrow \infty$  поведение функции  $f(x)$  перестает быть периодическим и становится произвольным. Поскольку разность соседних частот стремится



к нулю,  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , сумму в правой части равенства (15) можно заменить интегралом по всем частотам:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega, \quad (16)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (17)$$

Последние два выражения представляют собой преобразование Фурье функции  $f(x)$ , а функция  $F(\omega)$  называется спектром функции  $f(x)$  или ее комплексной амплитудой. Таким образом, в отличие от периодических функций, произвольная функция  $f(x)$  описывается синусоидальными гармониками всех возможных частот. Иными словами, такие функции характеризуются непрерывным спектром. Функцию  $f(x)$  можно представить в несколько другом виде.

Используя выражения (9) и (14), получим

$$f(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx \right] e^{in\omega_1 x}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-i\omega_n x} dx \right] e^{i\omega_n x} \Delta\omega.$$

Рассматривая предельный случай, приходим к другой паре преобразований Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (18)$$

и

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Безусловно, обе формы преобразования Фурье являются эквивалентными, и в дальнейшем мы будем использовать первую из них, задаваемую выражениями (16) и (17).

3. По определению, спектр  $F(\omega)$  является комплексной функцией, которую можно записать как

$$F(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega) + i \operatorname{Im} F(\omega) \quad (19)$$

или

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}. \quad (20)$$

Подставляя последнее выражение в преобразование Фурье (16), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{-i(\omega x - \varphi)} d\omega. \quad (21)$$

Это означает, что произвольную функцию можно представить в виде бесконечной суммы синусоидальных колебаний

$$\frac{\Delta\omega}{2\pi} |F(\omega)| e^{-i(\omega x - \varphi)}, \quad (22)$$

имеющих бесконечно малые амплитуды и разные частоты и фазы.

Рассмотрим некоторые важные свойства этого спектра. Прежде всего, из равенств (17) следует, что спектры  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$  равны друг другу:

$$F_1(\omega) = F_2(\omega), \quad (23)$$

если равны соответствующие функции

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Из выражений (17) и (19) имеем

$$\operatorname{Re} F(\omega) + i \operatorname{Im} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

или

$$\operatorname{Re} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad (24)$$

и

$$\operatorname{Im} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx. \quad (25)$$

Следовательно, действительная и мнимая части спектра являются соответственно четной и нечетной функциями частоты:

$$\operatorname{Re} F(\omega) = \operatorname{Re} F(-\omega)$$

и

$$\operatorname{Im} F(\omega) = -\operatorname{Im} F(-\omega). \quad (26)$$

4. Перепишем выражение (16) в другой форме. Используя формулу Эйлера, получим

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F)(\cos \omega x - i \sin \omega x) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x + \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x] d\omega + \\
&+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Im} F(\omega) \cos \omega x - \operatorname{Re} F(\omega) \sin \omega x] d\omega.
\end{aligned} \tag{27}$$

Учитывая, что подынтегральное выражение во втором слагаемом является нечетной функцией, формулу (27) можно упростить следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x + \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x] d\omega. \tag{28}$$

Поскольку  $f(x)$  – действительная функция, естественно, что мнимая часть выражения (27) обращается в ноль.

Предположим, что функция  $f(x)$  ведет себя следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ f(x) & x \geq 0. \end{cases} \tag{29}$$

Далее, полагая, что  $x$  в выражении (28) является отрицательным, получим

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos(-\omega x) + \operatorname{Im} F(\omega) \sin(-\omega x)] d\omega$$

или

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x - \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x] d\omega. \tag{30}$$

Здесь  $x$  положительно.

Суммирование выражений (28) и (29) даст

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x d\omega$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x d\omega,$$

поскольку подынтегральное выражение является четной функцией частоты  $\omega$ .

Таким же образом из выражений (28) и (30) получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x d\omega. \quad (32)$$

Последние два равенства называют соответственно косинус- и синус-преобразованиями Фурье.

Они позволяют вычислить значения произвольной функции  $f(x)$ , задаваемой выражением (29), по одной только действительной, либо мнимой части спектра. Интегрирование осуществляется только по положительным частотам. Заметим, что из формул (31) и (32) следует, что

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x d\omega = \int_0^{\infty} \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x d\omega. \quad (33)$$

Последнее выражение показывает, что мнимая и действительная части спектра связаны друг с другом. Иными словами, функции

$$\operatorname{Re} F(\omega) \text{ и } \operatorname{Im} F(\omega)$$

не являются независимыми.

5. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих поведение спектра  $F(\omega)$ .

### Пример 1

Рассмотрим следующую функцию  $f(x)$ :

$$f(x) = f_0 \begin{cases} 0 & x < 0, \\ e^{-\alpha x} & x \geq 0. \end{cases} \quad (34)$$

Ее поведение показано на рис. 1, а. Как следует из формулы (18),

$$F(\omega) = f_0 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{i\omega x} dx = \frac{f_0}{\alpha - i\omega}$$

или

$$F(\omega) = f_0 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + if_0 \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (35)$$

Очевидно, что действительная и мнимая части спектра являются соответственно четной и нечетной функциями. Таким образом, амплитудный и фазовый спектры есть

$$|F(\omega)| = \frac{f_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\alpha}. \quad (36)$$

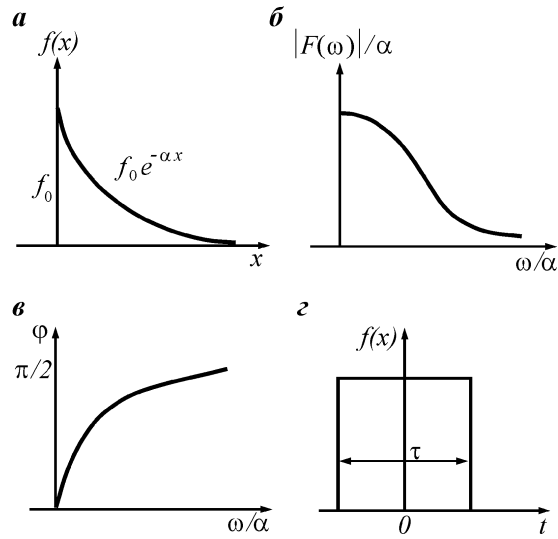


Рис. 1. Функции и спектры

Их поведение существенным образом зависит от параметра  $\alpha$  (рис. 1 б, в). В предельном случае ступенчатой функции,  $\alpha = 0$ , имеем

$$|F(\omega)| = \frac{f_0}{\omega} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (37)$$

В частности, отсюда видно, что в спектре доминируют низкие частоты.

### Пример 2

В этом примере рассмотрим функцию, описываемую прямоугольным импульсом (рис. 1, з):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\tau}{2}, \\ f_0 & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & t > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (38)$$

Спектр этой функции дается выражением

$$F(\omega) = f_0 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{i\omega t} dt = \frac{f_0}{i\omega} e^{i\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

или

$$F(\omega) = f_0 \tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}, \quad (39)$$

где  $f_0 \tau$  – площадь импульса.

В этом случае спектр функции является действительным, т.е. все синусоидальные гармоники имеют нулевую фазу. Поведение амплитуды определяется отношением

$$\frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}.$$

6. Ранее мы описали решение линейного дифференциального уравнения для случаев, когда правая часть  $f(x)$  являлась либо синусоидальной, либо периодической функцией.

Рассмотрим теперь случай функции  $f(x)$  с практически произвольной зависимостью от  $x$ . Спектр этой функции известен и задается формулой (17).

Частное решение  $s_1(x)$  уравнения

$$a_n \frac{d^n s_1(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s_1(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 s_1(x) = f(x) \quad (41)$$

можно также представить как

$$s_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (42)$$

В этом выражении функция  $s_1(x)$  и ее спектр  $S_1(\omega)$  неизвестны.

Подстановка соотношений (16) и (42) в равенство (41) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} [a_n (-i\omega)^n + a_{n-1} (-i\omega)^{n-1} + \dots + a_0] S_1(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (43)$$

Поскольку равенство функций означает, что равны также и их спектры, получаем

$$S_1(\omega) = \frac{F(\omega)}{a_n (-i\omega)^n + a_{n-1} (-i\omega)^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (44)$$

Зная спектр  $S_1(\omega)$  частного решения и применяя первое из преобразований Фурье (16), мы можем определить функцию  $s_1(x)$ .

7. Следующее применение преобразования Фурье связано с решением дифференциального уравнения в частных производных следующего вида:

$$\nabla^2 U - \alpha \frac{\partial U}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (45)$$

Здесь  $U$  – функция времени и координат точки наблюдения,  $\alpha$  и  $\beta$  – не-

которые постоянные. Например, полагая либо  $\alpha = 0$ , либо  $\beta = 0$ , мы приходим соответственно к волновому уравнению или к уравнению диффузии.

Чтобы упростить решение уравнения (45), используем интеграл Фурье

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (46)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (45) дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla^2 U + i\omega\alpha U + \beta\omega^2 U] e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

или

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad (47)$$

где

$$k^2 = i\omega\alpha + \beta\omega^2. \quad (48)$$

Уравнение (47) является уравнением Гельмгольца относительно комплексной амплитуды  $U(x, y, z, \omega)$ , и оно, конечно, проще уравнения (45), поскольку функция  $U$  не зависит от времени. Найдя функцию  $U$  и используя далее интеграл Фурье, мы можем получить решение уравнения (45).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 8

### ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Предположим, что скалярный потенциал падающей волны меняется во времени как функция, показанная на рис. 1. Очевидно, что эту функцию можно представить в виде суммы ступенчатых функций с амплитудой  $\Delta\varphi(\tau)$ , где  $\tau$  – момент времени, в который происходит возбуждение волны. Предположим также, что потенциал вторичной волны, вызванной единичной ступенчатой функцией, известен и описывается функцией  $A(t - \tau)$ . Очевидно, что источник в виде ступенчатой функции с амплитудой  $\Delta\varphi(\tau)$  возбуждает волну, потенциал которой равен

$$\Delta\varphi(\tau) A(t - \tau).$$

Суммируя действие всех ступенчатых функций в различные моменты времени, находим, что вторичный потенциал равняется

$$\varphi_s(t) = \varphi(0)A(t) + \sum_{\tau=0}^{\tau=t} \Delta\varphi(\tau)A(t - \tau) = \varphi(0)A(t) + \sum_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau} A(t - \tau)\Delta\tau.$$

Как видно из рис. 1, приближенное выражение

$$\Delta\varphi(\tau) = \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau} \Delta\tau$$

становится все более точным по мере уменьшения интервала  $\Delta\tau$ .

В предельном случае, когда  $\Delta\tau$  стремится к нулю, мы получаем интеграл свертки

$$\varphi_s(t) = \varphi(0)A(t) + \int_0^t \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau} A(t - \tau)d\tau, \quad (1)$$

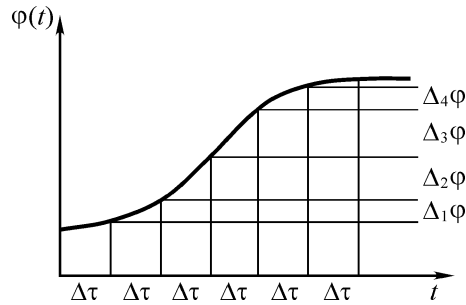


Рис. 1. Представление функции через интеграл Дюамеля



который называется интегралом Дюамеля. Он позволяет для произвольной падающей волны найти вторичную волну, при условии, что функция  $A(t - \tau)$  известна. Интегрируя по частям правую часть формулы (1), получим

$$\varphi_s(t) = \varphi(t)A(0) + \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial A(t - \tau)}{\partial \tau} \Delta \tau. \quad (2)$$

Этот интеграл называют второй формой интеграла Дюамеля. Точно такое же представление можно использовать в тех линейных системах, для которых известен отклик ступенчатой функции.