

Глава 7. СУПЕРПОЗИЦИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН, ИМЕЮЩИХ РАЗНЫЕ ЧАСТОТЫ И ДЛИНЫ ВОЛН

В предыдущих главах мы описали интерференцию волн, имеющих одинаковые частоты и, соответственно, одинаковые длины волн, и рассмотрели такие явления, как стоячая волна, а также формирование собственных колебаний и явление дифракции. Помимо этого мы смогли представить волны в виде суперпозиции элементарных волн и объяснить некоторые важные особенности дифракции, например чередование зон с относительно низкой и высокой интенсивностью.

Также мы описали возникновение неоднородной волны на поверхности воды и продемонстрировали эффект суперпозиции элементарных волн от нескольких источников.

Рассмотрим теперь суперпозицию синусоидальных волн, имеющих разные частоты и длины волн. Этот случай очень важен, поскольку он помогает понять, как происходит распространение произвольной (нестационарной) волны.

7.1. ГРУППА ВОЛН. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ

Смещения в синусоидальной волне, распространяющейся, например, вдоль оси x , описываются следующим выражением:

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx), \quad (7.1)$$

где

$$k = \omega/c \quad (7.2)$$

является волновым числом, а c характеризует скорость распространения произвольной фазы и поэтому называется фазовой скоростью. Например, как показано на рис. 7.1, а, одна и та же фаза возникает в точках x_1 и x_2 ($x_1 > x_2$) и, в соответствии с выражением (7.1),

$$\omega t_1 - kx_1 = \omega t_2 - kx_2$$

или

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

С учетом равенства (7.2) выражение (7.1) можно представить в виде

Рис. 7.1. Фазы синусоидальных волн (†); синхронные колебания (·); нестационарные волны (·); суперпозиция двух синусоидальных волн (·)

$$s(x, t) = s_0 \cos \omega \left(\frac{x}{c} - t \right)$$

или

$$s(x, t) = s_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct).$$

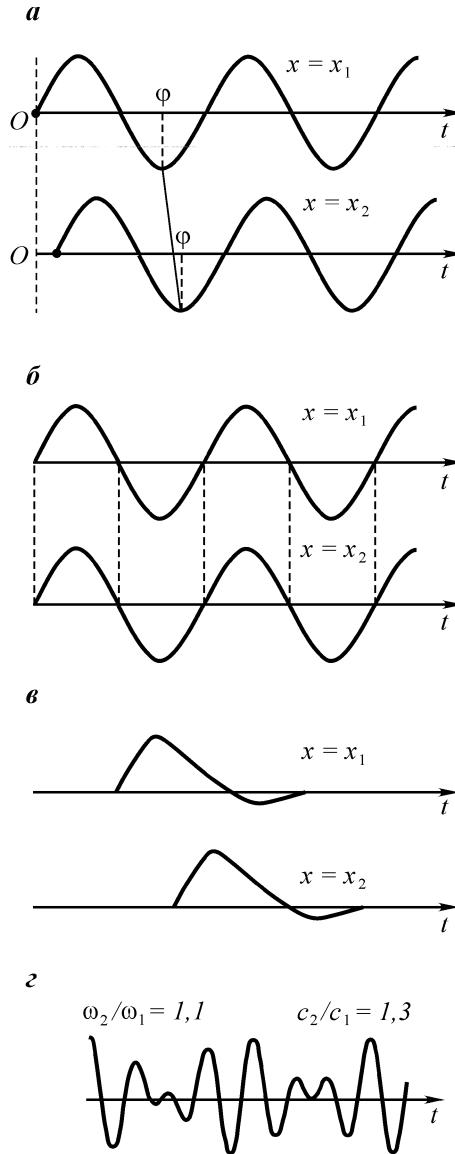
В частности, когда фазовая скорость стремится к бесконечности, вместо волны наблюдаются синхронные вибрации (рис. 7.1, а).

Предположим сначала, что фазовая скорость волны не зависит от частоты. Поскольку произвольная волна представляет собой суперпозицию элементарных волн (интеграл Фурье), можно сказать, что s характеризует скорость распространения такой волны вдоль оси x (рис. 7.1, а). Это означает, что s описывает также скорость переноса энергии. Таким образом, в рассматриваемом случае форма волны не зависит от расстояния x .

Если же, в отличие от предыдущего случая, предположить, что скорость $c(\omega)$ является функцией частоты, то возникает дисперсия, и поведение нестационарных волн станет гораздо более сложным. Чтобы исследовать основные свойства такой волны, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Две синусоидальные волны

Пусть волна является суперпозицией двух синусоидальных волн бесконечной протяженности, имеющих одинаковые амплитуды и мало различающиеся фазовые скорости и волновые числа:



$$s(x, t) = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_1} (x - c_1 t) - \alpha_1 \right] + A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_2} (x - c_2 t) - \alpha_2 \right]. \quad (7.3)$$

Здесь α_1 и α_2 обозначают начальные фазы, и

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{d\lambda}{2}, \quad \lambda_2 = \lambda + \frac{d\lambda}{2}, \quad (7.4)$$

$$c_1 = c - \frac{dc}{2}, \quad c_2 = c + \frac{dc}{2},$$

причем

$$dc/c \ll 1, \quad d\lambda/\lambda \ll 1. \quad (7.5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} s(x, t) = & 2A \cos \left[\pi \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) x - \left(\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} \right) t \right\} - \varphi_1 \right] \times \\ & \times \cos \left[\pi \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) x - \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \right) t \right\} - \varphi_2 \right], \end{aligned} \quad (7.6)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

Используя разложение Маклорена, получим следующие приближенные выражения:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda \left(1 - \frac{d\lambda}{2\lambda} \right)} \approx \frac{1}{\lambda} + \frac{d\lambda}{2\lambda^2}, \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{d\lambda}{2\lambda} \right)} \approx \frac{1}{\lambda} - \frac{d\lambda}{2\lambda^2}$$

и

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{2}{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Аналогичным образом получим

$$\frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c \left(1 - dc/2c \right)}{\lambda \left(1 - d\lambda/2\lambda \right)} \approx \frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{dc}{2c} + \frac{d\lambda}{2\lambda} \right),$$

$$\frac{c_2}{\lambda_2} = \frac{c \left(1 + dc/2c \right)}{\lambda \left(1 + d\lambda/2\lambda \right)} \approx \frac{c}{\lambda} \left(1 + \frac{dc}{2c} - \frac{d\lambda}{2\lambda} \right)$$

и

$$\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} \approx 2 \frac{c}{\lambda},$$

$$\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \approx \frac{dc}{\lambda} + \frac{cd\lambda}{\lambda^2} = \frac{d\lambda}{\lambda^2} \left(c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \right).$$

Таким образом, выражение (7.6) можно в приближенном виде представить как

$$s(x, t) = 2A \cos \left[\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} (x - c_g t) - \varphi_2 \right] \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \varphi_1 \right], \quad (7.7)$$

где

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (7.8)$$

Здесь dc и $d\lambda$ – малые приращения соответственно c и λ .

Помимо этого, заметим следующее:

а) значения фаз φ_1 и φ_2 зависят от выбора начальной точки $x = 0$ и начального момента времени;

б) в главе 2 рассматривалась суперпозиция двух синусоидальных колебаний с близкими частотами и одинаковыми амплитудами, причем каждое из этих колебаний описывало вибрации, что позволило нам изучить эффект биения.

Согласно формуле (7.7), функция $s(x, t)$ представима в виде произведения двух синусоид, описывающих волны с совершенно разными длинами волн. Одной из этих волн является

$$2A \cos \left[\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} (x - c_g t) - \varphi_2 \right], \quad (7.9)$$

длина волны которой равняется

$$\lambda_g = \frac{2\lambda^2}{d\lambda} = 2\lambda \frac{\lambda}{d\lambda}. \quad (7.10)$$

Вторая волна

$$\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \varphi_1 \right] \quad (7.11)$$

имеет длину волны, равную λ .

Волна $s(x, t)$ не является периодической функцией ни по времени, ни по расстоянию, и, как видно из рис. 7.1, \tilde{a} – 7.2, \mathbf{a} , $\hat{\mathbf{a}}$, форма этой волны меняется по мере распространения волны вдоль оси x .

Учитывая, что

$$\lambda_g \gg \lambda, \quad (7.12)$$

данную волну можно рассматривать как “синусоидальную” волну с длиной волны λ и медленно меняющейся амплитудой

$$A_g = 2A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_g} (x - c_g t) - \varphi_2 \right]. \quad (7.13)$$

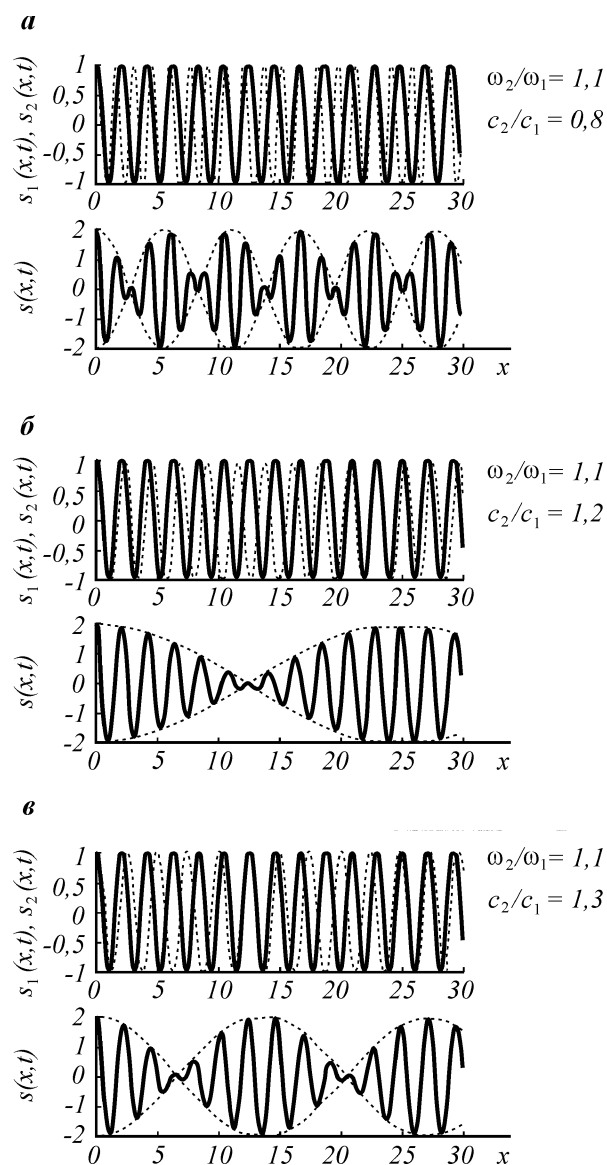


Рис. 7.2. Суперпозиция двух синусоидальных волн

Другими словами, длина волны и скорость результирующей волны практически совпадают с длинами волн и скоростями исходных волн, однако ее амплитуда модулируется множителем

$$\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_g} (x - c_g t) - \varphi_2 \right].$$

Рассмотрим поведение данной волны как функции времени и расстояния. Вначале зафиксируем точку наблюдения x и выберем такой момент времени, когда фазы обеих синусоидальных волн в выражении (7.3) равны друг другу:

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} (x - c_1 t) - \alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} (x - c_2 t) - \alpha_2.$$

Отсюда

$$2\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) x = 2\pi \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \right) t + \alpha_1 - \alpha_2$$

или

$$2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2} x = 2\pi \frac{c_1 \lambda_2 - c_2 \lambda_1}{\lambda_2} t + 2\varphi_2. \quad (7.14)$$

Из равенства (7.4) следует, что

$$2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2} x = \frac{d\lambda}{\lambda^2} 2\pi \left(c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \right) t + 2\varphi_2.$$

Далее, учитывая равенство (7.8), имеем

$$\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} (x - c_g t) = \varphi_2. \quad (7.15)$$

Подставляя последнее выражение в (7.13) и учитывая (7.10), мы видим, что, когда фазы обеих синусоидальных волн одинаковы, функция $A_g(x, t)$ достигает своего максимального значения

$$A_g = 2A. \quad (7.16)$$

Этот же результат следует непосредственно из выражения (7.3).

Тем не менее, амплитуда волны $s(x, t)$ зависит также от значения фазы

$$\tau = \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \varphi_1.$$

Например, если фаза равняется

$$(2n+1) \frac{\pi}{2},$$

то значение функции $s(x, t)$ равно нулю. В отличие от этого случая, при

$$\tau = \pi n$$

значения функций $s(x, t)$ и $A_g(x, t)$ могут отличаться только знаком.

Очевидно, что функция A_g достигает своего минимального значения $-2A$ в такой момент t , когда разность фаз синусоидальных волн равняется 2π .

Рассмотрим момент времени

$$t_1 = t + \Delta t,$$

где

$$\Delta t \ll t.$$

Поскольку рассматриваемые синусоиды имеют различные длины волн и фазовые скорости, их фазы

$$\tau_1(x, t_1) = \frac{2\pi}{\lambda_1}(x - c_1 t_1) - \alpha_1$$

и

$$\tau_2(x, t_1) = \frac{2\pi}{\lambda_2}(x - c_2 t_1) - \alpha_2$$

не равны друг другу даже в том случае, когда их разность очень мала.

Соответственно, условие (7.15) не удовлетворяется и поэтому

$$A_g < 2A.$$

С увеличением времени, разность фаз

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$$

также увеличивается, однако, как видно из неравенства (7.5), это изменение происходит очень медленно. Например, если $\Delta t = \lambda/c$, т.е. интервал времени практически равен периоду синусоидальных волн T , то

$$\Delta\tau = \frac{2\pi}{\lambda_1} \left[x - c_1 \left(t + \frac{\lambda}{c} \right) - \alpha_1 \right] - \frac{2\pi}{\lambda_2} \left[x - c_2 \left(t + \frac{\lambda}{c} \right) - \alpha_2 \right]$$

или

$$\Delta\tau = \frac{2\pi\lambda}{c} \left| \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \right) \right| = 2\pi \left| \left(\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{dc}{c} \right) \right| \ll 1,$$

поскольку в момент времени t фазы равны между собой.

Последнее означает, что при достаточно большом интервале времени, значительно превосходящем период T , функция A_g лишь незначительно отличается от $2A$. Другими словами, в этом случае суперпозиция двух синусоидальных волн (7.3) приводит к увеличению “амплитуды” A_g , и волна ω ведет себя как единичная синусоидальная волна с почти постоянной амплитудой, равной $2A$. В дальнейшем разность фаз $\Delta\tau$ увеличивается, и суперпозиция волн приводит к уменьшению значения функции A_g . В частности, если $\Delta\tau = \pi$, то амплитуда волны $s(x, t)$ равняется нулю, т.е. синусоидальные волны взаимно гасят друг друга. Очевидно, что существует такой интервал времени $t \gg T$, для которого функция A_g принимает достаточно малые значения.

Как следует из формулы (7.13), рассматриваемый процесс конструктивной и деструктивной интерференции носит периодический характер.

Период функции A_g определяется из равенства

$$\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2}(x - c_g t) - \frac{\pi d\lambda}{\lambda^2}[x - c_g(t + T_g)] = 2\pi.$$

Отсюда

$$T_g = \frac{2\lambda^2}{c_g d\lambda} \quad \text{и} \quad \omega_g = \frac{2\pi}{T_g}. \quad (7.17)$$

Точно так же можно изучить поведение A_g как функции расстояния x . Итак, мы видим, что интерференция приводит к формированию волновых групп. Их поведение описывается функцией A_g , которая графически представляет собой огибающую волны $s(x, t)$.

Конечно, в пределах каждой волновой группы значения волновой функции $s(x, t)$ изменяются, однако период колебаний практически постоянный и равняется T (рис. 7.2, ,).

Согласно формуле (7.10), длина волны группы определяется как

$$\lambda_g = \frac{2\lambda^2}{d\lambda} = \lambda \frac{2\lambda}{d\lambda} \gg \lambda. \quad (7.18)$$

Сравнивая равенства (7.17) и (7.18), получим

$$\lambda_g = c_g T_g, \quad (7.19)$$

т.е. c_g характеризует скорость, с которой произвольное значение группы (значение функции A_g) перемещается вдоль оси x . Поэтому c_g называется групповой скоростью.

Как упоминалось ранее, форма волны $s(x, t)$ изменяется с увеличением как координаты x , так и времени t (см. рис. 7.1, 7.2).

Отметим еще одно интересное свойство волновой группы. Если сравнить значения функции $s(x, t)$ для различных расстояний и времен, то можно найти такие интервалы x и t , для которых $s(x, t)$ принимает одни и те же значения. В соответствии с формулой (7.7), а также с учетом того, что

$$T_g > T,$$

эти интервалы определяются из равенств

$$x_2 - c_g t_2 = x_1 - c_g t_1 \quad \text{и} \quad x_2 - c t_2 = x_1 - c t_1 + \lambda$$

или

$$\Delta x = c_g \Delta t \quad \text{и} \quad \Delta x = c \Delta t + \lambda.$$

Таким образом, интервал времени, для которого амплитуда волны принимает одинаковое значение в различных точках x_1 и x_2 , определяется как

$$\Delta t = \frac{\lambda}{|c_g - c|},$$

а расстояние между этими двумя точками

$$\Delta x = \frac{\lambda c_g}{|c_g - c|}. \quad (7.20)$$

Итак, мы определили групповую скорость c_g как скорость распространения произвольного значения функции A_g вдоль оси x . В частности, если фаза волны

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) - \varphi_1$$

равняется πn , то

$$|s(x, t)| = |A_g(x, t)|.$$

Естественно, что энергия волны аккумулируется в основном в тех точках, где функция $|s(x, t)|$ достигает своего максимального значения. Поэтому можно ожидать, что групповая скорость характеризует также скорость распространения энергии.

Проанализируем далее поведение групповой скорости, задаваемой формулой (7.8).

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}.$$

Очевидно, что если фазовая скорость увеличивается с увеличением длины волны, т.е. $dc/d\lambda > 0$, то групповая скорость меньше фазовой.

Если фазовая скорость не зависит от λ , то групповая и фазовая скорости равны друг другу:

$$c_g = c.$$

Наконец, если фазовая скорость уменьшается с увеличением длины волны, то

$$c_g > c.$$

Часто бывает удобным представить групповую скорость (7.8) в другой форме. Например, заменяя λ на $2\pi/k$, получим

$$\lambda \frac{\partial c}{\partial \lambda} = \frac{1}{k} \frac{\partial c}{\partial (1/k)} = -k \frac{\partial c}{\partial k},$$

так как

$$d \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} dk.$$

Отсюда

$$c_g = c + k \frac{\partial c}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(ck). \quad (7.21)$$

Учитывая, что

$$ck = c \frac{2\pi}{\lambda} = c \frac{2\pi}{cT} = \omega,$$

имеем

$$c_g = d\omega/dk, \quad (7.22)$$

и зависимость групповой скорости c_g от частоты определяется функцией $\omega = \omega(k)$. Гипотетический пример такой функции показан на рис. 7.3, а. По определению, наклон этой кривой характеризует групповую скорость $d\omega/dk$, а наклон радиус-вектора ω/k равняется фазовой скорости.

Приведенные ниже равенства описывают способ представления групповой скорости, получающийся, если в формуле (7.8) заменить длину волны λ на c/f . Это дает

$$c_g = c - \frac{c}{f} \frac{dc}{d(c/f)} = c - cf \frac{dc}{f dc - cd f} = c - cf \frac{1}{f - cd f / dc} = - \frac{c^2 d f / dc}{f - cd f / dc}$$

или

$$\frac{1}{c_g} = \frac{f - cd f / dc}{-c^2 d f / dc} = \frac{1}{c} - \frac{f}{c^2} \frac{dc}{df}. \quad (7.23)$$

Предположим, что в некоторой точке x известны кривая $s(x, t)$, а также фазовая скорость волны. Тогда период T и длина волны $\lambda = cT$ определяются

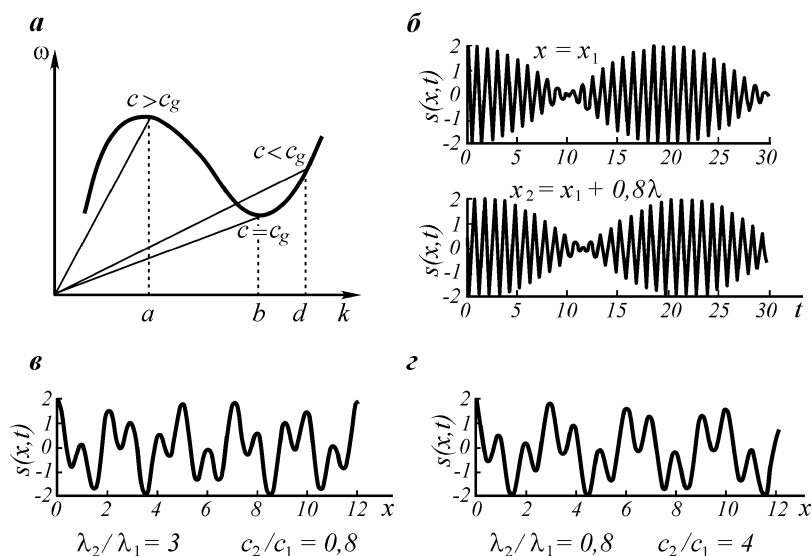


Рис. 7.3. Геометрическая иллюстрация фазовой и групповой скорости (а); иллюстрация формулы (7.24) (б); суперпозиции двух синусоидальных волн (в, г)

непосредственно из наблюдений. Кроме того, можно также определить период волновой группы. Для этого нужно измерить интервал времени между двумя максимумами огибающей волны, который и будет равняться T_g . Однако этой информации недостаточно для вычисления групповой скорости. То же самое относится и к случаю, когда в некоторый момент времени $t = t_0$ известна зависимость формы сигнала от расстояния. В то же время, если волна наблюдается на двух расстояниях x_1 и x_2 , то можно легко определить как фазовую, так и групповую скорости, а также другие параметры волновой группы и синусоидальных волн. Пусть, например,

$$c = \Delta x / \Delta t_1 \text{ и } c_g = \Delta x / \Delta t_2, \quad (7.24)$$

где

$$\Delta x = x_2 - x_1 \text{ и } \lambda > \Delta x,$$

а Δt_1 и Δt_2 – это интервалы времени между, соответственно, одинаковыми фазами синусоидальной волны и одинаковыми значениями группы A_g (рис. 7.3, а). Если последнее условие, $\lambda > \Delta x$, выполнено, то в точках x_1 и x_2 наблюдается одна и та же фаза.

Мы предполагали, что амплитуды обеих синусоидальных волн одинаковы, а их длины волн и фазовые скорости мало отличаются друг от друга. Данные условия являются чрезвычайно важными для формирования волновой группы. Как следует из выражения (7.6), с увеличением разностей $\Delta \lambda$ и Δc волновая группа исчезает (рис. 7.3, а, \tilde{a}). Если же амплитуды синусоидальных волн A_1 и A_2 различаются, но $\lambda_1 \approx \lambda_2$ и $c_1 \approx c_2$, то суперпозицию таких волн можно представить как сумму волновой группы и синусоидальной волны с амплитудой $A_1 - A_2$. Последовательности похожих волновых групп наблюдаются во всех приводимых здесь примерах. Это происходит из-за того, что рассматривается суперпозиция только двух синусоидальных волн.

Пример 2: несколько синусоидальных волн

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда в среде присутствует конечное число синусоидальных волн:

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos[k_i(x - c_i t) - \alpha_i], \quad (7.25)$$

где разность между амплитудами A_i , а также фазовыми скоростями c_i и волновыми числами k_i мала.

Предположим, что в некоторый момент времени $t = t_1$ фазы этих волн совпадают в некоторой точке $x = x_1$, т.е.

$$k_i(x_1 - c_i t_1) - \alpha_i = k_j(x_1 - c_j t_1) - \alpha_j. \quad (7.26)$$

Это означает, что суперпозиция этих волн является конструктивной. Другими словами, если мы снова заменим систему синусоидальных волн функцией

$$s(x, t) = A_g(x, t) \cos[k(x - ct) - \alpha],$$

то “амплитуда” A_g достигнет своего максимального значения, равного

$$A_g \sum_{i=1}^n A_i.$$

Предположим, что тот же эффект наблюдается на расстоянии $x_2 = x_1 + \Delta x$ в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$. Соответственно, фазы синусоидальных волн снова должны совпасть, т.е.

$$k_i(x_2 - c_i t_2) - \alpha_i = k_j(x_2 - c_j t_2) - \alpha_j. \quad (7.27)$$

Из равенств (7.26) – (7.27) получим

$$k_i \Delta x - k_i c_i \Delta t = k_j \Delta x - k_j c_j \Delta t$$

или

$$(k_i - k_j) \Delta x = (k_i c_i - k_j c_j) \Delta t. \quad (7.28)$$

Поскольку

$$k_i - k_j = \Delta k \text{ и } k_i c_i - k_j c_j = \Delta(kc), \quad (7.29)$$

мы снова приходим к известному выражению для групповой скорости

$$c_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta(kc)}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}, \text{ если } \Delta k \rightarrow 0.$$

Таким образом, система, состоящая из n синусоидальных волн с близкими значениями k и c , образует волновую группу, которая описывается некоторой функцией $A_g(x, t, c_g)$ и распространяется со скоростью c_g .

Пример 3: нестационарные волны

Рассмотрим поведение бегущей волны, имеющей узкий частотный спектр. Учитывая, что в этом случае волновое число $k = \omega/c$ также будет изменяться очень мало:

$$k_0 - \varepsilon < k < k_0 + \varepsilon$$

и

$$\varepsilon/k_0 \ll 1,$$

волну $s(x, t)$ можно представить как

$$s(x, t) = \text{Re } S(x, t),$$

где

$$S(x, t) = \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} A_k e^{i[k(x - ct) - \alpha_k]} dk. \quad (7.30)$$

Как и ранее, мы будем предполагать, что при изменении k амплитуда A_g и скорость $c(k)$ меняются очень медленно.

Разложение произведения $k c$, т.е. круговой частоты $\omega(k)$ в ряд Тейлора дает

$$k c = k_0 c_0 + \frac{\partial(k c)}{\partial k} (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(k c)}{\partial k^2} (k - k_0)^2 + \dots,$$

где производные берутся при $k = k_0$ и $c = c(k_0)$.

Пренебрегая членами второго и более высоких порядков по $(k - k_0)$, экспоненциальный член в (7.30) можно записать как

$$e^{i[k(x - ct) - \alpha_k]} = e^{-i k_0 c_0 t} e^{i k_0 \frac{\partial(k c)}{\partial k} t} e^{i \left(k x - \alpha_k - \frac{\partial(k c)}{\partial k} k t \right)}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial(k c)}{\partial k} = k_0 \frac{\partial c}{\partial k} + c_0,$$

имеем

$$e^{i k_0 \frac{\partial(k c)}{\partial k} t} = e^{i k_0^2 \frac{\partial c}{\partial k} t} e^{-i k_0 c_0 t}.$$

Соответственно,

$$S(x, t) = e^{i k_0^2 \frac{\partial c}{\partial k} t} \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} A_k e^{i[k(x - c_g t) - \alpha_k]} dk, \quad (7.31)$$

где

$$c_g = \frac{\partial(k c)}{\partial k} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \text{ если } k = k_0,$$

является групповой скоростью.

Таким образом, волну можно представить как

$$\begin{aligned} s(x, t) = & \cos \left(k_0^2 t \frac{\partial c}{\partial k} \right) \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} A_k \cos[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk - \\ & - \sin \left(k_0^2 t \frac{\partial c}{\partial k} \right) \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} A_k \sin[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk. \end{aligned}$$

Независимо от выбора переменных интегрирования, оба интеграла описывают синусоидальные волны, распространяющиеся с одинаковой скоростью c_g . Поэтому данные интегралы представляют собой нестационарные волны, сохраняющие свою форму вдоль оси x .

Вводя обозначения

$$f_1(x - c_g t) = \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} A_k \cos[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk$$

и

$$f_2(x - c_g t) = \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} A_k \sin[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk,$$

получим

$$s(x, t) = f_1(x - c_g t) \cos[k_0(c_g - c_0)t] - f_2(x - c_g t) \sin[k_0(c_g - c_0)t], \quad (7.32)$$

так как

$$c_g - c_0 = k_0 \frac{dc}{dk}.$$

Следовательно, как и в предыдущем примере, суперпозиция синусоидальных волн приводит к формированию волновой группы, распространяющейся со скоростью c_g , при условии, что волновые числа и фазовые скорости этих волн мало отличаются друг от друга.

Из выражения (7.32) следует, что амплитуда волны в точках x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 имеет одно и то же значение

$$s(x_1, t_1) = s(x_2, t_2),$$

если

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{k_0 |c_g - c_0|}$$

и

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi c_g}{k_0 |c_g - c_0|}.$$

При выводе формулы (7.32) мы сохранили только первые два члена ряда Тейлора. Поэтому групповая скорость c_g не зависит от волнового числа и равняется

$$c_g = \frac{\partial(kc)}{\partial k} = c_g(k_0).$$

Согласно (7.8), это выражение справедливо, если групповая скорость является линейной функцией длины волны:

$$c = a + b\lambda.$$

В общем случае, когда фазовая скорость является произвольной функцией λ ,

приближение (7.32) будет достаточно точным при условии, что сумма членов ряда Тейлора

$$t \left(\frac{1}{2} \frac{dc}{dk} \varepsilon^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2c}{dk^2} \varepsilon^3 + \dots \right)$$

очень мала.

Это, в частности, означает, что, чем больше значение времени t , тем меньше должен быть диапазон изменения волнового числа k . Действительно, с увеличением времени, форма волны разделяется на две небольшие группы с более узким диапазоном k , и выражение (7.32) можно применить к каждой из этих групп. Конечно, такие же эффекты наблюдаются во втором примере, когда нестационарная волна формируется из конечного числа синусоидальных волн.

Здесь необходимо заметить следующее:

а) до сих пор мы рассматривали суперпозицию синусоидальных волн с очень близкими частотами и волновыми числами;

б) по этой причине суперпозиция таких волн приближенно описывается единственной волновой группой, скорость распространения которой равняется c_g ;

в) в следующем разделе мы рассмотрим более общий случай очень широкого диапазона изменения частот и волновых чисел;

г) суперпозиция таких волн приводит к форме волны, в которой практически невозможно различить отдельную группу с фиксированной скоростью;

д) однако и в этом случае понятие групповой скорости играет важную роль.

7.2. СУПЕРПОЗИЦИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН И МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

В предыдущем разделе мы рассмотрели распространение волн, образованных синусоидальными волнами с почти одинаковыми значениями волнового числа k и фазовой скорости c .

В отличие от предыдущего случая, здесь мы будем предполагать, что оба параметра могут изменяться произвольным образом. Однако перед тем как приступить к изучению таких волн, полезно еще раз обратиться к простейшему случаю двух синусоидальных волн, имеющих одинаковые амплитуды и близкие значения параметров k и c . Предположим снова, что волна $s(x, t)$ представляется в виде

$$s(x, t) = A_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]. \quad (7.33)$$

Здесь

$$k_1 = k_0 - \Delta k/2, \quad k_2 = k_0 + \Delta k/2$$

и

$$\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega/2, \quad \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega/2.$$

Суммируя, получим

$$s(x, t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos(k_0x - \omega_0t)$$

или

$$s(x, t) = 2A \cos(k_0x - \omega_0t), \quad (7.34)$$

где

$$A = 2A_0 \cos \frac{\Delta k}{2} (x - c_g t) \quad (7.35)$$

является амплитудой волновой группы, а

$$c_g = \Delta \omega / \Delta k \quad (7.36)$$

определяет ее скорость.

Как мы уже знаем, если фазы синусоидальных волн равны друг другу:

$$k_1x - \omega_1t = k_2x - \omega_2t, \quad (7.37)$$

то амплитуда A имеет максимальное значение, равное $2A_0$. Действительно, из равенства (7.37) имеем

$$x \Delta k = t \Delta \omega$$

или

$$x = c_g t, \quad (7.38)$$

и подстановка этого выражения в формулу (7.35) дает

$$A = 2A_0.$$

Таким образом, максимальное значение групповой амплитуды наблюдается только при таких значениях расстояния и времени, когда фазы волн равны друг другу. Другими словами, несмотря на то, что волновые числа и фазы волн почти одинаковы, их фазы совпадают только на определенных расстояниях и в определенные моменты времени. В этом случае эффект конструктивной интерференции максимален.

При увеличении разности фаз групповая амплитуда A уменьшается и, в конце концов, когда фазы различаются на π , синусоидальные волны взаимно гасят друг друга: $A = 0$.

Предположим, что амплитуда A равна некоторой постоянной C при $x = x_1$ и $t = t_1$. Тогда, согласно (7.35), то же значение амплитуды будет наблюдаться для другой пары значений: x_2 и t_2 , если будет выполнено следующее условие

$$x_1 - c_g t_1 = x_2 - c_g t_2.$$

Следовательно, имеется два соотношения, связывающих групповую скорость c_g , с одной стороны, и расстояние и время – с другой:

$$x = c_g t \text{ и } \Delta x = c_g \Delta t. \quad (7.39)$$

Первое из этих соотношений описывает, как распространяется максимум групповой амплитуды, а второе характеризует перенос произвольного значения A .

Как следует из выражения (7.34), равенство фаз функции $s(x, t)$ приводит к следующему соотношению:

$$c = \Delta x / \Delta t,$$

которое совпадает со вторым равенством (7.39).

Однако в одном случае Δx является расстоянием между точками с одинаковой амплитудой, а в другом – расстоянием между точками с одинаковой фазой.

Следует отметить, что выражение (7.38) часто используют для оценки групповой скорости произвольной волны.

Приступим теперь к обсуждению общего случая нестационарной волны, при рассмотрении которого естественно использовать интегралы Фурье.

Представим произвольную волну, распространяющуюся вдоль оси x , как сумму синусоидальных волн с различными волновыми числами k . Тогда произвольную функцию, описывающую волну (например, смещение) в точке x и в момент времени t можно представить как (см. приложение 7)

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k, t) e^{-ikx} dk, \quad (7.40)$$

где

$$g(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (7.41)$$

В то же время в главе 3 было показано, что если волна ведет себя как синусоидальная функция координаты x , то она должна быть также синусоидальной функцией времени. В противном случае функция $s(x, t)$ не будет удовлетворять волновому уравнению.

Соответственно, для функции g имеем

$$g(k, t) = S_1 e^{i\omega t} + S_2 e^{-i\omega t}. \quad (7.42)$$

Подстановка последнего равенства в (7.40) дает

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t), \quad (7.43)$$

где

$$s_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(k) e^{-i(kx - \omega t)} dk$$

и

$$s_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(k) e^{-i(kx + \omega t)} dk. \quad (7.44)$$

Очевидно, что подынтегральные выражения, стоящие в первом и втором интеграле (7.44), описывают волны, бегущие в противоположных направлениях. В то же время функции $S_1(k)$ и $S_2(k)$ являются комплексными амплитудами этих волн, содержащими информацию об их амплитудах и начальных фазах. Следует заметить, что в общем случае частота ω является произвольной функцией волнового числа: $\omega = \omega(k)$.

Согласно определению (7.44), имеем

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x, t) e^{-ik(x-ct)} dx$$

(7.45)

и

$$S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(x, t) e^{-ik(x+ct)} dx.$$

Это, в частности, показывает, что разложение произвольной волны на синусоидальные волны с различными волновыми числами k требует рассмотрения поведения волн как для положительных, так и для отрицательных значений x .

Для иллюстрации физического смысла выражений (7.44) предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ источник вызывает смещение, описываемое функцией $f(x)$, т.е.

$$s(x, 0) = f(x).$$

Помимо этого, предположим, что скорость частиц в этот момент равняется нулю. Таким образом, вводятся следующие начальные условия:

$$s(x, 0) = f(x) \text{ и } \frac{\partial s(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (7.46)$$

Очевидно, что задание волны в некоторый момент времени $t = 0$ определяет ее поведение во все последующие моменты.

Снова применяя интеграл Фурье, имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk \quad (7.47)$$

и

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx,$$

где функция $F(k)$ описывает амплитуду и фазу синусоидальных волн в момент времени $t = 0$.

Функцию $f(x)$ удобно представить в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x-ct)} dk + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x+ct)} dk. \quad (7.48)$$

Последнее выражение описывает смещение $s(x, t)$ в момент времени $t = 0$ как суперпозицию волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

С увеличением времени амплитуда и начальная фаза каждой из синусоидальных волн остается постоянной, а полная фаза меняется из-за присутствия члена e^{-ikx} . Поэтому формула (7.48) характеризует волну в произвольный момент времени $t > 0$, и мы получаем

$$s(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x-ct)} dk + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x+ct)} dk. \quad (7.49)$$

Легко показать, что функция, определяемая выражением (7.49), удовлетворяет начальным условиям (7.56). Действительно,

$$s(x, 0) = \frac{1}{4\pi} 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk = f(x)$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ikc}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk - \frac{ikc}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk = 0.$$

Рассмотрим теперь специальный случай, когда смещение $f(x)$ в начальный момент времени является симметричной функцией от x :

$$f(x) = f(-x).$$

Тогда ее спектр можно записать как

$$F(k) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx, \quad (7.50)$$

и он также является симметричной функцией, но только от волнового числа k .

Учитывая этот результат, выражение (7.49) можно представить в виде

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos k(x - ct) dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos k(x + ct) dk$$

или

$$s(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos kx \cos(ckt) dk. \quad (7.51)$$

Подынтегральное выражение описывает стоячую волну, и это не удивительно, так как суперпозиция двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях и имеющих одинаковые амплитуды и волновые числа, всегда приводит к появлению стоячей волны.

Для изучения интерференции синусоидальных волн с различными волновыми числами, воспользуемся выражениями (7.51) в предположении, что функция $f(x, 0)$ является четной, а ее спектр $F(k)$ постоянен и равняется, например, единице. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение смещения $s(x, 0)$ описывается функцией

$$f(x, 0) = \begin{cases} 0 & x \leq -\varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 0 & x \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (7.52)$$

т.е. смещение имеет некоторое постоянное ненулевое значение на интервале $-\varepsilon < x < \varepsilon$,

а вне этого интервала равняется нулю. Тогда из равенств (7.47) получаем

$$F(k) = 2 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} e^{ikx} dx = \frac{1}{2i\varepsilon k} (e^{ik\varepsilon} - e^{-ik\varepsilon}) = \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon}.$$

Считая, что ширина импульса $f(x, 0)$ стремится к нулю, а его амплитуда неограниченно возрастает, в пределе получим дельта-функцию и, соответственно,

$$F(k) = 1.$$

Согласно (7.51), волну, вызванную такой силой, можно представить как

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x - ct) dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x + ct) dk,$$

где предполагается, что фазовая скорость c является однозначной действительной функцией волнового числа и $c > 0$.

Выражение (7.53) показывает, что смещение $s(x, t)$ является суммой двух похожих интегралов, описывающих волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Остановимся поэтому на первом интеграле:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x - ct) dk, \quad (7.54)$$

который описывает суперпозицию бесконечного числа синусоидальных волн единичной амплитуды со всеми возможными значениями волнового числа и, в общем случае, с различным фазовыми скоростями.

Прежде чем вычислять интеграл I , полезно сначала качественно рассмотреть интерференцию таких волн. Для этого воспользуемся выражением (7.53).

В момент времени $t = 0$ фазы волн одинаковы и равны нулю в точке начала координат $x = 0$. Следовательно, эти волны усиливают друг друга, образуя в окрестности источника дельта-функцию. Однако во всех других точках, где $x \neq 0$, разность фаз такова, что в силу интерференции эти волны полностью гасят друг друга. Соответственно, смещение всюду, за исключением точки $x = 0$, обращается в ноль.

Этот пример ясно показывает, что в данном случае результат суперпозиции синусоидальных волн определяется только их разностью фаз. Если фазовая скорость не зависит от волнового числа, дельта-функция (а также любая другая функция) распространяется вдоль оси z , не меняя своей формы. И согласно (7.53), она наблюдается во всех точках x , когда фазы всех синусоидальных волн равны нулю:

$$k(x - ct) = 0,$$

т.е. они совпадают друг с другом.

В те же моменты времени в других точках, включая точку $x = 0$, фазы различаются между собой и сумма интегралов в (7.53) становится равной нулю.

В общем случае, когда фазовая скорость является функцией волнового числа, поведение волн становится гораздо более сложным, в частности, форма волны меняется в зависимости от времени и расстояния. Это связано с тем, что синусоидальные волны обладают разными фазовыми скоростями и разность фаз между ними зависит от времени и расстояния, а также от волнового числа. Если в окрестности некоторой точки x в момент времени t имеются синусоидальные волны с близкими значениями k , то можно ожидать проявления конструктивной интерференции. Конечно, чем шире диапазон волновых чисел, для которых фаза волны остается практически постоянной, тем больше амплитуда данной группы.

И, наоборот, в местах, где фаза заметно изменяется, наблюдается деструктивная интерференция и амплитуда волны достаточно мала.

Чтобы изучить поведение волн более подробно, получим, прежде всего, соотношение, связывающее расстояние x и время t , с одной стороны, и волновое число синусоидальных волн, имеющих практически одинаковую фазу – с другой. Очевидно, что, если в пределах некоторого диапазона волновых чисел, фаза волны $\varphi(k)$ практически не зависит от k , это можно выразить как

$$\frac{\partial \varphi(k)}{\partial k} = 0. \quad (7.55)$$

Фаза, удовлетворяющая данному условию для некоторого значения волнового числа k_0 , называется стационарной.

Поскольку

$$\varphi(k) = k(x - ct),$$

уравнение (7.55) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial k}[k(x - ct)] = x - \frac{\partial}{\partial k}(kc)t = 0 \quad (7.56)$$

или

$$x = t c_g(k_0). \quad (7.57)$$

Здесь c_g – групповая скорость, соответствующая стационарным значениям волнового числа k_0 .

Согласно (7.57), групповая скорость равняется просто отношению расстояния x ко времени t . Этот результат очень важен, поскольку он используется при выводе приближенных выражений для множества интегралов, включая те, которые описывают интерференцию синусоидальных волн. Помимо этого, как было отмечено ранее, данный результат позволяет оценить групповую скорость произвольной волны, наблюдаемой в разные моменты времени на различных расстояниях.

Далее мы обратимся к первому из упомянутых приложений этой формулы и предположим, что функция $c_g(k)$ известна. Примеры, иллюстрирующие ее поведение, показаны на рис. 7.4, а, á, â.

Из соотношения (7.57) следует, что каждой паре x и t соответствует одно значение групповой скорости c_g . Зная значения функции $c_g(k)$, можно определить волновое число k_0 . Эта процедура показана на рис. 7.4, из которого видно, что целесообразно различать следующие три случая.

А. Каждому значению групповой скорости c_g соответствует только одно значение волнового числа k_0 (рис. 7.4, а, á).

Б. Существует несколько значений k_0 (рис. 7.4, â).

В. Предположим, что отношение x/t лежит за пределами диапазона зна-

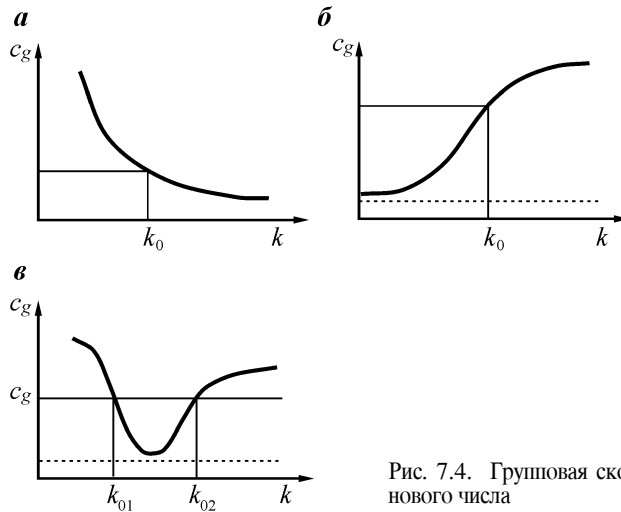


Рис. 7.4. Групповая скорость как функция волнового числа

чений функции $c_g(k)$. Это означает, что для данных значений x и t фазы синусоидальных волн не являются близкими.

Зафиксируем координату x и посмотрим, как меняется форма волны со временем. Из соотношения (7.57) следует, что с течением времени групповая скорость c_g и, следовательно, волновое число также изменяются. Таким образом, в каждый момент времени форма волны характеризуется некоторым значением волнового числа k_0 , и волновую функцию можно представить как

$$s(t) = A(t)\cos[\omega_0(t)t - k_0(t)x], \quad (7.58)$$

где

$$k_0(t) = \frac{\omega_0(t)}{c(\omega_0)}.$$

Стоящие в этом выражении величины называются мгновенной частотой и мгновенным волновым числом.

Существенно, что фазы синусоидальных волн с волновыми числами, близкими к k_0 , изменяются очень медленно и суперпозиция таких волн приближенно равняется $s(t)$.

Учитывая, что волновые числа указанной группы принадлежат относительно узкому диапазону

$$k_0 - \varepsilon < k < k_0 + \varepsilon, \quad (7.59)$$

следует предположить, что фазу $\varphi(k)$ можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться в нем первыми тремя членами. В этом случае

$$\begin{aligned} k(x - ct) &= k_0(x - c_0 t) + (k - k_0) \frac{\partial}{\partial k} [k(x - ct)] + \\ &+ \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} [k(x - ct)] + \dots, \end{aligned} \quad (7.60)$$

где производные берутся в точке

$$k = k_0 \text{ и } c_0 = c(k_0).$$

Из равенства (7.56) следует, что второй член этого разложения обращается в ноль, и мы имеем

$$k(x - ct) = k_0(x - c_0 t) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} [k(x - ct)]$$

или

$$k(x - ct) = k_0(x - c_0 t) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{\partial c_g}{\partial k} t, \quad (7.61)$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial k}[k(x - ct)] = x - c_g t$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}[k(x - ct)] = -t \frac{\partial c_g}{\partial k},$$

где $\partial c_g / \partial k$ – производная групповой скорости при $k = k_0$.

Предполагая, что в силу высокочастотных осцилляций интегрирование за пределами интервала $k_0 - \varepsilon < k < k_0 + \varepsilon$ дает очень малый вклад, и, подставляя (7.61) в (7.54), получим

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} \cos \left[k_0(x - c_0 t) - \frac{t}{2} \frac{\partial c_g}{\partial k} (k - k_0)^2 \right] dk. \quad (7.62)$$

Здесь 2ε – ширина диапазона волновых чисел, для которых синусоидальные волны имеют практически одинаковую фазу.

Помимо этого, предположим, что время t достаточно велико, так что

$$\frac{\varepsilon}{2} t \frac{\partial c_g}{\partial k} \gg 1. \quad (7.63)$$

Вводя новую переменную

$$m^2 = \frac{t}{2} \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0)^2, \quad (7.64)$$

имеем

$$2m \, dm = t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0) dk.$$

Таким образом,

$$dk = \frac{2m \, dm}{t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0)}$$

или

$$dk = \frac{\sqrt{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|} (k - k_0) dm}{\sqrt{t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|} (k - k_0)} = \sqrt{\frac{2}{t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} dm. \quad (7.65)$$

Отсюда

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[k_0(x - c_0 t) \mp m^2] dm. \quad (7.66)$$

В силу неравенства (7.63) верхний и нижний пределы интегрирования в (7.54) изменились. Другими словами, мы предполагаем, что вклад в интеграл значений функции за пределами интервала $k_0 - \epsilon < k < k_0 + \epsilon$ пренебрежимо мал.

Отрицательный либо положительный знак перед m^2 берется в соответствии с неравенствами $\partial c_g / \partial k > 0$ или $\partial c_g / \partial k < 0$.

Подынтегральное выражение в (7.56) можно представить как

$$\cos[k_0(x - c_0 t) \mp m^2] = \cos k_0(x - c_0 t) \cos m^2 \pm \sin k_0(x - c_0 t) \sin m^2.$$

Следовательно,

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} \left[\cos k_0(x - c_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos m^2 dm \pm \sin k_0(x - c_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \sin m^2 dm \right].$$

Как мы уже знаем (см. главу 6), данные интегралы являются табличными и равны друг другу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos m^2 dm = \int_{-\infty}^{\infty} \sin m^2 dm = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом,

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} [\cos k_0(x - c_0 t) \pm \sin k_0(x - c_0 t)].$$

Поскольку

$$\cos k_0(x - c_0 t) \pm \sin k_0(x - c_0 t) = \sqrt{2} \cos \left[k_0(x - c_0 t) \mp \frac{\pi}{4} \right],$$

последнее выражение дает

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} \cos \left[k_0(x - c_0 t) \mp \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7.67)$$

Мы нашли приближенное выражение для интеграла I в формуле (7.54), который описывает синусоидальную волну с волновым числом k_0 и фазовой скоростью c_0 , задаваемой формулой (7.58).

Амплитуда этой волны

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}}$$

обратно пропорциональна времени и, как было предсказано ранее, производной групповой скорости по волновому числу.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. Данный метод оценки доминирующей группы был разработан Кельвином и называется методом стационарной фазы.

2. До этого аналогичный подход был предложен Стоксом.

3. Производная $\partial c_g / \partial k$ в соотношении (7.67) вычисляется для значения волнового числа, равного k_0 . Это значение определяется из равенства (7.57) при условии, что зависимость $c_g(k)$ является известной.

Таким образом, различным значениям x и t соответствуют, в общем случае, разные значения k_0 и $\partial c_g / \partial k$.

4. Вполне возможно, что в некоторых стационарных точках, где $\partial \varphi / \partial k = 0$, первая производная $\partial c_g / \partial k$ также обращается в ноль. Примером такой точки может служить минимум кривой $c_g(k)$, показанной на рис. 7.4, а.

Можно представить себе такую зависимость фазовой скорости от волнового числа, при которой производная $\partial c_g / \partial k$ всегда равняется нулю. Действительно, предположим, что

$$c = a + b/k,$$

где a и b – некоторые постоянные.

Тогда,

$$kc = ak + b, c_g = a \text{ и } \frac{\partial c_g}{\partial k} = 0.$$

5. При выводе соотношения (7.67) предполагалось, что можно пренебречь членами ряда Тейлора, содержащими вторые производные $\partial^2 c_g / \partial k^2$ и производные более высокого порядка. Очевидно, что если эти члены равны нулю, то асимптотическое выражение для I становится точным. Например, это происходит в том случае, когда фазовую скорость c можно задать как

$$c = \frac{a_1}{k} + a_2 + a_3 k,$$

где a_1 , a_2 и a_3 – некоторые постоянные коэффициенты.

6. Поскольку фазовая скорость синусоидальных волн меняется в зависимости от волнового числа, интервал x , в пределах которого наблюдается результирующая волна, растет с увеличением времени. Однако энергия волны остается постоянной. Поэтому амплитуда волны со временем уменьшается, что также следует из формулы (7.67).

Предположим, что расстояние x фиксировано, тогда производная $\partial c_g / \partial k$ определяется только временем. Соответственно, правая часть выражения (7.67) является только функцией времени. В частности, она равна нулю при

$$k_0(x - c_0 t) \mp \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2n - 1).$$

Это означает, что амплитуды синусоидальных волн, волновые числа которых близки к значению k_0 , практически равны нулю.

7. Смещение $s(x, t)$, вызванное источником в виде дельта-функции, определяется двумя интегралами в формуле (7.53). Мы применили метод стационарной фазы к первому из них. Таким же образом можно оценить доминирующую группу для второго интеграла

$$\int_0^{\infty} \cos k(x + ct) dk.$$

Волновое число, соответствующее стационарной фазе, определяется из равенства

$$\frac{\partial}{\partial k} k(x + ct) = 0 \quad \text{или} \quad x = -c_g t$$

Поскольку мы предположили, что

$$t > 0 \quad \text{и} \quad c_g > 0,$$

рассматриваемый интеграл даст доминирующую группу только для отрицательных значений x , и, следовательно, выражение (7.67) описывает главную часть функции $s(x, t)$ при $x > 0$.

Полезно также обсудить сходимость интеграла I, задаваемого формулой (7.54). С этой целью рассмотрим интеграл

$$L = \int_0^{\infty} \cos(\alpha k^p) dk, \quad (7.68)$$

где α – некоторое число, а $p > 1$.

Очевидно, что подынтегральное выражение является осциллирующей функцией, максимальное значение которой равняется единице, независимо от значения k . В то же время интервалы, на которых данная функция сохраняет знак, уменьшаются с ростом k . Чтобы это продемонстрировать, получим оценку ширины интервала Δk между двумя точками, для которых

$$|\cos(\alpha k^p)| = 1. \quad (7.69)$$

Полагая

$$\alpha k_n^p = \pi n \quad \text{и} \quad \alpha k_{n+1}^p = \pi(n+1),$$

имеем

$$k_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1/p} \text{ и } k_{n+1} = \left[\frac{\pi(n+1)}{\alpha} \right]^{1/p}.$$

Здесь n – целое число.

Отсюда

$$\Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1/p} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) - 1 \right]^{1/p} = \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1/p} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right].$$

Учитывая, что

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/p} \approx 1 + \frac{1}{pn},$$

получим

$$\Delta k_n \approx \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/p} \frac{1}{n^{(1+1/p)}} \quad (7.70)$$

Следовательно, интервал, на котором функция $\cos(\alpha k^p)$ сохраняет свой знак, уменьшается с ростом k . Такое поведение Δk_n обеспечивает сходимость интеграла L . Действительно, данный интеграл можно представить в виде знакопеременного ряда

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S_n, \quad (7.71)$$

где

$$S_n = \left| \int_{k_n}^{k_{n+1}} \cos(\alpha k^p) dk \right|.$$

Поскольку интеграл S_n уменьшается с ростом n , мы заключаем, что сумма членов этого ряда сходится к некоторому пределу. Более того, известно, что последний член S_N ряда

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n S_n$$

больше суммы отброшенных членов.

Все изложенное можно применить непосредственно к интегралу I . Например, если аргумент имеет вид

$$kx - \omega t = k|x - c(\omega)t| = k \left(x - \frac{k^p}{a} t \right),$$

то его можно заменить на

$$-\frac{t}{a} k^{p+1},$$

при условии, что

$$k \gg (ax/t)^{1/p}.$$

Таким образом, интеграл I сходится, если $p > 0$. Существенно, что время t определяет ширину интервала Δk_n , в пределах которого знак подынтегрального выражения не меняется. В частности влияние подынтегрального выражения в окрестности стационарной точки становится со временем сильнее. Это происходит в силу того, что вне этого интервала увеличивается частота осцилляций функции

$$\Phi = \cos(kx - \omega t)$$

Для иллюстрации применения метода стационарной фазы, рассмотрим два примера волн с различными зависимостями фазовой скорости от волнового числа.

Пример 1

Предположим, что

$$c(k) = a\sqrt{k}.$$

Тогда групповая скорость записывается как

$$c_g(k) = \frac{\partial}{\partial k}(a\sqrt{k^3}) = \frac{3}{2} a\sqrt{k} = \frac{3}{2} c$$

a — волновое число, соответствующее стационарной фазе, определяется из равенства

$$\frac{3}{2} a\sqrt{k} = \frac{x}{t}$$

или

$$k_0 = 4x^2/9a^2t^2. \quad (7.72)$$

Производная $\partial c_g/\partial k$ является положительной и равняется

$$\frac{\partial c_g}{\partial k} = \frac{3}{4} \frac{a}{\sqrt{k}}.$$

В частности, в стационарной точке

$$\frac{\partial c_g}{\partial k} = \frac{9a^2t}{8x}, \text{ если } k = k_0.$$

Таким образом, амплитуда A в выражении (7.67) есть

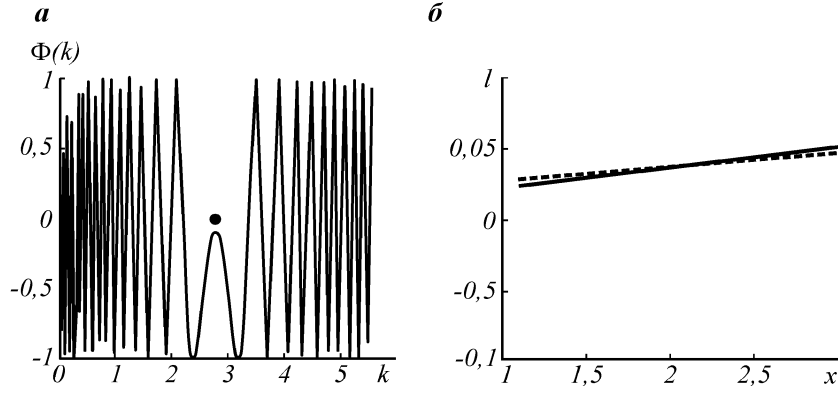


Рис. 7.5. Поведение подынтегрального выражения $\Phi(k)$ в первом примере; точка на рисунке указывает положение стационарной точки k_0 (а); результаты вычисления с использованием формул (7.54) (сплошная линия) и (7.73) (пунктирная линия) для случая, когда $a = 1$ и $t = 1,5$ (б)

$$A = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi 8x}{9a^2 t^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}at}.$$

Для фазы волны имеем

$$\varphi(k_0) = k_0(x - c_0 t) - \frac{\pi}{4} = \frac{4x^2}{9a^2 t^2} \left(x - at \frac{2x}{3at} \right) - \frac{\pi}{4} = \frac{4x^3}{27a^2 t^2} - \frac{\pi}{4}$$

и, соответственно,

$$I \approx \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}at} \cos\left(\frac{4x^3}{27a^2 t^2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.73)$$

Эти простые выкладки проиллюстрированы рис. 7.5, а. Благодаря конструктивной интерференции синусоидальных волн с различными волновыми числами k , мы наблюдаем результирующую волну, образованную вокруг стационарной точки k_0 . Эта часть интервала интегрирования даст основной вклад в интеграл. Сравнение результатов численного интегрирования с выражением (7.73) приведено на рис. 7.5, б.

Пример 2

Пусть

$$c(k) = ak.$$

Тогда групповая скорость равняется

$$c_g(k) = a \frac{\partial k^2}{\partial k} = 2ak = 2c \quad (7.74)$$

а ее производная по k есть

$$\frac{\partial c_g}{\partial k} = 2a. \quad (7.75)$$

Следовательно, амплитуда A дается выражением

$$A = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{2at}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}.$$

Поскольку

$$x = c_g t = 2 a k_0 t$$

имеем для фазы волны

$$\varphi(k_0) = \frac{x}{2at} \left(x - at \frac{x}{2at} \right) - \frac{\pi}{4} = \frac{x^2}{4at} - \frac{\pi}{4}$$

и соответственно

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \cos\left(\frac{x^2}{4at} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.76)$$

Из формулы (7.75) следует, что производные $\partial^n c_g / \partial k^n$ второго и более высокого порядка равны нулю. Таким образом, мы получили точное выражение для интеграла I . Другими словами, выражение (7.76) остается справедливым при любых расстояниях и для произвольного момента времени.

До сих пор метод стационарной фазы использовался для оценки интегралов, описывающих суперпозицию волн, амплитуда которых была одинакова и равнялась единице.

Общий случай

Применим теперь рассмотренный метод к случаю, когда величина подынтегрального выражения зависит от переменной интегрирования. В качестве примера рассмотрим волну, которая в каждой точке x является комбинацией синусоидальных волн различной частоты. Применяя интеграл Фурье, получим

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

и

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, \omega) e^{i\omega t} dt \quad (7.77)$$

Как и ранее, предположим, что источник находится в точке $x = 0$ и его зависимость от времени описывается следующим образом:

$$s(0, t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (7.78)$$

Снова используя интеграл Фурье, получим

$$s(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = f(t), \quad (7.79)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (7.80)$$

Следует заметить, что, в отличие от предыдущего случая (7.47), в выражении (7.80) интеграл берется только по положительным значениям переменной. Очевидно, что волна однозначно определяется волновым уравнением и начальным условием (7.78).

Поскольку функция $g(x, t)$ в (7.77) является синусоидальной функцией x , выражение (7.79) можно представить как

$$s(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i(\omega t \mp kx)} d\omega,$$

так как

$$x = 0.$$

Учитывая, что амплитуда и начальная фаза каждой из синусоидальных волн не меняются, а фаза ведет себя как $e^{\mp ikx}$, для расстояния x имеем

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i(\omega t - kx)} d\omega, \text{ если } x > 0, \quad (7.81)$$

и

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i(\omega t + kx)} d\omega, \text{ если } x < 0. \quad (7.82)$$

Мнимая часть интеграла в (7.81) равна нулю, и, следовательно, функцию $s(x, t)$ можно записать как

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i x h(\omega)} d\omega. \quad (7.83)$$

Здесь $F(\omega) = S(\omega)$ – комплексная амплитуда, зависящая от ω , $k(\omega)$ – действительное волновое число и

$$h(\omega) = k(\omega) - \frac{\omega t}{x}. \quad (7.84)$$

Подынтегральное выражение является произведением двух функций. Первая из них, $S(\omega)$, меняется с частотой, как правило, довольно медленно, в то время как экспоненциальный множитель при достаточно больших $xh(\omega)$ может изменяться очень быстро. Таким образом, в данном случае осциллирующий характер подынтегрального выражения определяется в основном вторым сомножителем.

Независимо от того, какой физический смысл придается функции $s(x, t)$, мы будем полагать, что подынтегральное выражение является синусоидальной волной частоты ω . Его амплитуда и начальная фаза обычно являются функциями ω . По определению, приведенный выше интеграл описывает суперпозицию таких волн, и очевидно, что на интервале частот, для которых фаза

$$\varphi(\omega) = xh(\omega) \quad (7.85)$$

меняется лишь незначительно, сумма синусоид может иметь относительно большую амплитуду. Как мы уже знаем, в этом случае наблюдается конструктивная интерференция, и указанные волны образуют доминирующую группу.

В то же время вне этого диапазона фаза $\varphi(\omega)$ может меняться очень быстро и, в результате, синусоидальные волны начнут гасить друг друга, т.е. их сумма станет очень маленькой. Следовательно, как и в предыдущем случае, интеграл в выражении (7.83) в основном определяется первым интервалом. Конечно, между этими диапазонами не существует четкой границы, поскольку в реальности всегда существует некая промежуточная зона.

Наш анализ снова показывает, что мы должны определить положение первого интервала и после этого выполнить по нему интегрирование. В реализации этих двух шагов и состоит метод стационарной фазы.

Поскольку на этом интервале фаза $\varphi(\omega)$ изменяется мало, определим частоту ω_0 , характеризующую стационарную фазу, из уравнения

$$\frac{\partial h(\omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (7.86)$$

Как мы знаем, точка ω_0 называется стационарной. Она соответствует максимуму или минимуму функции $h(\omega)$, а разность фаз

$$\Delta\varphi = \varphi(\omega) - \varphi(\omega_0) = x[h(\omega) - h(\omega_0)]$$

в окрестности ω_0 существенно зависит от значения параметра x . Так, например, если этот параметр относительно мал, то даже достаточно большие отклонения от стационарной точки ω_0 могут приводить к малым изменениям фазы. И, наоборот, когда параметр x достаточно большой, малая разность $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ может дать большое изменение фазы. Иными словами, ширина первого интервала в этом случае уменьшается. Таким образом, только при больших значениях x можно ожидать, что указанный интервал окажется достаточно узким, причем вне этого интервала фаза $\varphi(\omega)$ будет меняться очень быстро. Эти два обстоятельства позволяют сильно упростить

выражение (7.83). Прежде всего, мы заменим функцию $S(\omega)$ ее значением в стационарной точке:

$$S(\omega) = S(\omega_0), \quad (7.87)$$

так как в пределах указанного узкого интервала она меняется мало.

Затем, как и ранее, разложим функцию $h(\omega)$ в ряд Тейлора и ограничимся в этом разложении первыми тремя членами:

$$h(\omega) = h(\omega_0) + h'(\omega_0) (\omega - \omega_0) + \frac{h''(\omega_0)}{2} (\omega - \omega_0)^2$$

Поскольку

$$h'(\omega_0) = 0,$$

имеем

$$h(\omega) = h(\omega_0) + \frac{h''(\omega_0)}{2} (\omega - \omega_0)^2. \quad (7.88)$$

Подстановка последнего выражения в формулу (7.83) дает

$$s(x, t) = \text{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} e^{ixh(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \frac{h''(\omega_0)}{2} (\omega - \omega_0)^2} d\omega$$

По аналогии с интегралом по волновым числам, введем новую переменную

$$m^2 = \frac{x|h''(\omega_0)|}{2} (\omega - \omega_0)^2$$

Следовательно,

$$m = \sqrt{\frac{x|h''(\omega_0)|}{2}} (\omega - \omega_0)$$

и

$$dm = \sqrt{\frac{x|h''(\omega_0)|}{2}} d\omega$$

или

$$d\omega = \sqrt{\frac{2}{x|h''(\omega_0)|}} dm.$$

Отсюда

$$s(x, t) \approx \text{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} \frac{\sqrt{2} e^{ixh(\omega_0)}}{\sqrt{x|h''(\omega_0)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm im^2} dm$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm im^2} dm = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 \pm i),$$

мы получаем

$$s(x, t) \approx \operatorname{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} (1 \pm i) \sqrt{\frac{\pi}{x|h''(\omega_0)|}} e^{ixh(\omega_0)}$$

или

$$s(x, t) = \operatorname{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x|h''(\omega_0)|}} e^{i \left[xh(\omega_0) \pm \frac{\pi}{4} \right]}. \quad (7.90)$$

По определению, мы должны взять только действительную часть этого равенства. Знак перед $\pi/4$ здесь соответствует знаку второй производной $h''(\omega_0)$ в выражении (7.89).

Таким образом, вместо точного равенства (7.83) мы приходим к приближенному выражению, точность которого увеличивается с ростом параметра x .

Из (7.84) – (7.86) следует, что

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \frac{\partial k}{\partial \omega} - \frac{t}{x} = 0, \text{ если } \omega_0 = \omega_0.$$

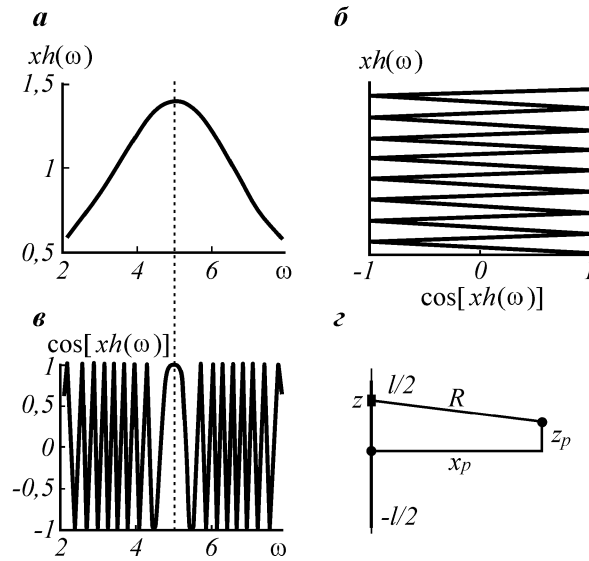


Рис. 7.6. Иллюстрация метода стационарной фазы (а, б, в); непрерывное распределение источников (г, д)

Следовательно, мы снова приходим к равенству

$$c_g(\omega_0) = x/t.$$

Таким образом, в терминах распространения волн можно сказать, что основная часть волны приходит в некоторую точку x в момент времени t с групповой скоростью c_g , а мгновенная частота при этом равняется ω_0 .

Продемонстрируем теперь основные свойства метода стационарной фазы графически. Рассмотрим для этого интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cos[xh(\omega_0)] d\omega.$$

Поведение функций $xh(\omega_0)$ и $\cos xh(\omega_0)$ показано на рис. 7.6.

Как видно из приведенных на этом рисунке кривых, функция $\cos xh(\omega_0)$ меняется в окрестности стационарной точки довольно медленно, однако вдали от ω_0 небольшие изменения $\Delta\omega$ приводят к многочисленным осцилляциям этой функции, которые дают малый вклад в значение интеграла. Кроме того, из данных графиков ясно видно, что точность метода возрастает с увеличением параметра x .

В заключение рассмотрим еще один пример.

Метод стационарной фазы и дифракция

Рассмотрим еще раз случай, когда источники распределены непрерывно вдоль оси z (рис. 7.6, ä). Тогда комплексная амплитуда потенциала, порожденного всеми источниками, равняется

$$U(p) = C \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{ikR}}{R} dz \quad (7.91)$$

где l – длина линии источников, x_p и z_p – координаты точки наблюдения, и

$$R = \sqrt{x_p^2 + (z_p - z)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{z_p - z}{R}. \quad (7.92)$$

Мы предполагаем здесь, что длина волны мала, т.е. $k \gg 1$.

Таким образом, положение стационарной точки z_0 ($\partial R / \partial z = 0$) определяется из равенства

$$z_0 = z_f. \quad (7.93)$$

Это означает, что такие точки отсутствуют, если наблюдения ведутся за пределами интервала

$$-\frac{l}{2} \leq z_p \leq \frac{l}{2}. \quad (7.94)$$

Из равенств (7.92) следует, что вторая производная R в стационарной точке дается следующим выражением:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{1}{R} = \frac{1}{x_p}. \quad (7.95)$$

Поскольку параметр k большой, мы можем использовать формулу (7.90).

Тогда асимптотическое выражение для потенциала запишется как

$$U(p) \approx C \left(\frac{2\pi}{kx_p} \right) \cos \left(kx_p + \frac{\pi}{4} \right), \text{ если } -\frac{1}{2} \leq z_p \leq \frac{1}{2}. \quad (7.96)$$

Данная формула описывает цилиндрическую волну, ограниченную плоскостями $z_p = \pm 1/2$ и распространяющуюся в сторону от линии источников. В пределах рассматриваемого диапазона амплитуда U не зависит от координаты z_p . Естественно, что интенсивность этой волны обратно пропорциональна горизонтальному расстоянию l_k .

Из равенства (7.93) следует, что основной вклад вносит источник, ближе всего расположенный к точке p . Другими словами, волна распространяется вдоль лучей, перпендикулярных оси z , а стационарная точка характеризует положение источника (рис. 7.7, а). Таким образом, метод стационарной фазы позволяет получить выражение для потенциала, которое соответствует приближению геометрической акустики, при условии, что $|z_p| \leq 1/2$. В случае источника бесконечной протяженности цилиндрическая волна наблюдается во всем пространстве, причем амплитуда U вдоль фазовой поверхности не меняется.

Для такого источника стационарные точки отсутствуют, если $|z_p| > 1/2$. Это указывает на то, что в таких местах отсутствует конструктивная интерференция и, следовательно, волновое поле имеет небольшую амплитуду. В разделе 6.1 мы обсуждали также поведение результирующей волны в случае,

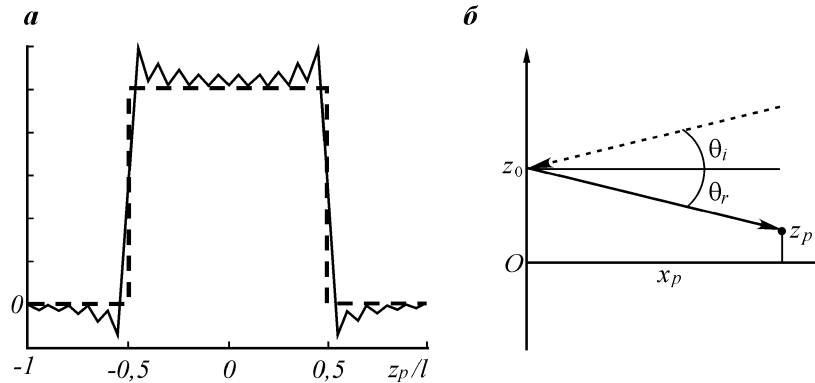


Рис. 7.7. Сравнение потенциала $U(p)$, задаваемого формулой (7.91) (сплошная линия), с асимптотическим выражением (7.96) (пунктирная линия) для $x_p/l = 104$ и $kl = 2\pi \cdot 106$ (а); иллюстрация формулы (7.97) (б)

когда между источниками имеется сдвиг фаз. Предполагая, что действие таких источников вызвано плоской волной с углом падения θ_i , фазу элементарной отраженной волны можно записать как

$$\varphi = k(R - z \sin \theta_i).$$

Следовательно, стационарная точка z_0 определяется из равенства

$$\frac{z_p - z_0}{R} - \sin \theta_i = 0 \quad \text{или} \quad \sin \theta_i = \sin \theta_r. \quad (7.97)$$

Здесь, первый член характеризует ориентацию фронта отраженной волны, если ее источник расположен в окрестности точки z_0 . Таким образом, мы снова приходим к закону Снеллиуса (рис. 7.7, а).

Рассмотрим теперь интеграл, описывающий дифракцию Фраунгофера:

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} e^{ikz \sin \theta} dz.$$

Поскольку фаза элементарной волны зависит от расстояния линейно, мы имеем

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = -k \sin \theta. \quad (7.98)$$

Отсюда видно, что, если $\theta = 0$, то все точки являются стационарными.

И, наоборот, при $\theta \neq 0$ такие точки отсутствуют. Следовательно, для того, чтобы получить волновое поле при $\theta = 0$, необходимо вычислить интеграл вдоль линии источников:

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} dz = l \quad \text{и} \quad U(p) = \frac{Cl}{r} e^{ikz}.$$

Как было показано в разделе 6.1, последнее равенство описывает главный максимум дифракционной картины.

Поскольку при $\theta = 0$ стационарные точки распределены непрерывно на интервале интегрирования и все производные $\partial^n \varphi / \partial z^n = 0$, метод стационарной фазы не применим в приближении Фраунгофера. В то же время понятие стационарной точки и в этом случае остается полезным.

Предположим снова, что источники действуют синхронно, однако, в отличие от предыдущего случая, они располагаются вдоль произвольной линии (рис. 7.8, а). Суперпозиция волн, вызванных такими источниками, описывается интегралом

$$I = \int_0^l e^{ikR(l)} dl \quad (7.99)$$

где l – координата элементарного источника.

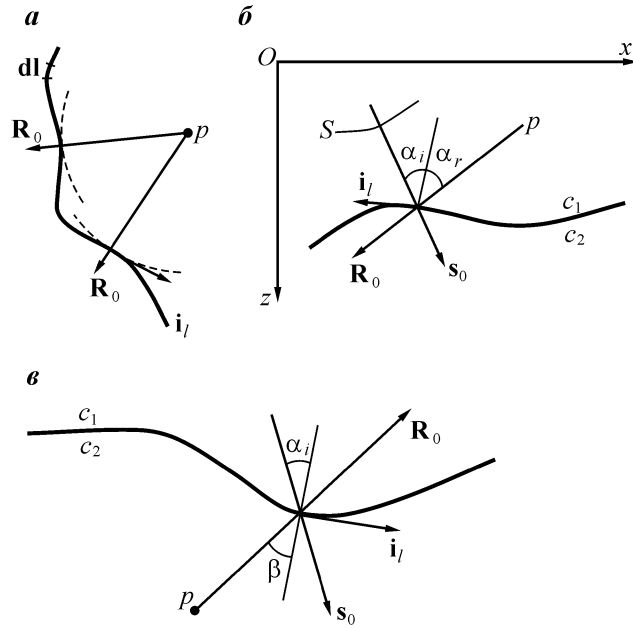


Рис. 7.8. Иллюстрация формулы (7.101) (а); закон отражения Снеллиуса и стационарная точка (б); закон преломления Снеллиуса и стационарная точка (в)

Чтобы определить положение тех источников, которые дают наибольший вклад в точке p , найдем стационарную точку подынтегрального выражения $e^{ikR(l)}$, которая определяется из равенства

$$\frac{\partial R(l)}{\partial l} = 0 \quad (7.100)$$

или

$$\mathbf{i}_l \cdot \text{grad}R(l) = 0, \quad (7.101)$$

где $\mathbf{i}_l(l)$ – единичный вектор касательный к линии источников (приложение 2).

Поскольку

$$\text{grad}R = \mathbf{R}_0(l)$$

также является единичным вектором, направленным вдоль R , мы вместо равенства (7.101) имеем

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{i}_l = 0 \text{ или } \cos(\mathbf{R}_0, \mathbf{i}_l) = 0. \quad (7.102)$$

Таким образом, источник, соответствующий стационарной точке, расположен там, где эти векторы перпендикулярны друг к другу. Очевидно, что в

этой точке линия источников касается круга радиуса R с центром в точке наблюдения p .

В результате решения уравнения (7.100), можно получить следующие результаты:

- а) стационарная точка отсутствует;
- б) на линии l имеется только одна стационарная точка;
- в) существует несколько стационарных точек;
- г) имеется непрерывное распределение стационарных точек.

Мы уже рассматривали первые два случая применительно к источникам, расположенным вдоль прямой (см. рис. 7.6). Если же существует несколько стационарных точек, то суперпозиция волн, вызванных источниками в окрестности этих точек, может привести как к конструктивной, так и к деструктивной интерференции.

Предположим, что группа источников расположена на части окружности с центром в точке p . Конечно, в этом случае наблюдается конструктивная интерференция.

Заметим, что отсутствие стационарной точки также связано с тем, что в некоторых местах линии источника не определен касательный вектор \mathbf{i}_l .

Стационарная точка и закон Снеллиуса

Пусть в среде со скоростью c_1 распространяется падающая волна (рис. 7.8, а). Тогда, как было показано в главе 6, комплексную амплитуду потенциала этой волны можно представить как

$$U_l(\mathbf{r}) = A_l(\mathbf{r}) e^{ik_1 S(\mathbf{r})}.$$

Здесь вектор \mathbf{r} характеризует положение некоторой точки, а $S(\mathbf{r})$ – эйконал, определяющий фазу волны.

Согласно (6.314),

$$|\text{grad } S(\mathbf{r})| = 1,$$

и этот вектор нормален к фазовой поверхности.

Предположим для простоты, что параметры среды и волнового поля не зависят от координаты y (рис. 7.8, а). Естественно ожидать, что вторичные источники, возникающие на границе под действием падающей волны, приводят к появлению отраженной и преломленной волн. Предположим, что фаза каждого элементарного источника совпадает с фазой падающей волны (приближение Кирхгофа).

Рассмотрим сначала отраженную волну. Ее поведение в точке p (рис. 7.8, а) определяется интегралом

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1 [R(q,p) + S(q)]} dl. \quad (7.104)$$

Здесь q – координата границы.

Стационарная точка находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial l} [R(q, p) + S(q)] = 0$$

По аналогии с равенствами (7.102) имеем

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{i}_l + \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{i}_l = 0 \text{ или } \cos(\mathbf{R}_0, \mathbf{i}_l) = -\cos(\mathbf{s}_0, \mathbf{i}_l),$$

где \mathbf{s}_0 – единичный вектор, перпендикулярный фазовой поверхности падающей волны.

Из рис. 7.8, а видно, что равенства (7.105) можно переписать как

$$\sin \alpha_l = \sin \alpha_r \text{ или } \alpha_l = \alpha_r,$$

и мы приходим к закону отражения Снеллиуса.

Предположим далее, что точка наблюдения находится в среде, скорость в которой равняется c_2 (рис. 7.8в).

Тогда вместо (7.104) получим

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[k_2 + k_l S]} dl, \quad (7.106)$$

и стационарная точка определяется из уравнения

$$\frac{\cos(\mathbf{s}_0, \mathbf{i}_l)}{c_1} = -\frac{\cos(\mathbf{R}_0, \mathbf{i}_l)}{c_2}.$$

Поскольку

$$\cos(\mathbf{s}_0, \mathbf{i}_l) = \sin \alpha_l \text{ и } -\cos(\mathbf{R}_0, \mathbf{i}_l) = \sin \beta,$$

мы, таким образом, получаем закон преломления Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha_l}{c_1} = -\frac{\sin \beta}{c_2},$$

где α_l и β – угол падения и угол преломления (рис. 7.8, а). Используя описанный здесь подход, можно получить закон Снеллиуса для трехмерного случая.