

Глава 6. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ

6.1 СУПЕРПОЗИЦИЯ ВОЛН ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРВИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ранее мы рассматривали поведение волн, возбуждаемых в однородной среде либо единственным элементарным, либо линейным источником. Перед тем, как рассматривать более сложные случаи, сформулируем еще раз основные свойства волновых полей, возбуждаемых элементарными источниками.

1. Волновое поле элементарного источника является сферически симметричным. Это означает, что поток энергии распределяется равномерно по сфере, в центре которой расположен сам источник. Геометрия волновых полей (включая вектор Пойнтинга) описывается в предположении, согласно которому распространение волн происходит вдоль прямых лучей, направленных от источника к точке наблюдения.

В соответствии с этим можно представить себе множество воображаемых конических трубок с вершиной в источнике. Поток энергии вдоль каждой такой трубки остается постоянным, а величина вектора Пойнтинга уменьшается, поскольку по мере удаления от источника растет площадь сечения трубки. Векторы смещений и скорости смещений частиц среды ортогональны сечению каждой конической трубки.

2. Всегда существуют три зоны волнового поля, а именно ближняя, промежуточная и собственно волновая. В ближней зоне волновое поле в любой точке почти синхронно с колебаниями в непосредственной близости от источника. В этой части упругой среды присутствуют только колебания, при которых эффект распространения пренебрежимо мал. В пределах промежуточной зоны эффекты распространения становятся сравнимыми с вибрационными эффектами. И, наконец, в волновой зоне наблюдаются в основном бегущие волны, амплитуда которых медленно уменьшается с расстоянием.

Таким образом, обычно можно наблюдать два явления. Одно из них (вибрации) проявляется в синхронном изменении положения всех частиц. Оно сопровождается деформацией среды, при которой отсутствует дилатация, и таким образом в среде не возникает дополнительного давления. Вибрации быстро затухают с расстоянием от источника. Второе явление – распространение волн – также наблюдается во всех трех зонах, однако только в волновой зоне оно начинает доминировать и дает наибольший вклад в смещения и скорости частиц. Для синусоидальных волн эта зона определяется неравенством R/λ .

Следует еще раз отметить, что избыточное давление описывается одинаковым образом во всех трех зонах.

Как правило, волновые поля становятся гораздо более сложными, когда вместо одного точечного источника используются сразу несколько. В этом случае результирующее волновое поле является суммой полей от всех источников:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^n \theta_i,$$

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i.$$

В результате такой суперпозиции возникает явление, которое называется либо интерференцией, либо дифракцией, и которое играет фундаментальную роль в сейсмологии. В дальнейшем мы увидим, что любая волна (падающая, отраженная, преломленная, головная или поверхностная) в действительности представляет собой суперпозицию бесконечного числа элементарных волн.

В этом разделе описывается суперпозиция синусоидальных волн в предположении, что частота этих волн одинакова. В дальнейшем это ограничение будет снято.

Иногда, при небольшом числе источников, мы будем говорить об интерференции волн. Суперпозиция волн от большого числа источников называется дифракцией. Конечно, такая классификация является условной, поскольку и интерференция и дифракция описывают, по сути, один и тот же процесс суммирования волновых полей.

Чтобы лучше понять, каким образом происходит взаимодействие волн от разных источников, рассмотрим сначала несколько относительно простых примеров.

Пример 1: интерференция двух волн

Пусть имеется два элементарных источника. Тогда для скалярного потенциала ($\mathbf{s} = \text{grad } U$) имеем

$$U_1(p, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

и

$$U_2(p, t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (6.1)$$

или

$$U_1(p, t) = A_1 \cos(\omega t + kR_1)$$

и

$$U_2(p, t) = A_2 \cos(\omega t + kR_2 - \alpha), \quad (6.2)$$

где R_1 и R_2 обозначают расстояния от точки наблюдения до, соответственно, первого и второго источника, а волновое число k определяется как

$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda.$$

Параметр α характеризует сдвиг фаз между колебаниями источников.

Из равенств (6.2) следует, что сдвиг фаз между волнами, приходящими в точку наблюдения, определяется, помимо параметра α , разностью расстояний

$$\Delta R = R_2 - R_1. \quad (6.3)$$

Предположим, что амплитуды волн одинаковы: $A_1 = A_2$. Тогда сумма двух волн описывается выражением

$$U(p, t) = A \cos(\omega t + \varphi_1) + A \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Применяя известную тригонометрическую формулу, получим

$$U(p, t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

или

$$U(p, t) = A_R \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right), \quad (6.4)$$

где

$$A_R = 2A \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.5)$$

Таким образом, результирующее поле также является синусоидальной функцией, зависящей от разности фаз между исходными волнами и имеющей амплитуду, прямо пропорциональную A . В то же время начальная фаза суммарной волны равняется среднему от фаз φ_1 и φ_2 :

$$\tau = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \quad (6.6)$$

Прежде чем приступить к анализу эффекта суперпозиции, рассмотрим более общий случай, когда амплитуды A_1 и A_2 не равны друг другу. С этой целью удобно использовать комплексную амплитуду скалярного потенциала. В этом случае

$$u = u_1 + u_2$$

или

$$u = A_R e^{i\tau} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}. \quad (6.7)$$

Чтобы определить амплитуду A_R , учтем равенство

$$z^2 = zz^*.$$

где z^* – величина, комплексно сопряженная числу z .

Полагая

$$u = A_R e^{i\tau} \quad \text{и} \quad u^* = A_R e^{-i\tau},$$

получим

$$\begin{aligned} A_R^2 &= (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 [e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}] \end{aligned}$$

или

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.8)$$

Таким образом,

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (6.9)$$

В частности, при $A_1 = A_2$

$$A_R = \sqrt{2A} \sqrt{1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

или

$$A_R = 2A \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

что совпадает с выражением (6.5).

Как известно, величина вектора Пойнтинга прямо пропорциональна A_R^2 и характеризует интенсивность сигнала I . В соответствии с равенством (6.8), интенсивность результирующей волны равняется сумме трех слагаемых. Первые два, пропорциональные A_1^2 и A_2^2 , описывают интенсивность волн, вызванных, соответственно, первым и вторым источником, а последнее слагаемое

$$2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

характеризует эффект интерференции этих волн. Это слагаемое может быть положительным, отрицательным или равняться нулю. В первом случае мы имеем дело с конструктивной интерференцией, поскольку интенсивность I результирующей волны превышает сумму интенсивностей волн, вызванных каждым из источников:

$$I > I_1 + I_2$$

Если третье слагаемое в (6.8) является отрицательным, наблюдается деструктивная интерференция и

$$I < I_1 + I_2$$

Наконец, если фазы φ_1 и φ_2 связаны соотношением

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}(2n + 1),$$

где n – целое число, то интерференционный член в (6.8) исчезает и

$$I = I_1 + I_2.$$

Чтобы проиллюстрировать использование равенства (6.5), предположим, что существует два источника с одинаковыми амплитудами колебаний, имеющих фазовый сдвиг α .

Будем рассматривать взаимодействие волн, вызванных этими источниками, на расстояниях, значительно превышающих расстояния d между самими источниками (рис. 6.1, а):

$$R_1 \gg d \quad \text{и} \quad R_2 \gg d. \quad (6.10)$$

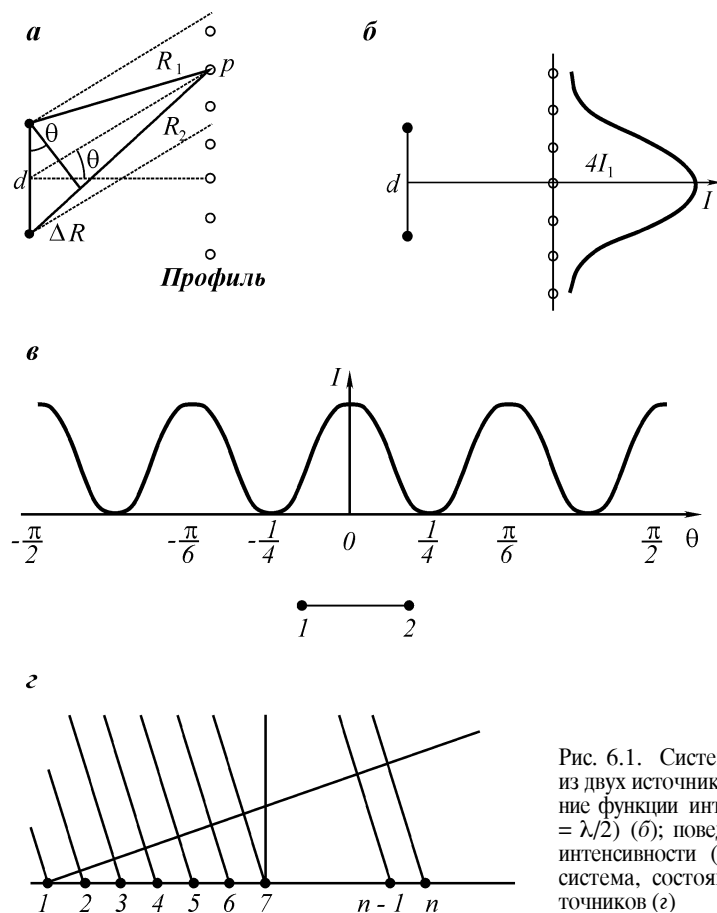


Рис. 6.1. Система, состоящая из двух источников (а); поведение функции интенсивности ($d = \lambda/2$) (б); поведение функции интенсивности ($d = 2\lambda$) (в); система, состоящая из n источников (г)

Данное условие вместе с условием равенства амплитуд источников означает, что амплитуды волн практически равны друг другу и не зависят от точки наблюдения.

Исследуем теперь, как ведут себя амплитуда и интенсивность результирующей волны вдоль профиля, параллельного линии, соединяющей оба источника (рис. 6.1, *a*). В общем случае волны, приходящие в произвольную точку p , имеют различные фазы, и, как отмечалось ранее, фазовый сдвиг состоит из двух слагаемых. Первое из них равняется α . Второе слагаемое возникает из-за того, что источники находятся на разных расстояниях от точки наблюдения. С учетом условий (6.10) указанная разность фаз приближенно равняется следующей величине:

$$\Delta R = R_2 - R_1 = d \sin \theta, \quad (6.11)$$

где угол θ показан на рис. 6.1, *a*.

Хотя разность ΔR чрезвычайно мала по сравнению с R , фаза, определяемая отношением

$$\frac{d \sin \theta}{\lambda},$$

может быть очень большой. Таким образом, полный сдвиг фаз равняется

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha + k \Delta R = \alpha + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta. \quad (6.12)$$

Из равенства (6.5) следует, что функция A_R является периодической относительно сдвига фаз $\varphi_2 - \varphi_1$.

Полагая $\alpha = 0$, перепишем выражение (6.5) в виде

$$A_R = 2A \cos \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta \right). \quad (6.13)$$

Отсюда, например, для средней точки профиля $\theta = 0$, имеем

$$A_R = 2A. \quad (6.14)$$

Этот результат очевиден, поскольку обе волны приходят в указанную точку с одинаковыми фазами и, следовательно, наблюдается максимальный эффект конструктивной интерференции, при котором интенсивность увеличивается в 4 раза.

При изучении интерференции волн вдоль рассматриваемого профиля удобно различать следующие два случая:

$$1) d \leq \lambda \quad \text{и} \quad 2) d > \lambda.$$

Случай 1: $d \leq \lambda$

В качестве примера положим

$$d = \lambda/2.$$

Тогда вместо равенства (6.13) получим

$$A_R = 2A \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right), \quad (6.15)$$

и амплитуда результирующей волны постепенно уменьшается с увеличением угла θ .

Так, например, при $\theta = \pi/6$

$$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad A_R = \sqrt{2}A.$$

Отсюда

$$I = 2I_1 = 1I_2.$$

В пределе, при $\theta = \pi/2$, получаем

$$A_R \rightarrow 0$$

и в этом случае мы имеем дело с деструктивной интерференцией, поскольку сдвиг фаз достигает значения π (рис. 6.1, б).

В общем случае, при $d = \lambda/m$ и $m \ll 1$, также наблюдается уменьшение интенсивности результирующей волны, когда $\theta \rightarrow \pi/2$. Однако при $d \ll \lambda$ влияние деструктивной интерференции относительно мало, поскольку максимальная разность фаз φ_{\max} стремится к $2\frac{\pi}{m}$:

$$0 \leq \varphi < 2\frac{\pi}{m}.$$

Случай 2: $d > \lambda$

Для иллюстрации этого случая положим $d = 2\lambda$. Тогда равенство (6.13) дает

$$A_R = 2A \cos(2\pi \sin \theta). \quad (6.16)$$

Учитывая, что функция A_R является четной относительно угла θ , рассмотрим ее поведение на интервале

$$0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Из формулы (6.16) следует, что интенсивность максимальна при

$$2\pi \sin \theta = k\pi,$$

где

$$k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, максимум амплитуды наблюдается в точках, соответствующих следующим углам θ :

$$\theta = 0, \pi/6, \pi/2.$$

Точки, в которых результирующая амплитуда равняется нулю, определяются равенством

$$2\pi \sin \theta = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

т.е. при следующих значениях угла θ : $\theta = 0,25$ и $\theta = 0,85$. Поведение функции I показано на рис. 6.1, в.

В отличие от предыдущего случая, теперь функция I имеет пять максимумов, расположенных симметрично относительно экваториальной плоскости $\theta = 0$, однако между этими точками наблюдается сильная деструктивная интерференция.

Пусть расстояние d между источниками равняется

$$d = m\lambda, \quad (6.17)$$

где m – целое число.

Из равенства (6.13) следует, что интенсивность максимальна, если

$$\pi m \sin \theta = k\pi$$

или

$$\sin \theta = k/m,$$

где

$$k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, отношение расстояния d к длине волны λ определяет число экстремумов функции A_R . В частности, на интервале

$$0 \leq \theta < \pi/2$$

амплитуда результирующей волны достигает одного и того же максимального значения

$$A_R = 2A$$

в $m+1$ точках.

В то же время, если расстояние d между источниками меньше λ , то при $\theta = 0$ существует только один максимум.

В этих случаях, когда m не является целым числом, например, когда

$$[m] < m < [m + 1],$$

число максимумов функции A_R равняется $[m] + 1$. Здесь квадратные скобки $[]$ обозначают целое число.

Как следует из выражений (6.2) – (6.5), амплитуда и фаза результирующей волны не изменяются, если, соответственно,

$$R_1 - R_2 = \text{const} \quad \text{и} \quad R_1 + R_2 = \text{const}.$$

Это означает, что функция A_R остается постоянной на поверхности гиперболоида вращения, а фаза не изменяется на эллипсоидах вращения, и у них имеются общие фокусы, в которых располагаются источники. Таким образом, амплитуда меняется на поверхностях равной фазы, и мы имеем дело с неоднородной волной.

Учитывая, что точки наблюдения расположены далеко от источников, можно представить себе, что энергия, сгенерированная каждым из источников, переносится вдоль параллельных прямых (пунктирные линии на рис. 6.1, а). Направление этих прямых определяется углом θ , характеризующим точку наблюдения. Очевидно, что сдвиг фаз между волнами, распространяющимися вдоль этих прямых, по-прежнему определяется выражением (6.10). Такой подход, лежащий в основе так называемых приближений Фраунгофера и Френеля, полезен при изучении суперпозиции волн в гораздо более сложном случае, описание которого приводится ниже.

Пример 2: интерференция волн от n источников

Рассмотрим дифракцию волн от n источников, расположенных на одной прямой (рис. 6.1, з). Пусть расстояние и сдвиг фаз между любыми двумя соседними источниками остаются постоянными и равняются, соответственно, d и α . Предположим также, что протяженность $(n - 1) d$ всего источника мала по сравнению с расстоянием от него до точки наблюдения. Следовательно, разность фаз φ волн, вызванных этими источниками, определяется в точке наблюдения выражением (6.12).

Применяя принцип суперпозиции, получим следующее выражение для скалярного потенциала результирующей волны:

$$U(p, t) = A[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \dots + \cos(\omega t + (n - 1)\varphi)], \text{ если } n > 1. \quad (6.18)$$

Определить эту сумму можно двумя разными способами. Во-первых, равенство (6.18) можно переписать как

$$U(p, t) = \operatorname{Re} A \left\{ e^{-i\omega t} + e^{-i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + 2\varphi)} + \dots + e^{-i[\omega t + (n-1)\varphi]} \right\} \quad (6.19)$$

или

$$U(p, t) = \operatorname{Re} \left\{ U e^{-i\omega t} \right\}, \quad (6.20)$$

где комплексная амплитуда потенциала дается формулой

$$U = A \left\{ 1 + e^{-i\varphi} + e^{-i2\varphi} + \dots + e^{-i(n-1)\varphi} \right\}. \quad (6.21)$$

Данная сумма является геометрической прогрессией, и, применяя известное правило суммирования, получаем

$$U = A \frac{1 - e^{-in\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}. \quad (6.22)$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$U = A \frac{1 - e^{-in\varphi/2}}{e^{-i\varphi/2}} \left(\frac{e^{in\varphi/2} e^{-in\varphi/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-in\varphi/2}} \right)$$

или

$$U = A \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} e^{-i(n-1)\varphi/2}. \quad (6.23)$$

Подстановка (6.23) в равенство (6.20) дает

$$U(p, t) = A \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \cos[\omega t + (n-1)\varphi/2]. \quad (6.24)$$

Таким образом, амплитуда и фаза результирующей волны определяются следующим образом:

$$A_R = A \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \quad \text{и} \quad \tau \frac{n-1}{2} \varphi. \quad (6.25)$$

В частности, полагая $n = 2$, приходим к выражению (6.5), при условии, что $\varphi_1 = 0$. Действительно, в этом случае равенство (6.5) принимает вид

$$A_R = A \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi/2)} = 2A \cos(\varphi/2).$$

Получим теперь формулу (6.5) другим способом. Каждый из членов выражения (6.21), заключенных в скобки, является комплексным числом, которое можно описать единичным вектором на комплексной плоскости XU (рис. 6.2, *a*). Ориентация этого вектора определяется аргументом. Так, например, первое слагаемое Ae^{i0} характеризуется единичным вектором, направленным вдоль оси x . В общем случае, соответствующий вектор A_i имеет амплитуду A и аргумент φ .

Применяя правило суммирования векторов (рис. 6.2, *a*), мы видим, что они образуют многоугольник, вершины которого расположены на окружности радиуса OK_1 с центром в точке O . Сумма этих векторов описывается результирующим вектором K_1K_n , который можно найти с помощью простых геометрических соотношений.

Как показано на рис. 6.2, *a*, угол между векторами A_i и OK_i является одинаковым для любого i и равняется β . Учитывая, что сумма углов треугольника равна π и

$$2\beta + \alpha = \pi,$$

мы видим, что угол K_1OK_2 равен φ и, следовательно,

$$|A_i| = A = 2K_1O \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (6.26)$$

Второе из равенств (6.26) получено из треугольника $2K_1O_n$:

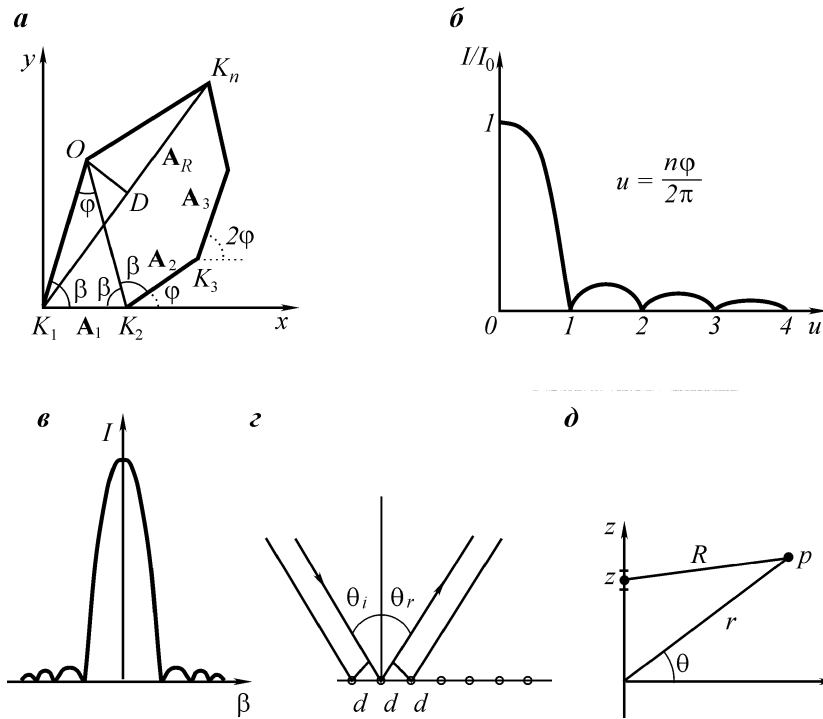


Рис. 6.2. Суммирование комплексных чисел как векторов (а); интенсивность волны от дискретной системы источников (б); интенсивность волны от непрерывной системы источников (в); закон отражения Снеллиуса (г); расстояние между источниками и точкой наблюдения (д)

$$K_1 K_n = 2K_1 O \sin \frac{n\varphi}{2}, \quad (6.27)$$

поскольку по определению угол $2K_1 O_n$ равняется $n\varphi$.

Наконец, для амплитуды и фазы результирующей волны из выражений (6.26) и (6.27) находим

$$A_R = K_1 K_n = A \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)},$$

что совпадает с формулой (6.25).

Используя рис. 6.2, а, несложно также найти фазу τ .

Рассмотрим зависимость функции A_R от аргумента φ . Как мы уже знаем, аргумент может изменяться как в силу изменения положения источника или точки наблюдения, так и в силу обоих этих факторов.

Прежде всего, в пределе, когда φ стремится к нулю, имеем

$$A_R = \frac{n\varphi/2}{\varphi/2} = nA \quad (6.28)$$

и

$\tau \rightarrow 0$, если $\varphi \rightarrow 0$.

Таким образом, результирующая амплитуда в n раз превышает амплитуду единичной волны. Этот результат очевиден, поскольку направления всех векторов \mathbf{U}_n практически совпадают ($\varphi \rightarrow 0$), а результирующий вектор является их арифметической суммой.

Из равенства (6.25) следует, что с увеличением φ результирующая амплитуда начинает уменьшаться и, когда

$$n\frac{\varphi}{2} = \pi \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{2\pi}{n}, \quad (6.29)$$

становится равной нулю.

Другими словами, если сдвиг фаз определяется равенствами (6.29), деструктивная интерференция максимальна. С геометрической точки зрения это означает, что точка K_n (рис. 6.2, а) совпадает с началом K_1 . Соответственно, длина K_1K_2 становится равной нулю, а сдвиг фаз между первым и последним вектором равняется 2π . Очевидно, что с увеличением числа источников n , зона первого интерференционного максимума сужается.

При дальнейшем увеличении фазы φ снова наблюдается максимум, однако на этот раз значительно меньший. Этот факт можно было легко предсказать, поскольку при $\varphi \neq 0$ векторы не лежат на одной прямой (рис. 6.2, а). Положение и величину этого максимума легко оценить, полагая, что n достаточно велико.

Числитель первого из равенств (6.25) достигает своего максимального значения (равного единице) при

$$n\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}(2k+1) \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}(2k+1). \quad (6.30)$$

В то же время знаменатель можно представить как

$$\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\pi}{2n}(2k+1),$$

при условии, что угол φ достаточно мал и

$$2k+1 \leq \frac{2n}{\pi}.$$

Таким образом, амплитуды максимумов определяются выражением

$$A_R = nA \frac{2}{\pi(2k+1)}, \quad (6.31)$$

из которого видно, что с увеличением целого числа k величины максимумов уменьшаются.

Поведение отношения

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2(n\varphi/2)}{n^2 \sin^2(\varphi/2)}, \quad (6.32)$$

характеризующего распределение интенсивности как функции угла φ , показано на рис. 6.2, б.

Здесь

$$I_0 = n^2 A^2$$

характеризует интенсивность при $\varphi = 0$.

Вычисляя первую производную функции A_R по φ , нетрудно определить положение и величину максимумов или минимумов. Следует заметить, что с увеличением числа источников эффект суперпозиции волн становится сильнее и, в соответствии с этим, наблюдается большее количество зон конструктивной и деструктивной интерференции.

Чтобы проиллюстрировать использование выражений (6.5), рассмотрим, как ведет себя амплитуда φ_2 результирующей волны вдоль профиля, параллельного линии источников (рис. 6.1, з). Предположим сначала, что колебания всех источников происходят синхронно: $\alpha = 0$. Тогда, с учетом равенства (6.12), имеем

$$A_R = A \frac{\sin\left(\frac{\pi nd}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)} \quad (6.33)$$

По аналогии с системой, состоящей из двух источников, будем различать два случая:

$$1) d < \lambda \quad \text{и} \quad 2) d > \lambda.$$

Случай 1: $d < \lambda$

Из выражения (6.33) следует, что максимум появляется, когда

$$\theta = 0 \quad \text{или} \quad n \frac{\pi nd}{\lambda} \sin \theta = 0, \quad (6.34)$$

и его амплитуда равняется

$$A_R = nA. \quad (6.35)$$

Таким образом, в середине профиля наблюдается максимум конструктивной интерференции. С увеличением угла θ амплитуда результирующей волны быстро уменьшается и первый минимум появляется, когда

$$n \frac{\pi nd}{\lambda} \sin \theta = \pi$$

или

$$\sin \theta = \lambda/nd, \quad (6.36)$$

при условии, что

$$\lambda/nd \leq 1.$$

В этом случае сдвиг фаз между волнами от первого и последнего источников равняется

$$n\varphi = n \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta = n \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\lambda}{nd} = 2\pi$$

и, соответственно, вектор $K_1 K_n$ (рис. 6.2, *a*) становится нулевым. Из равенства (6.36) с очевидностью следует, что чем больше число источников n , тем уже пучок лучей, формирующих максимум.

Так же, как в случае $n = 2$, формируются боковые максимумы. Их положение приближенно определяется условием

$$\frac{\pi nd \sin \theta}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

или

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2dn} (2k + 1) < 1, \quad (6.37)$$

где

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Подстановка (6.37) в (6.33) дает

$$A_k = nA \frac{2}{\pi(2k + 1)}, \quad (6.38)$$

где nA – амплитуда результирующей волны в точке $\theta = 0$.

Таким образом, мы видим, что отношение бокового и основного максимумов не зависит от числа источников ($n \gg 1$), однако при увеличении их числа абсцисса каждого из боковых максимумов стремится к средней точке. Следовательно, используя достаточно большое число источников, можно сконцентрировать волновое поле в пределах относительно узкого пучка. Такая концентрация происходит благодаря как конструктивной, так и деструктивной интерференции.

Случай 2: $d > \lambda$

Как было показано ранее, интерференция волн от двух источников ($n = 2$) имеет более сложный характер, когда $d > \lambda$. Похожее поведение волнового поля наблюдается и в общем случае системы из n источников. Действительно, предположим, что в некоторой точке амплитуда имеет определенное значение A_k , а сдвиг фаз между волнами от соседних источников равняется

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta.$$

Согласно уравнению (6.18), амплитуда результирующей волны останется той же, если фаза φ изменится на $2\pi m$, где m – произвольное целое.

Например, наибольшее значение A_R наблюдается, когда все векторы U_n (рис. 6.2, *a*) направлены вдоль одной и той же линии, а именно

$$\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\pi m$$

или

$$d \sin \theta = m\lambda.$$

(6.39)

Подстановка последнего соотношения в равенство (6.33) дает

$$A_R = A \frac{\sin \pi mn}{\sin \pi m} = A \frac{\sin nx}{\sin x}.$$

Применяя правило Лопиталья, снова получаем известное выражение

$$A_R = nA.$$

Так, например, при $m = 0$ и $m = 1$ из равенства (6.39) следует, что максимум будет наблюдаться, соответственно, при $\theta = 0$ и $\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda}{d}$. Точно также можно определить и положение боковых максимумов. Таким образом, в общем случае система возбуждает в разных направлениях группы пучков, каждый из которых имеет центральный максимум и последовательность боковых, более слабых максимумов. Чтобы различать центральные максимумы, соответствующие различным значениям m , их обычно называют максимумами m -го порядка. Как следует из соотношения (6.39), если расстояние между источниками меньше длины волны, т.е.

$$d < \lambda,$$

то существует только одна группа пучков. Действительно, в этом случае неравенство

$$\sin \theta = m\lambda/d < 1$$

удовлетворяется только при m , равном нулю. В заключение следует заметить, что равенства (6.25) справедливы при условии, что расстояние между первым и последним источниками значительно меньше расстояния до точки наблюдения. Это означает, что разность фаз между волнами, вызванными любыми двумя соседними источниками, остается постоянной.

Пример 3: линия источников

Рассмотрим предельный случай, когда источники непрерывно распределены вдоль прямой. В этом случае выражение (6.33) принимает вид

$$A_R = A n \frac{\sin \beta}{\beta}, \quad (6.40)$$

где $A \rightarrow 0$ и $n \rightarrow 0$, однако их произведение остается постоянным. Параметр β определяется как

$$\beta = \frac{\pi \sin \theta}{\lambda} l, \quad (6.41)$$

$l = (n - 1)d$ характеризует размер источника, а $\frac{\pi \sin \theta}{\lambda}$ определяет величину изменения фазы. Соответственно, интенсивность результирующей волны равняется

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}. \quad (6.42)$$

Здесь

$$I_0 = n^2 A^2,$$

и поведение отношения I/I_0 показано на рис. 6.2, в.

Максимум, возникающий в точке $\beta = 0$, называется главным максимумом. Его величина равняется I_0 , и он соответствует углу $\theta = 0$. В точках $\beta = \pm \beta_m$ возникают также дополнительные максимумы. Например, первый такой максимум возникает при $\beta_1 = 1,43\pi$, причем

$$I/I_0 = 0,0472,$$

т.е. этот максимум является относительно слабым.

Для больших значений m имеем

$$\frac{I}{I_0} \sim \frac{1}{\pi^2 (m+1/2)^2}.$$

Таким образом, при непрерывном распределении источников конструктивная интерференция наблюдается в основном вблизи $\theta = 0$.

Удобно различать два предельных случая:

$$\lambda \gg l \quad \text{и} \quad \lambda \ll l$$

В первом случае, независимо от того, какие значения принимает угол θ , параметр β мал, и, следовательно,

$$I(\theta) \approx I_0.$$

Другими словами, источники возбуждают сферическую волну, которая имеет одинаковую интенсивность во всех направлениях. Этот результат очевиден, поскольку сдвиг фаз между элементарными источниками стремится к нулю, и всюду при $R \gg l$ наблюдается конструктивная интерференция.

Предположим теперь, что длина волны значительно меньше протяженности системы источников. Тогда аргумент

$$\beta = \frac{\pi l}{\lambda} \sin \theta$$

является малым только в пределах очень узкого диапазона углов вблизи значения $\theta = 0$, где функция I почти совпадает с I_0 . В то же время вне данного пучка интенсивность пренебрежимо мала. Таким образом, картина дифракции имеет, в значительной степени, направленный характер.

До настоящего момента мы изучали дифракцию волн, вызванных первичными источниками, которыми могли быть как элементарные, так и линейные источники. Исключение составляет следующий случай. Рассмотрим фиктивные источники, которые возникают под действием падающей плоской волны (рис. 6.2, 2). В результате вторичные волны появляются над и под плоскостью. Другими словами, они играют роль вторичных источников. Введем следующие обозначения. Пусть θ_i обозначает угол между направлением падающей волны и нормалью к линии источников, а θ_r – угол между нормалью и направлением на точку наблюдения.

В общем случае угол θ_i между направлением распространения волны и нормалью отличен от нуля. Поэтому колебания вторичных источников происходят асинхронно и, как видно из рис. 6.2, 2, сдвиг фаз между ними равен

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_i.$$

Вторичные волны от соседних источников, распространяющиеся в направлении некоторой точки P , также имеют сдвиг фаз, равный

$$\varphi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_r.$$

Таким образом, полный сдвиг фаз между этими волнами

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (\sin \theta_r - \sin \theta_i). \quad (6.43)$$

Учитывая, что наибольший максимум возникает при $\beta = 0$, получим

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i. \quad (6.44)$$

Данное выражение представляет собой формулировку закона отражения Снеллиуса, и

$$\theta_r = \theta_i, \quad (6.45)$$

т.е. углы падения и отражения равны друг другу.

Таким образом, в случае, когда источники распределены непрерывно, а влиянием вторичных максимумов можно пренебречь, наблюдается переход к так называемой геометрической акустике. Иными словами, геометрическая акустика также является результатом суперпозиции волн. Конечно, если падающая волна не является плоской, выражение (6.43) уже не описывает сдвиг фаз между отраженными волнами и равенство (6.45) перестает выполняться. В этом случае вторичные волны имеют разную интенсивность.

Если же падающая волна остается по-прежнему плоской, но источники располагаются на поверхности, обладающей некоторой кривизной, то разность фаз больше не описывается соотношением (6.43). Тем не менее, если радиус кривизны этой поверхности значительно больше длины волны, то равенство (6.45) по-прежнему верно. Это означает, что углы падения и отражения почти равны друг другу.

Уравнение (6.44) имеет еще одно решение

$$\theta = \pi - \theta_i,$$

характеризующее направление, вдоль которого наблюдается максимальный сигнал под источниками (рис. 6.2, з). Это также очень интересный результат, поскольку он описывает закон отражения Снеллиуса в предельном случае, когда среда всюду однородна.

В одном из следующих разделов мы рассмотрим дифракцию волн для более сложного распределения источников. Чтобы упростить анализ, получим еще раз выражение (6.42), но другим способом. Из рис. 6.2, д видно, что комплексную амплитуду потенциала, вызванного элементарным источником, можно представить в виде

$$d \cup (p) = C dz \frac{e^{ikR}}{R},$$

где C характеризует интенсивность источников на единицу длины.

Применяя далее принцип суперпозиции, получим следующий потенциал результирующей волны:

$$\cup (p) = C \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{ikR}}{R} dz.$$

Как и ранее, l обозначает протяженность источника.

Несмотря на относительную простоту подынтегрального выражения e^{ikR}/R , приведенный выше интеграл нельзя представить в виде элементарных функций. Сделаем теперь два предположения. Во-первых, предположим, что точка наблюдения p расположена на расстоянии R , значительно превышающем протяженность системы l :

$$R \gg l$$

Это означает, что источники находятся практически на одном и том же расстоянии от точки наблюдения p , и выражение для потенциала принимает вид

$$\cup (p) \approx \frac{C}{r} \int_{-l/2}^{l/2} e^{ikR} dz.$$

Здесь r – расстояние между началом системы координат и точкой наблюдения.

Последний интеграл все еще нельзя выразить через элементарные функ-

ции. Второе предположение основывается на приближенном выражении для расстояния R . Из рис. 6.2, д следует, что

$$R = \sqrt{r^2 + z^2 - 2zr \sin \theta}.$$

Здесь θ является углом между R и перпендикуляром к оси z .

Учитывая, что $R \gg l/2$ и $|z| \leq l/2$, выражение для R можно разложить в ряд по степеням z/r . Поскольку

$$R = r \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2z}{r} \sin \theta}$$

и

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},$$

где

$$x = -\frac{2z}{r} \sin \theta + \frac{z^2}{r^2},$$

имеем

$$R \approx r \left(1 + \frac{z^2}{2r^2} - \frac{z}{r} \sin \theta \frac{z^2}{2r^2} \sin^2 \theta \right)$$

или

$$R = r - z \sin \theta + \frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta + \dots$$

Таким образом, выражение для комплексной амплитуды потенциала преобразуется к виду

$$\mathcal{U}(p) = \frac{C}{r} e^{ikr} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-ikz \sin \theta} e^{ik \frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta} dz.$$

Очевидно, что фаза элементарной волны от источника, расположенного на расстоянии z от начала координат, равняется

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(r - z \sin \theta + \frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta \right).$$

Пусть последнее слагаемое в скобках настолько мало, что

$$\left| e^{ik \frac{l^2}{8r} \cos^2 \theta} \right| = 1.$$

Последнее соотношение выполняется, когда

$$\frac{kl^2 \cos^2 \theta}{8r} \ll \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad \frac{l^2}{\lambda r} \cos^2 \theta \ll 1.$$

Если расстояние r достаточно велико, данные неравенства выполняются, независимо от того, какое значение имеет угол θ . В соответствии с этим фаза элементарной волны равняется

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r - z \sin \theta),$$

т.е. она линейно изменяется с расстоянием от начала координат. Такое приближение называется приближением Фраунгофера. Очевидно, что в двух предыдущих примерах мы использовали именно этот подход. Когда в выражении для фазы удерживается третий член

$$\frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta,$$

мы имеем дело с более точным приближением, которое называется приближением Френеля.

В действительности в обоих приближениях принимается, что

$$R \gg l.$$

С уменьшением длины волны условие

$$\frac{l^2}{\lambda r} \cos^2 \theta < 1$$

перестает выполняться. Таким образом, приближение Фраунгофера не достаточно для изучения перехода к предельному случаю, когда λ стремится к нулю. То же самое относится и к приближению Френеля.

Используя приближение Фраунгофера, легко получить формулу (6.42). Действительно, комплексная амплитуда потенциала дается выражением

$$U(p) = \frac{C}{r} e^{ikr} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-ikz \sin \theta} dz$$

или

$$U(p) = \frac{Cl}{r} e^{ikr} \frac{\sin \beta}{\beta},$$

где

$$\beta = \frac{kl}{2} \sin \theta.$$

Отсюда

$$U(p) = \frac{Cl \sin \beta}{r \beta} \cos(\omega t - kr).$$

Усредняя интенсивность по времени, получим

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2},$$

что совпадает с (6.42).

У приближения Фраунгофера есть одно интересное свойство. Как следует из равенства

$$R = -z \sin \theta,$$

если точка наблюдения располагается на перпендикуляре к линии источников, пересекающей $\theta = 0$, то расстояние R от этой точки до любого из элементарных источников является одним и тем же: $R = r$. Поскольку все элементарные волны имеют в таких точках одну и ту же фазу, в них наблюдается главный максимум.

Мы изучили дифракцию, вызванную источниками синусоидальных волн в однородной среде. В дальнейшем особое внимание будет уделяться дифракции при наличии неоднородностей. Чтобы изучить поведение волн в таких средах, необходимо решить задачу с граничными условиями. Однако изучение волновых полей полезно начать с приближенной теории, разработанной Кирхгофом. С этой целью мы в дальнейших разделах получим формулы Гельмгольца–Кирхгофа, устанавливающие соотношения между значением скалярного потенциала в некоторой точке внутри объема среды и его значениями на поверхности данного объема.

6.2 ФОРМУЛА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В главе 4 рассматривалась теорема единственности. Было показано, что комплексная амплитуда потенциала в произвольной точке p объема V однородной среды однозначно определяется уравнением Гельмгольца и граничными условиями на поверхности S данного объема. Поэтому естественно ожидать, что значения волнового поля внутри объема и на его поверхности связаны между собой. Другими словами, поведение волны на этой поверхности определяет волну с заданным распределением плотности ρ и сжимаемости C внутри объема. Этот вывод, следующий из теоремы единственности, является, с физической точки зрения, почти очевидным, особенно, когда речь идет о нестационарных волнах. Предположим, например, что первичный источник возбуждает колебания в течение некоторого интервала времени Δt , а затем перестает действовать. Очевидно, что в каждый момент времени волновое поле содержит информацию о своем источнике. Поэтому естественно, что волна на поверхности, окружающей такой источник, определяет волновое поле, возникающее впоследствии на больших расстояниях.

Получим теперь соотношение между гармоническими полями внутри и на поверхности объема. С этой целью рассмотрим сначала скалярный потенциал. Как было показано ранее (см. главу 4), смещение и скорость частицы удовлетворяют следующим уравнениям:

Получим теперь соотношение между гармоническими полями внутри и на поверхности объема. С этой целью рассмотрим сначала скалярный потенциал. Как было показано ранее (см. главу 4), смещение и скорость частицы удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\text{rot } \mathbf{s} = 0 \text{ и } \text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

Это означает, что данные волновые поля можно выразить через скалярный потенциал U . В отличие от предыдущей главы, введем теперь скалярный потенциал как

$$\mathbf{v} = \text{grad } U.$$

Поскольку существует бесконечное множество функций U , описывающих одни и те же поля \mathbf{s} и \mathbf{v} , для обоих потенциалов можно использовать одинаковое обозначение. Далее удобно рассмотреть несколько случаев, различающихся между собой положением первичного источника внутри объема.

Из векторного анализа (см. приложение 3) хорошо известно следующее. Чтобы получить соотношение между значениями волнового поля внутри объема V и на окружающих его поверхностях, удобно воспользоваться теоремой Гаусса–Остроградского:

$$\int_V \text{div } \mathbf{M} dV = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.46)$$

где \mathbf{M} – волновое поле, $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$, \mathbf{n} – единичный вектор, направленный в сторону от объема.

Предполагается, что в каждой точке объема определена дивергенция векторного поля \mathbf{M} , т.е. существуют первые производные его скалярных компонент. Конечно, имеется бесконечное множество векторных полей \mathbf{M} , удовлетворяющих уравнению (6.46).

Заметим, что данный раздел целиком основывается на использовании теоремы Гаусса. Прежде всего, введем вектор \mathbf{M} следующим образом:

$$\mathbf{M} = U(p, k) \nabla G(p, q, k) \quad (6.47)$$

Здесь $U(p, k)$ – комплексная амплитуда потенциала, $G(p, q, k)$ – функция, имеющая производные первого и второго порядка, k – волновое число, p – точка наблюдения, а точка q располагается на поверхности объема V .

Подставляя выражение (6.47) в уравнение (6.46) и учитывая, что

$$\text{div}(U \nabla G) = \nabla U \cdot \nabla G + U \nabla^2 G,$$

получим

$$\int_V \{\nabla U \cdot \nabla G + U \nabla^2 G\} dV = \oint_S U \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad (6.48)$$

поскольку

$$\nabla G \cdot \mathbf{dS} = \text{grad} G \cdot \mathbf{dS} = \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

Используем далее другой вектор:

$$\mathbf{M} = G \nabla U, \quad (6.49)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (6.46) дает

$$\int_V \{\nabla U \cdot \nabla G + G \nabla^2 U\} dV = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS \quad (6.50)$$

Следует заметить, что если функция G является постоянной, то мы приходим к формуле Грина:

$$\int_V \nabla^2 U dV = \oint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS,$$

Вычитая уравнение (6.50) из (6.48), получим

$$\int_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV = \oint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (6.51)$$

Последнее выражение называется второй формулой Грина и также представляет собой формулировку теоремы Гаусса–Остроградского.

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Формула Грина (6.51) справедлива при условии, что обе функции U и G имеют первые и вторые производные всюду внутри объема V .

2. Существует бесконечное число функций $G(p, q, k)$, удовлетворяющих уравнению (6.51).

3. Уравнение (6.51) уже является соотношением между комплексной амплитудой U внутри объема и ее значениями, а также значениями ее нормальной производной на поверхности S . Тем не менее, неизвестная функция U представлена здесь не в явной форме, а только в качестве элемента подынтегрального выражения. Чтобы преодолеть эту проблему, введем еще одно ограничение для функций Грина и получим из уравнения (6.51) формулу Гельмгольца. Начнем с простейшего случая.

Случай 1: среда является однородной, а первичные источники отсутствуют

Предположим, что среда внутри объема V однородная и все источники располагаются вне данного объема (рис. 6.3, а). Поскольку комплексная амплитуда и ее производные описывают реальную волну, эти функции принимают конечные значения всюду внутри объема и

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (6.52)$$

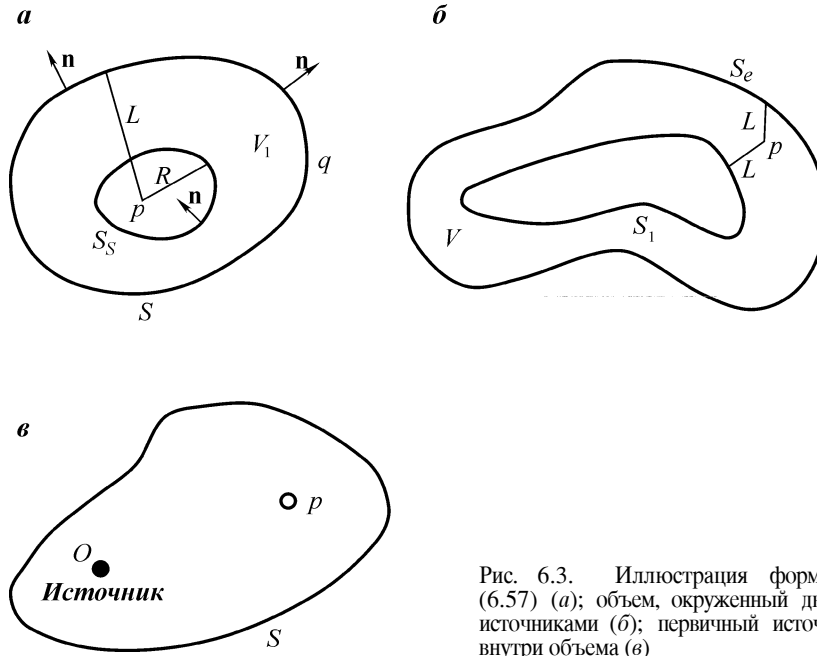


Рис. 6.3. Иллюстрация формулы (6.57) (а); объем, окруженный двумя источниками (б); первичный источник внутри объема (в)

Здесь

$$k = \omega/c.$$

Выберем среди всех возможных функций Грина G такие, которые подчиняются следующим условиям.

1. Всюду в объеме, за исключением некоторой точки p , в которой наблюдается волна, функция $G(p, q, k)$ является решением уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0 \quad (6.53)$$

2. В окрестности точки p функция G ведет себя как

$$G \rightarrow 1/R, \quad (6.54)$$

где R – расстояние до точки p .

Из-за того, что в точке p имеется сингулярность, мы не можем применить уравнение (6.51) ко всему объему V . Чтобы преодолеть это препятствие, окружим точку p поверхностью “безопасности” S_s и затем применим вторую формулу Грина (6.51) к объему V_1 , заключенному между поверхностями S и S_s (см. рис. 6.3, а).

Оба условия, (6.53) и (6.54), играют важную роль при выводе формулы Гельмгольца. В силу условия (6.53) исчезает объемный интеграл в

левой части соотношения (6.51). Действительно, учитывая (6.53) и (6.54), имеем

$$\mathbf{U} \nabla^2 G - G \nabla^2 \mathbf{U} = -k^2 \mathbf{U} G + k^2 \mathbf{U} G = 0.$$

Отсюда выражение (6.51) принимает вид

$$0 = \oint_S \left(\mathbf{U} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_s} \left(\mathbf{U} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \right) dS. \quad (6.55)$$

Второе условие позволяет выразить значение функции \mathbf{U} в точке p через значения этой функции, а также ее нормальной производной $\partial \mathbf{U} / \partial n$ на поверхности S .

Чтобы продемонстрировать это, предположим, что радиус R сферической поверхности S_s стремится к нулю, $V_1 \rightarrow V$, т.е., и рассмотрим поведение второго интеграла в правой части выражения (6.55). Как отмечалось ранее, функции \mathbf{U} и $\partial \mathbf{U} / \partial n$ принимают конечные значения всюду внутри объема V , включая, безусловно, и точки на поверхности $t = t_2$. В отличие от этого, при стремлении радиуса R к нулю обе функции G и $\partial \mathbf{U} / \partial n$ неограниченно растут в соответствии с (6.54) и

$$G \rightarrow \frac{1}{R} \text{ и } \frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial R} = \frac{1}{R^2}, \text{ если } R \rightarrow 0. \quad (6.56)$$

Последнее равенство следует из того, что направление радиус-вектора \mathbf{R} противоположно направлению нормали \mathbf{n} .

Тогда для интеграла по поверхности S_s имеем

$$\oint_{S_s} \left(\mathbf{U} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \right) dS = \oint_{S_s} \mathbf{U} \frac{dS}{R^2} - \oint_{S_s} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \frac{dS}{R}, \text{ если } R \rightarrow 0. \quad (6.57)$$

Функции \mathbf{U} и $\partial \mathbf{U} / \partial n$ — непрерывные и, следовательно, при $R \rightarrow 0$ их значения на поверхности S_s совпадают с соответствующими значениями в точке p :

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}(p), \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}(p)}{\partial n}, \text{ если } R \rightarrow 0$$

Таким образом,

$$\oint_{S_s} \mathbf{U} \frac{dS}{R^2} = \frac{\mathbf{U}(p)}{R^2} \oint dS = 4\pi \mathbf{U}(p) \quad (6.58)$$

и

$$\oint_{S_s} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \frac{dS}{R} = \frac{\partial \mathbf{U}(p)}{\partial n} \frac{1}{R} \oint dS = \frac{\partial \mathbf{U}(p)}{\partial n} 4\pi R \rightarrow 0, \text{ если } R \rightarrow 0.$$

Окончательно, подставляя равенства (6.58) в формулу (6.55), получим следующее соотношение между комплексной амплитудой \mathbf{U} в точке p и значе-

ниями этой функции, а также ее нормальной производной на поверхности S :

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (6.59)$$

Функции \mathcal{U} и $\partial \mathcal{U} / \partial n$, стоящие в правой части этого выражения зависят от точки g , расположенной на поверхности S , причем обе точки, g и p , являются аргументами функции Грина $G(p, q, k)$. Очевидно, что выражение (6.59) позволяет определить волновые поля в любой точке объема V . Так, например, если на поверхности S известны функции \mathcal{U} и $\partial \mathcal{U} / \partial n$, то, беря производные по координатам точки p от обеих частей этого равенства, мы найдем скорость частицы $\mathbf{v}(p, k)$.

Безусловно, существует бесконечное число функций Грина, имеющих такую же особенность (6.54) в точке p и удовлетворяющих уравнению (6.53) во всех остальных точках. Среди всех таких функций выберем простейшую:

$$G(p, g, k) = \frac{e^{ikR}}{R} \quad (6.60)$$

Данная функция является решением уравнения Гельмгольца во всех точках внутри объема V , кроме точки p , в которой эта функция имеет соответствующую особенность $1/R$. Таким образом, вместо выражения (6.59) мы приходим к известной формуле Гельмгольца

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{e^{ikL}}{L} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} \right) dS, \quad (6.61)$$

где L – расстояние между точкой наблюдения p и произвольной точкой q на поверхности S . Из последнего выражения видно, что в каждой точке внутри объема V комплексная амплитуда является результатом суммирования следующих членов:

$$\frac{\partial \mathcal{U}(g)}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} dS \text{ и } \mathcal{U}(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} dS.$$

Это означает, что вблизи каждой точки g поверхности S существует два типа источников, сила которых пропорциональна соответственно

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \text{ и } \mathcal{U},$$

а волна в любой точке внутри объема V является суперпозицией элементарных волн, вызванных данными поверхностными источниками. Мы обсудим это более подробно в одном из последующих разделов. Тем не менее, следует пояснить следующее. Поскольку рассматриваются синусоидальные волны, колебаниям подвергается каждый элементарный объем как внутри, так и вне объема V . Это означает, что действительные источники волны, вызванной

движением частиц и деформацией среды, располагаются повсюду. В то же время из выражения (6.61) следует, что, задав некоторое распределение источников только на поверхности S , можно вычислить соответствующее волновое поле в любой точке объема V . Поэтому указанные поверхностные источники естественно трактовать как фиктивные. Чтобы понять значение этого факта, полезно вспомнить, что потенциалы гравитационного и электрического полей выражаются аналогичным образом, а поверхность S можно всегда вообразить даже в свободном пространстве, где отсутствуют какие-либо массы или заряды.

Из теоремы единственности следует, что волновые поля определяются однозначно в объеме при условии, что в каждой точке поверхности S известны значения одной из функций U или $\partial U/\partial n$. Отсюда следует, что выражение (6.59) можно соответствующим образом преобразовать. Действительно, выберем функцию Грина $G(p, q, k)$, удовлетворяющую следующим условиям.

а) всюду внутри объема V , кроме точки p

$$\nabla^2 G \neq k^2 G = 0$$

б) в окрестности точки p

$$G \rightarrow e^{ikR}/R$$

в) во всех точках поверхности S

$$G = 0 \tag{6.62}$$

С учетом последнего условия, выражение (6.59) можно представить в виде

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \oint U(g) \frac{\partial G(p, g, k)}{\partial n} dS \tag{6.63}$$

Таким образом, чтобы определить комплексный потенциал U внутри объема, достаточно знать значения этой функции на поверхности S . Тем не менее, в общем случае существует одна сложная проблема, а именно, определение функции Грина G связано с решением задачи с граничными условиями.

Если вместо (6.62) использовать условие

$$\partial G/\partial n = 0 \text{ на } S, \tag{6.64}$$

то необходимо будет решать другую граничную задачу, при этом выражение (6.59) перейдет в

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \oint G \frac{\partial U}{\partial n} dS. \tag{6.65}$$

В соответствии с этим, функция $U(a)$ будет выражаться через значения ее нормальной производной на поверхности S . Таким образом, одну и ту же комплексную амплитуду U можно выразить различными способами, используя разные функции Грина G . Это еще раз указывает на то, что функ-

ции U или $\partial U/\partial n$ в общем случае не характеризуют распределение действительных источников на поверхности S .

В отличие от выражений (6.63) и (6.65), функция Грина в формуле Гельмгольца является известной:

$$G = e^{ikL}/L.$$

Следовательно, если на поверхности S известны значения функций U или $\partial U/\partial n$, то определение U в произвольной точке p является задачей численного интегрирования выражения (6.61). Однако, если на поверхности S известны точные значения этих функций, это обычно означает, что граничная задача для потенциала U уже решена. Другими словами, эти функции известны всюду внутри объема V и применять формулу Гельмгольца уже не требуется.

В то же время выражение (6.61) может оказаться полезным для многих целей (в частности, для изучения дифракции) при условии, что значения функций U или $\partial U/\partial n$ приближенно известны на заданной поверхности S , окружающей объем V .

Сделаем еще одно замечание. При выводе выражения (6.59) мы предполагали, что существует только одна поверхность S (см. рис. 6.3, *а*). Легко заметить, что выражение (6.59) не изменится, если вместо одной поверхности имеется сразу несколько. В этом случае

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

Пример объема, заключенного между несколькими поверхностями, приводится на рис. 6.3, *б*.

Случай 2: бесконечный объем

Предположим теперь, что объем V заключен между двумя поверхностями S_1 и S_e и в нем по-прежнему не содержится первичных источников (см. рис. 6.3, *б*). Тогда, формула Гельмгольца преобразуется к виду

$$\begin{aligned} U(p) = & \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left[\frac{e^{ikL}}{L} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} \right] dS + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_e} \left[\frac{e^{ikL}}{L} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} \right] dS. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Рассмотрим поведение второго интеграла, когда все точки поверхности S_e стремятся к бесконечности. В этом случае поверхность S_e можно заменить сферой S с центром в точке p и радиусом $R = L$, увеличивающимся до бесконечности.

Поскольку направления нормали \mathbf{n} и радиус-вектора \mathbf{R} совпадают,

$$\partial U/\partial n = \partial U/\partial R$$

и второй интеграл в выражении (6.66) переходит в

$$\begin{aligned} \oint_{S_r} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - U \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{ikR}}{R} \right] dS &= \oint_{S_r} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - ikU \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{U}{R^2} e^{ikR} \right] dS = \\ &= \oint_{S_r} \left[\frac{\partial U}{\partial R} - ikU \right] \frac{e^{ikR}}{R} dS + \oint_{S_r} \frac{U e^{ikR}}{R^2} dS. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Элемент поверхности dS записывается в виде

$$dS = R^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – телесный угол, под которым элемент dS виден из точки p . Соответственно, правую часть соотношения (6.67) можно представить как

$$\oint_{S_r} R \left[\frac{\partial U}{\partial R} - ikU \right] e^{ikR} d\Omega + \oint_{S_r} U e^{ikR} d\Omega \quad (6.68)$$

Слагаемое

$$\oint_{S_r} U e^{ikR} d\Omega$$

стремится к нулю, если комплексная амплитуда U непрерывно стремится к нулю ($U \rightarrow 0$) по координатам θ и φ . Так, например, указанный интеграл исчезает, если

$$|RU| < N \text{ как } R \rightarrow \infty \quad (6.69)$$

где N – некоторое конечное число.

Первый из интегралов (6.66) стремится к нулю при условии

$$R \left[\frac{\partial U}{\partial R} - ikU \right] \rightarrow 0 \text{ как } R \rightarrow \infty$$

Последний предел является монотонным по координатам θ и φ .

Таким образом, если удовлетворяются условия (6.69) и (6.70), введенные Зоммерфельдом, то формулу Гельмгольца (6.61) можно по-прежнему применять, даже в том случае, когда объем является бесконечным.

Рассматривая теорему единственности для синусоидальных волн, мы пришли к нестрогому выводу о том, что волновые поля должны стремиться к нулю на бесконечности.

Теперь можно утверждать, что условия (6.69) и (6.70) ясно показывают справедливость этого вывода. В реальных ситуациях первичные источники располагаются внутри объема конечных размеров. Это означает, что на бесконечности наблюдаются только уходящие волны и

$$U \sim \frac{e^{ikR}}{R}, \text{ если } R \rightarrow \infty.$$

Подставляя это выражение в (6.70), мы видим, что это последнее условие удовлетворяется. Если же предположить, что на бесконечности существует приходящая волна

$$U \sim e^{-ikR}/R$$

то условие (6.70) перестает выполняться.

Таким образом, условия (6.69) и (6.70), называемые обычно условиями излучения Зоммерфельда, означают отсутствие первичных источников на бесконечности.

Случай 3: источники внутри однородной среды

Предположим теперь, что первичный источник располагается в окрестности точки O внутри объема V , занятого однородной средой (рис. 6.3, в). Например, таким источником может быть элементарный сферический источник, имеющий особенность в этой точке. Поскольку формула Гельмгольца перестает выполняться, если комплексная амплитуда U имеет особенность внутри объема V , представим эту функцию в следующем виде:

$$U(p, k) = U_0(p, k) + U_s(p, k) \quad (6.71)$$

Здесь U_0 является комплексной амплитудой потенциала, вызванного первичным источником в точке O в бесконечном объеме однородной среды. Эта составляющая поля рассматривалась в предыдущей главе и, следовательно, предполагается известной.

Второе слагаемое, U_s , может быть вызвано первичным источником или наличием неоднородностей за пределами данного объема и, в отличие от первого слагаемого, оно не имеет сингулярности внутри V .

В соответствии с этим, формулу Гельмгольца применим к функции U_s , и в результате получим следующее выражение для полной комплексной амплитуды:

$$U(p) = U_0(p) + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{e^{ikL}}{L} \frac{\partial U_s}{\partial n} - U_s \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} \right) dS. \quad (6.72)$$

Безусловно, это выражение остается справедливым и в том случае, когда имеется несколько первичных источников и несколько поверхностей, ограничивающих объем V .

В заключение данного раздела обсудим одно интересное свойство интеграла (6.59). Предположим, что вне объема V среда является однородной и функция Грина G имеет особенность внутри V . Тогда, согласно выражению (6.51), имеем

$$\oint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (6.73)$$

где подынтегральное выражение берется на внешней стороне поверхности S .

Из сравнения формул (6.59) и (6.72) видно, что фиктивные источники на поверхности S “возбуждают” волну внутри объема V , однако вне объема суммарный эффект от этих источников равняется нулю.

Этот факт используется иногда в качестве доказательства одного из самых важных предположений Гюйгенса, и мы подробно обсудим это в дальнейшем.

6.3. ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ КИРХГОФА

В этом разделе мы продолжим изучение волн, вызванных различными источниками, и покажем, как формула Гельмгольца применяется для изучения дифракции в присутствии жесткого экрана. Конечно, такая модель среды обычно рассматривается в оптике и вряд ли имеет какое-либо практическое значение в сейсмологии. Однако изучение волн в присутствии жесткого экрана позволяет наблюдать формирование различных дифракционных картин, а также переход к высокочастотной части спектра (лучевое приближение). В то же время, как будет показано, существуют случаи, когда этого предела нельзя достичь, даже для самых малых длин волн.

В дальнейшем все перечисленные свойства будут наблюдаться при изучении акустических и упругих волн в более реалистичных моделях. Учитывая, что теория Кирхгофа в случае жесткого экрана математически довольно проста, мы подробно опишем дифракцию именно в этой модели.

Удобно различать следующие два случая.

1. Непрозрачный экран с отверстием (щелью) (рис. 6.4, *а*).
2. Экран конечных размеров (рис. 6.4, *б*).

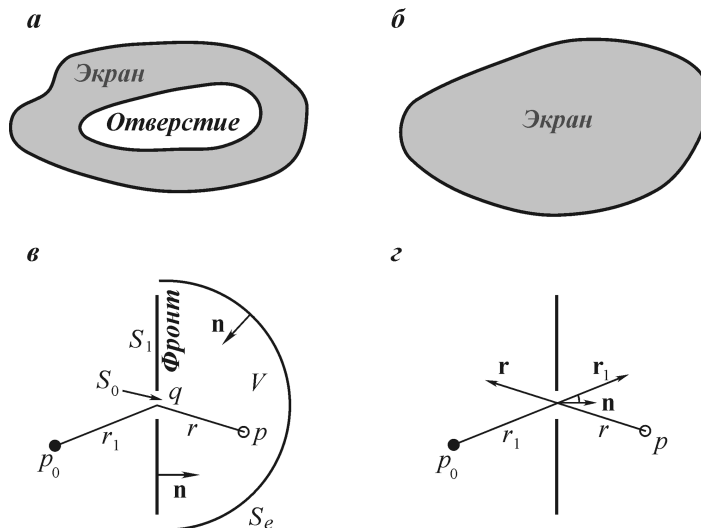


Рис. 6.4. Экран с отверстием (*а*); экран конечных размеров (*б*); иллюстрация формулы (6.74) (*в*); иллюстрация формулы (6.83) (*г*)

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Экран (с отверстием или без него) представляет собой неоднородность, параметры которой отличаются от параметров окружающей среды. Чтобы определить волновые поля, необходимо решить задачу с граничными условиями. Другими словами, требуется найти решение волнового уравнения внутри и вне экрана. Помимо этого, функции, являющиеся решениями этого уравнения, должны удовлетворять граничным условиям на поверхности экрана. Это означает, что поведение комплексной амплитуды U должно обеспечивать равенство избыточного давления и компонент скорости частиц на обеих сторонах поверхности экрана. Более того, вне экрана функция U должна вести себя соответствующим образом вблизи источника и на бесконечности.

Следовательно, для того, чтобы определить волновые поля вне экрана, необходимо их знать внутри него, что в общем случае является сложной вычислительной задачей. Поэтому большое значение имеют приближенные методы расчета. В данном разделе рассматривается один из таких методов, предложенный Кирхгофом.

Пусть первичный источник расположен в окрестности точки p_0 и в среде имеется жесткий экран с отверстием. Наша цель состоит в том, чтобы найти волновые поля в объеме V за экраном (рис. 6.4, в). В соответствии с формулой Гельмгольца, комплексную амплитуду U в любой точке объема V позади экрана можно записать как

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ U(g) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS \quad (6.74)$$

В отличие от предыдущего раздела, здесь предполагается, что единичный вектор \mathbf{n} направлен внутрь объема и

$$S = S_0 + S_1 + S_e, \quad (6.75)$$

где S_0 и S_1 обозначают, соответственно, площадь отверстия и остальной части экрана, а S_e – сферическая поверхность бесконечного радиуса. Считая, что на бесконечности первичные источники отсутствуют, интегралом по поверхности S_e можно пренебречь. Тогда вместо (6.75) получим

$$S = S_0 + S_1 \quad (6.76)$$

Таким образом, площадь интегрирования совпадает с поверхностью экрана и включает в себя как его непрозрачные части, так и площадь отверстия. Предположим сначала, что непрозрачный экран занимает всю плоскость до бесконечности. Под действием падающей волны U_0 , вызванной первичным источником, частицы экрана начинают колебаться, и эти новые источники приводят к появлению вторичных волн U_s . Таким образом, полная комплексная амплитуда равняется

$$U = U_0 + U_s \quad (6.77)$$

Поскольку экран жесткий и имеет неограниченные размеры, волны в объеме V позади экрана отсутствуют. Иными словами, волны, вызванные первичными и вторичными источниками, гасят друг друга, и

$$U = 0 \text{ в } V.$$

В частности, вблизи передней части экрана функция U и ее производная $\partial U / \partial n$ равны нулю. При наличии в экране отверстия (см. рис. 6.4, *a*) распределение вторичных источников на экране меняется, и вследствие этого в объеме V появляются волны. Как отмечалось ранее, чтобы определить волновые поля, необходимо, в общем случае, решить граничную задачу. Однако при определенных условиях поведение волн вблизи передней части экрана можно предсказать с достаточной точностью, используя формулу Гельмгольца для вычисления функции U в объеме V .

Рассмотрим волну в точках, принадлежащих отверстию. Конечно, вторичные источники на экране вызывают появление дополнительных волн в каждой точке отверстия, и поэтому полное волновое поле неизвестно. В то же время, при увеличении размеров отверстия, расстояние между его центральной частью и вторичными источниками вблизи экрана становится больше, а их влияние, соответственно, уменьшается. Поэтому приближенно можно считать, что в таких точках отверстия имеющего достаточно большие размеры, волновое поле состоит только из падающей волны. Это предположение не выполняется в точках, находящихся вблизи края непрозрачного экрана, хотя в этой области волны могут взаимно гасить друг друга из-за разности фаз. Конечно, такое поведение волн может наблюдаться, только если длина волны значительно меньше размеров отверстия.

ФОРМУЛА ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим далее поведение волны вблизи передней части экрана, но вне отверстия. Как мы уже знаем, если отверстие в экране отсутствует, функция U и ее производные равны нулю в объеме V , однако при его наличии волновая картина меняется, и волна появляется всюду, включая переднюю часть экрана. С физической точки зрения почти очевидно, что в точках экрана, расположенных относительно далеко от отверстия, влияние этой волны пренебрежимо мало. А с уменьшением длины волны такое поведение наблюдается все ближе к отверстию. Подобные рассуждения позволили Кирхгофу предположить следующее.

На поверхности отверстия S_0 волна совпадает с первичной (падающей) волной, и

$$U = U_0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U_0}{\partial n} \text{ на } S_0, \quad (6.78)$$

в то время как на передней части непрозрачного экрана выполняются следующие равенства:

$$U = U_0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ на } S_1. \quad (6.79)$$

Соотношения (6.78), (6.79) называются граничными условиями Кирхгофа и играют основополагающую роль в предложенной им теории дифракции.

Здесь следует сделать два замечания.

а) первое из условий (6.78) означает, что здесь пренебрегли взаимодействием между вторичными источниками.

б) данный подход очень похож на борновское приближение, часто используемое в математической физике.

Предположим для простоты, что падающая волна вызвана элементарным сферическим источником, расположенным в точке p_0 . Тогда

$$U_0 = A \frac{e^{ikr_1}}{r_1}, \quad (6.80)$$

где r_1 – расстояние от источника, а коэффициент A характеризует его силу.

Дифференцирование U_0 по n дает

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} = \frac{\partial U_0}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial n}$$

или

$$\frac{\partial U_0}{\partial r_1} = A \frac{e^{ikr_1}}{r_1^2} (ikr_1 - 1) \frac{\partial r_1}{\partial n} \quad (6.81)$$

Из рис. 6.4, z видно, что

$$\frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)$$

Здесь $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)$ обозначает угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{r}_1 .

Действительно, имеем

$$\frac{\partial r_1}{\partial n} = \text{grad } r_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_1^0 \cdot \mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1),$$

так как

$$\text{grad } r_1 = \mathbf{r}_1^0$$

является единичным вектором в направлении \mathbf{r}_1 .

Следует заметить, что

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1}{nr_1} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1}{r_1},$$

поскольку

$$|\mathbf{n}| = 1.$$

По аналогии получим

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}), \quad (6.82)$$

где r – расстояние между произвольной точкой отверстия в экране и точкой наблюдения p .

Подстановка выражений (6.81), (6.82) в формулу Гельмгольца дает

$$U(p) = \frac{A}{4\pi} \int_{S_0} \left[\frac{e^{ikr_1}}{r_1} \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikr_1}}{r_1^2} (ikr_1 - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) \right] dS$$

или

$$U(p) = \frac{A}{4\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+r_1)}}{r r_1} \left[\frac{1}{r} (ikr - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \frac{1}{r_1} (ikr_1 - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) \right] dS, \quad (6.83)$$

где (\mathbf{n}, \mathbf{r}) обозначает угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{r} (рис. 6.4, з).

Таким образом, используя формулу (6.83), основанную на приближенных граничных условиях, можно оценить волновые поля в объеме V , при условии, что длина волны меньше размеров отверстия, а точки наблюдения лежат вдали от его края.

Подынтегральное выражение в (6.83) содержит только элементарные функции, и численное интегрирование довольно просто выполняется на компьютере, несмотря на присутствие осциллирующего множителя

$$e^{ik(r+r_1)}.$$

Однако в прошлом выполнить процедуру интегрирования было очень сложно, и поэтому были предложены различные приближенные способы для выражения интеграла (6.83) через известные функции. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые из этих методов, а пока можно заметить следующее.

1. Значение интеграла (6.83) не изменится, если в нем r и r_1 поменять местами. Это означает, что источник в точке p_0 приводит к тому же эффекту в точке p , как если бы он находился в точке p , а наблюдение велось в точке p_0 . Этот результат был установлен Гельмгольцем и называется теоремой взаимности.

2. Опишем теперь еще одно интересное свойство волн, которое также следует из формулы Гельмгольца. Оно относится к действию двух дополняющих друг друга экранов, установленных так, что отверстие в одном из них в точности соответствует непрозрачной части другого (рис. 6.5, а).

Пусть U_1 и U_2 обозначают комплексные амплитуды потенциалов, когда между источником и точкой наблюдения располагаются, соответственно, экран с отверстием и дополняющий его экран. Тогда, в соответствии с формулой Гельмгольца, имеем

$$U_1(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{01}} \left[U(g) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U(g)}{\partial n} \right] dS$$

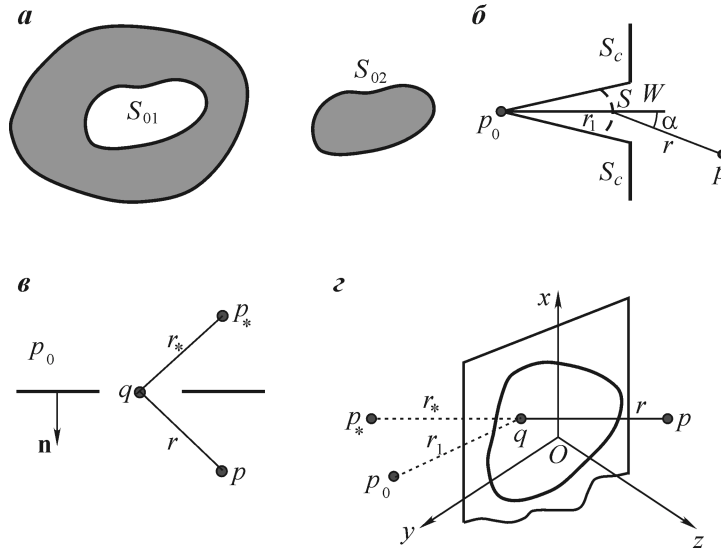


Рис. 6.5. Экраны, дополняющие друг друга (а); иллюстрация формулы (6.89) (б); иллюстрация формулы (6.92) (в); вывод формулы (6.96) (г)

и

(6.84)

$$U_2(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{02}} \left[U(g) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U(g)}{\partial n} \right] dS$$

где S_{01} и S_{02} – площади отверстий обоих экранов.

Очевидно, что

$$S = S_{01} + S_{02}$$

равняется площади всей поверхности экрана.

Из формулы (6.61) следует, что

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[U(g) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U(g)}{\partial n} \right] dS \quad (6.85)$$

где $U(p)$ – комплексная амплитуда в точке p при отсутствии экранов.

Следовательно, выражения (6.84), (6.85) приводят к важному результату:

$$U(p) = U_1(p) + U_2(p) \quad (6.86)$$

т.е. сумма волн в присутствии двух дополняющих друг друга экранов равняется волне, которая распространяется, когда эти экраны отсутствуют. Этот результат известен как принцип Бабине. Используя выражение (6.86) легко

показать, что этот принцип справедлив для любой кусочно-однородной среды.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, положим $U_1 = 0$. Это означает, что $U_2 = U$ и во всех точках, где интенсивность равняется нулю из-за присутствия одного из экранов, в присутствии дополнительного экрана она становится равной той интенсивности, которая образуется, когда экран полностью отсутствует.

Вернемся теперь к выражению (6.83) и рассмотрим один частный случай. Предположим, что расстояния от отверстия до источника r_1 и до точки наблюдения r много больше длины волны:

$$r_1 \gg \lambda \text{ и } r \gg \lambda$$

или

$$kr_1 \gg 1 \text{ и } kr \gg 1. \quad (6.87)$$

Тогда, пренебрегая в (6.83) единицей по сравнению с kr и kr_1 , получим

$$U(p) = \frac{Ai}{2\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+r_1)}}{rr_1} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})] dS \quad (6.88)$$

т.е. известную формулу дифракции Френеля–Кирхгофа.

Из вывода формулы Гельмгольца следует, что вместо поверхности S_0 можно взять произвольную поверхность W , граница которой совпадает с краем отверстия (рис. 6.5, б). Например, эта поверхность может состоять из двух частей: части сферической поверхности S , на которой падающая волна имеет постоянные амплитуду и фазу, и сегмента конической поверхности S_c с вершиной в точке p_0 . С увеличением расстояния r_1 вклад интеграла по конической поверхности становится меньше, и поверхность S_0 почти совпадает с волновой поверхностью S . Поскольку на этой поверхности отношение

$$e^{ik(r+r_1)} / r_1$$

остается постоянным и

$$\frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) = 1,$$

получаем

$$U(p) = \frac{iA}{2\lambda} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \int_{S_0} e^{ikr} (1 + \cos\alpha) dS, \quad (6.89)$$

где

$$\cos\alpha = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$$

Если, помимо этого, расстояние r достаточно велико по сравнению с размерами отверстия, то комплексная амплитуда (6.89) на поверхности S_0 меняется мало, и вместо этого выражения мы можем записать

$$U(p) = \frac{iA}{2\lambda} \frac{e^{ikr_1}}{r_1 r} \int_{S_0} e^{ikr} (1 + \cos \alpha) dS$$

или

$$U(p) = \frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikr_1}}{r_1 r} \int_{S_0} e^{ikr} \cos^2 \frac{\alpha}{2} dS \quad (6.90)$$

До настоящего момента выводы всех выражений основывались на формуле Гельмгольца, однако теперь мы используем соотношение (6.63), полученное в предыдущем разделе:

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} U(g) \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (6.91)$$

Здесь $G = G(p, g, k)$ – функция Грина, равная нулю на поверхности экрана.

Как отмечалось ранее, для экрана произвольной формы эту функцию определить достаточно трудно. Однако плоский экран является одним из немногочисленных исключений, и в этом случае функция Грина записывается как

$$G(p, g, k) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_*}}{r_*}, \quad (6.92)$$

где r_* – расстояние между экраном и точкой p_* , которая является зеркальным отображением точки наблюдения (рис. 6.5, в). Действительно, указанная функция удовлетворяет формуле Гельмгольца в объеме V , имеет особенность в точке наблюдения, подчиняется условиям на бесконечности и равняется нулю во всех точках отверстия, когда $r = r_*$. Введем теперь декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O , расположенным в пределах отверстия (рис. 6.5, з). Ось z при этом направлена внутрь объема V , а ξ , η и ζ , являются координатами точки g отверстия. Тогда расстояния r и r_* определяются следующими равенствами:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

и (6.93)

$$r_*^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta_*)^2,$$

где x , y и z – координаты точки наблюдения.

Нормальные производные от первого и второго члена в выражении (6.92) равняются

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$$

и (6.94)

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_*}}{r_*} \right) = \frac{e^{ikr_*}}{r_*^2} (ikr_* - 1) \frac{\partial r_*}{\partial n} = \frac{e^{ikr_*}}{r_*^2} (ikr_* - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_*).$$

Учитывая, что

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = -\cos\alpha \text{ и } \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_*) = -\cos\alpha$$

имеем

$$\frac{\partial G}{\partial n} \frac{2e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \cos\alpha \text{ на } S_0. \quad (6.95)$$

Подставляя последнее выражение в формулу (6.91) и используя условия Кирхгофа, окончательно получим

$$U(p) = -\frac{A}{2\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+r_1)}}{r^2 r_1} (ikr - 1) \cos\alpha dS. \quad (6.96)$$

В частности, в волновой зоне, где

$$kr \gg 1,$$

имеем

$$U(p) = -\frac{A i}{\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+r_1)}}{r r_1} \cos\alpha dS. \quad (6.97)$$

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ И ФРАУНГОФЕРА

Далее, выполняя интегрирование в (6.97), предположим, что члены $1/r r_1$ и $\cos\alpha$ остаются практически постоянными. В этом приближении выражение (6.97) записывается в виде

$$U(p) = -\frac{A i \cos\alpha}{\lambda R R_1} \int_{S_0} e^{ik(r+r_1)} d\xi d\eta, \quad (6.98)$$

где R и R_1 – расстояния от начала координат O до точки наблюдения и первичного источника, соответственно, а α – угол, образованный нормалью \mathbf{n} и радиус-вектором \mathbf{R}_1 . Что выражения (6.88) и (6.97) совпадают, если предположить, что $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \cos\alpha$.

Согласно сделанным предположениям, размер отверстия значительно меньше расстояний R и R_1 , что позволяет упростить формулу (6.98). Поскольку $\xi = 0$, имеем

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2,$$

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2$$

и

$$(6.99)$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R_1^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Теперь представляется естественным разложить r и r_1 в ряд по степеням ξ/R , η/R и ξ/R_1 , η/R_1 .

Из равенств (6.99) следует, что

$$r_1 = R_1 \left(1 - 2 \frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_1^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R_1^2} \right)^{1/2} \approx R_1 - \frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_1} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_1} - \frac{(x_0 \xi + y_0 \eta)^2}{2R_1^3} + \dots$$

(6.100)

и

$$r \approx R - \frac{x \xi + y \eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x \xi + y \eta)^2}{2R^3} + \dots$$

Подстановка выражений (6.100) в (6.98) дает

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{A i \cos \alpha}{\lambda R R_1} e^{ik(R+R_1)} \int_{S_0} e^{ikf(\xi, \eta)} d\xi d\eta \quad (6.101)$$

где

$$f(\xi, \eta) \approx -\frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_1} - \frac{x \xi + y \eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_1} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R} - \frac{(x_0 \xi + y_0 \eta)^2}{2R_1^3} - \frac{(x \xi + y \eta)^2}{2R^3}. \quad (6.102)$$

Заметим, что в этом выражении отброшены члены со степенями ξ и η больше двух.

Удобно также ввести направляющие косинусы:

$$l_0 = x_0/R_1, \quad m_0 = y_0/R_1$$

и (6.103)

$$l = x/R, \quad m = y/R.$$

Например, l и l_0 характеризуют углы между осью x и векторами \mathbf{R} и \mathbf{R}_1 , соответственно.

Следовательно, функцию $f(\xi, \eta)$ можно записать в следующем виде:

$$f(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0 \xi + m_0 \eta)^2}{R_1} - \frac{(l \xi + m \eta)^2}{R} \right]. \quad (6.104)$$

Предположим, что в формуле (6.104) можно пренебречь квадратичными членами, т.е.

$$f(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta, \quad (6.105)$$

В этом случае, как уже было отмечено в разделе 6.2, говорят о дифракции Фраунгофера. При сохранении этих членов мы имеем дело с дифракцией Френеля. Это означает, что приближение Фраунгофера справедливо, если точка наблюдения и первичный источник находятся далеко от экрана. Строго говоря, выражение (6.105) соответствует случаю, когда

$$R \rightarrow \infty \text{ и } R_1 \rightarrow \infty \quad (6.106)$$

В то же время приближение Френеля довольно хорошо описывает волновые поля на более близких расстояниях, хотя и не вблизи самого экрана.

6.4. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА И ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

Рассмотрим теперь некоторые интересные черты поведения волн за экраном (рис. 6.5, з). Согласно теории Кирхгофа, комплексную амплитуду скалярного потенциала U можно записать в следующем виде (см. формулу 6.98):

$$U(p) = C_0 \int_{S_0} e^{ikf(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (6.107)$$

где функция $f(\xi, \eta)$ определяется выражением (6.104).

Комплексный множитель C_0 прямо пропорционален силе источника и зависит от волнового числа, а также от того, на каком расстоянии от отверстия в экране находятся первичный источник и точка наблюдения.

При выводе формулы (6.107) использовались следующие предположения.

1. Поведение волны на поверхности экрана описывается граничными условиями Кирхгофа. Это означает, в частности, что размер отверстия должен быть больше длины волны.

2. Расстояние от экрана до точки наблюдения и источника превышает длину волны:

$$R > \lambda \text{ и } R_1 > \lambda.$$

3. Расстояния R и R_1 должны быть также больше размеров отверстия. Это предположение позволяет заменить функции $1/r$ и $1/r_1$ в выражении (6.97) на постоянный множитель $1/RR_1$, и вынести его, а также $\cos\alpha$, из-под знака интеграла. Помимо этого мы представили функцию $r + r_1$ на поверхности интегрирования в виде полинома второй степени по координатам ξ и η , и пренебрегли членами более высокого порядка.

С учетом сделанных предположений трудно ожидать, что выражение (6.107) может обеспечить достаточную точность вблизи отверстия или непрозрачной части экрана. Из формулы (6.107) следует, что волну в любой точке наблюдения можно трактовать как суперпозицию плоских волн с одинаковой амплитудой $|C_0 d\xi d\eta|$, но с разными фазами

$$k(R + R_1) - \frac{\pi}{2} + k f(\xi, \eta). \quad (6.108)$$

Другими словами, все выглядит так, как если бы каждый элемент поверхности S_0 возбуждал плоскую волну, амплитуда которой, в отличие от фазы, не зависела бы от координат ξ и η . Заметим, что первые два слагаемых в (6.108) появляются из-за множителя C_0 , как это следует из формулы (6.101).

Ранее мы показали, что интерференция плоских волн может быть конструктивной или деструктивной. Например, если волны приходят в точку наблюдения с близкими фазами, то наблюдается увеличение амплитуды волны. И, наоборот, в случае, когда фазы волн заметно различаются между собой, это приводит к взаимному гашению волн и результирующая волна имеет относительно небольшую амплитуду.

Поэтому, рассматривая поведение волн в различных точках позади экрана, мы можем ожидать, что будут наблюдаться зоны относительно высоких и относительно низких амплитуд, которые, по существу, представляют собой дифракционную картину.

Прежде чем приступить к изучению этого явления, рассмотрим факторы, влияющие на фазу каждой из плоских волн в точке наблюдения. Для этого представим функцию $f(\xi, \eta)$, заданную выражением (6.104), в виде

$$f(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) + f_2(\xi, \eta), \quad (6.109)$$

где

$$f_1(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta \quad (6.110)$$

и

$$f_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{R_1} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{R} \right]. \quad (6.111)$$

Как следует из формулы (6.101), фаза волны, вызванной элементом dS в окрестности начала координат $\xi = 0, \eta = 0$, равняется

$$k(R + R_1) - \frac{\pi}{2}.$$

Она зависит от длины волны и расстояния от начала координат до первичного источника и точки наблюдения.

В то же время фаза плоской волны, вызванной произвольным элементом dS , определяется следующими параметрами:

- 1) длиной волны λ ;
- 2) координатами ξ и η элемента dS ;
- 3) координатами источника и точки наблюдения.

Например, с увеличением расстояния R_1 влияние этого параметра на функцию $f_2(\xi, \eta)$ уменьшается. Это означает, что падающая волна вблизи поверхности экрана S_0 ведет себя как плоская, и ориентация ее фронта относительно плоскости S_0 определяется направляющими косинусами l_0 и m_0 . Например, если источник располагается на оси z , то

$$l_0 = m_0 = 0.$$

В этом случае фронт падающей волны параллелен плоскости экрана и, следовательно, вторичные источники имеют одинаковую фазу. Однако в общем случае фазы этих источников зависят также от координат ξ и η элемента поверхности. Вблизи начала координат разность фаз между волнами в

некоторой точке и в начале координат описывается с хорошей точностью линейной функцией $f_1(\xi, \eta)$. Однако с увеличением расстояния $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ необходимо также учитывать функцию $f_2(\xi, \eta)$.

Очевидно, что когда оба расстояния R и R_1 становятся значительно больше размеров отверстия, поведение функции $f(\xi, \eta)$ в основном определяется первым слагаемым: $f_1(\xi, \eta)$. В этом случае мы имеем дело с приближением, которое называется дифракцией Фраунгофера. Прежде, чем приступить к рассмотрению примеров, иллюстрирующих этот тип дифракции, следует сформулировать условия, при которых можно пренебречь функцией $f_2(\xi, \eta)$ и считать, что фаза элементарных волн изменяется линейно. Из формулы (6.107) следует, что указанная функция задает поведение члена

$$e^{ikf_2(\xi, \eta)}$$

Его амплитуда всегда равняется единице, но фаза $kf_2(\xi, \eta)$ может очень быстро изменяться от точки к точке на поверхности S_0 при больших значениях волнового числа. Тем не менее, если фаза мала, значения этого члена близки к единице. Соответственно, условие, позволяющее рассматривать только линейный член функции $f(\xi, \eta)$, можно записать как

$$kf_2(\xi, \eta) \ll 2\pi$$

или

$$\frac{1}{2}k \left[\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{R_1} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{R} \right] \ll 2\pi. \quad (6.112)$$

Воспользуемся также следующим неравенством:

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2). \quad (6.113)$$

Действительно, имеем

$$2abcd \leq b^2a^2 + a^2d^2$$

или

$$(ad - bc)^2 \geq 0.$$

Следовательно,

$$(l_0\xi + m_0\eta)^2 \leq (l_0^2 + m_0^2)(\xi^2 + \eta^2)$$

и

$$(l\xi + m\eta)^2 \leq (l^2 + m^2)(\xi^2 + \eta^2).$$

Так как значения параметров l_0, l, m_0 и m не превышают единицы, неравенство (6.112) будет выполняться, если

$$R_1 \gg \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda} \text{ и } R \gg \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda}. \quad (6.114)$$

Эти условия определяют те расстояния R и R_1 , а также размер площадки интегрирования S_0 , для которых можно использовать приближение Фраунгофера. Данные условия схожи с условиями, полученными в разделе 1.

Рассмотрим теперь два примера, иллюстрирующие дифракцию в указанном приближении.

Пример 1: дифракционная картина для прямоугольного отверстия

Пусть отверстие имеет форму прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, как показано на рис. 6.6, *а*. Оси x и y прямоугольной системы координат параллельны сторонам прямоугольника, а ее начало O расположено в центре прямоугольника. Соответственно, ось z перпендикулярна экрану и направлена внутрь объема V . Предположим также, что первичный источник расположен на оси z , т.е.

$$l_0 = x_0/R_1 = 0 \text{ и } m_0 = y_0/R_1 = 0.$$

Тогда вместо выражения (6.107) имеем

$$U(p) = C_0 N, \quad (6.115)$$

где

$$N = \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b d\eta e^{-ik(l\xi + m\eta)} \quad (6.116)$$

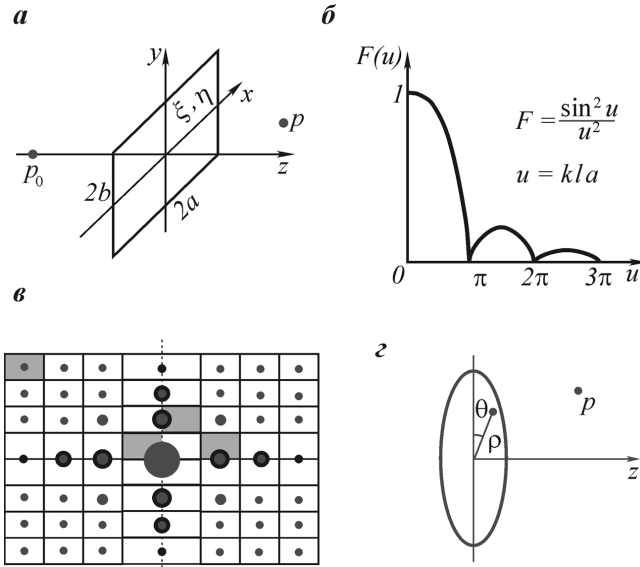


Рис. 6.6. Отверстие прямоугольной формы (*а*); функция интенсивности $F(\text{б})$; дифракционная картина для прямоугольного отверстия (*в*); экран с круглым отверстием (*г*)

или

$$N = \int_{-a}^a e^{-ikl\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-ikm\eta} d\eta.$$

Здесь

$$l = x/R \text{ и } m = y/R, \quad (6.117)$$

x и y обозначают координаты точки наблюдения, и

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (6.118)$$

Интегралы (в выражениях) (6.116) являются табличными и

$$\int_{-a}^a e^{ikl\xi} d\xi = \frac{1}{ikl} (e^{ikla} - e^{-ikla}) = \frac{2}{kl} \sin kla.$$

Аналогично,

$$\int_{-b}^b e^{ikm\eta} d\eta = \frac{2}{km} \sin kmb.$$

Таким образом,

$$N = S_0 \left(\frac{\sin kla}{kla} \right) \left(\frac{\sin kmb}{kmb} \right), \quad (6.119)$$

где

$$S_0 = 4 a b \quad (6.120)$$

является площадью прямоугольника.

Поскольку интенсивность волны пропорциональна U^2 , введем, как и ранее, функцию I :

$$I = U^2 = I_0 F, \quad (6.121)$$

где

$$I_0 = C_0^2 S_0^2, \quad C_0 = -\frac{A i \cos \alpha}{\lambda R R_1} \quad (6.122)$$

и

$$F = N^2 \left(\frac{\sin kla}{kla} \right)^2 \left(\frac{\sin kmb}{kmb} \right)^2. \quad (6.123)$$

Рассмотрим сначала, как ведет себя функция I в точках на оси z . В этом случае $x = 0$, $y = 0$ и, следовательно,

$$l = 0 \text{ и } m = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

получим

$$F = 1 \text{ и } I = I_0. \quad (6.124)$$

Таким образом, из выражения (6.122) следует, что функция интенсивности I ведет себя обратно пропорционально квадрату расстояния от начала координат O .

Изучим теперь, как ведет себя функция F на плоскости

$$z = d,$$

параллельной экрану.

Рассмотрим сначала профиль $y = 0, m = 0$. В этом случае

$$F = N^2 \frac{\sin^2 kla}{(kla)}, \quad (6.125)$$

где

$$l = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \quad (6.126)$$

При изучении интерференции волн, вызванных первичными источниками, мы имеем дело с той же самой функцией $F(u)$, что снова отображено (см. рис. 6.6, б).

С увеличением расстояния от оси z интенсивность сначала падает, а затем обращается в нуль при значении аргумента

$$k l a = \pm \pi n, \quad (6.127)$$

где n — целое число.

Таким образом, существует такое множество точек x_1, x_2, x_3, \dots в которых интерференция вторичных волн имеет деструктивный характер и результирующая волна отсутствует. Между этими точками располагаются максимумы функции F , положение которых определяется уравнением

$$F' = \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right)' = 0$$

или

$$u = \tan u \quad (6.128)$$

Здесь

$$u = k l a.$$

Как показано в табл. I, с увеличением u корни этого уравнения асимптотически стремятся к

Т А Б Л И Ц А 1

u	$\sin^2 u/u^2$
0	1
$1,430\pi = 4,493$	0,04718
$2,459\pi = 7,725$	0,01648
$3,470\pi = 10,90$	0,00834
$4,479\pi = 14,07$	0,00503

$$u = \frac{2n+1}{2}\pi. \quad (6.129)$$

Подставляя (6.129) в (6.125), получаем приближенное значение максимумов

$$F_{\max} \approx \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2}. \quad (6.130)$$

Похожее поведение наблюдается вдоль оси y , где

$$I = I_0 \frac{\sin^2 kmb}{(kmb)^2}$$

Очевидно, что чередование максимумов и минимумов происходит также вдоль прямых, направленных под углом к осям координат, однако такие максимумы гораздо слабее, чем те, что располагаются вдоль осей x и y . Причиной этого является то, что значение функции F определяется в формуле (6.123) произведением двух малых сомножителей.

Следует заметить, что с увеличением координаты x либо y параметры l и m стремятся к единице и, соответственно, мы имеем

$$F \rightarrow \frac{\sin^2 ka}{(ka)^2} \text{ или } F \rightarrow \frac{\sin^2 kb}{(kb)^2}.$$

Из выражения (6.123) видно, что вдоль прямых

$$kla = \pi n \text{ и } klb = \pi n,$$

где n – целое число, функция I обращается в нуль. Эти два множества прямых образуют систему поверхностных элементов, в пределах которой наблюдаются максимумы различной интенсивности (рис. 6.6, в). Следовательно, в силу конструктивной и деструктивной интерференции отображение прямоугольного отверстия на плоскость $z = d$ имеет регулярный, хотя и довольно сложный характер, который является яркой иллюстрацией явления дифракции.

Рассмотрим теперь, как на дифракционную картину влияют размеры отверстия и длина волны. Как следует из формул (6.126) – (6.127), положение нулей интенсивности определяется выражением

$$\frac{kxa}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \pm \pi n$$

или

$$x_n = \pm \frac{d}{\sqrt{k^2 a^2 / \pi^2 n^2 - 1}}.$$

Полагая, что длина волны удовлетворяет условию

$$k a \gg \pi n,$$

мы приближенно получим

$$x_n = \pm \pi n d / k a, \text{ если } y = 0. \quad (6.131)$$

Аналогично,

$$y_n = \pm \pi n d / k b, \text{ если } x = 0. \quad (6.132)$$

Таким образом, с уменьшением размеров отверстия площадь, на которой наблюдается дифракционная картина, увеличивается. То же самое происходит с увеличением расстояния d от экрана.

В то же время, с уменьшением длины волны вторичные максимумы стремятся к главному. Однако, как следует из соотношения (6.114), в приближении Фраунгофера частоту нельзя увеличивать до бесконечности. Это обстоятельство мы обсудим позже.

Интересно оценить размер элементарной поверхности, занятой первым максимумом. Из (6.131) – (6.132) имеем

$$x_1 = \pi d / k a \text{ и } y_1 = \pi d / k b$$

или

$$x_1 = \lambda d / 2a \text{ и } y_1 = \lambda d / 2b. \quad (6.133)$$

Поскольку

$$\lambda \ll 2a \text{ и } \lambda \ll 2b,$$

размер рассматриваемой площадки гораздо меньше расстояния d , однако он может значительно превышать размеры отверстия.

Пример 2: дифракционная картина для отверстия в форме круга

Рассмотрим теперь случай, когда отверстие имеет форму круга радиуса a (рис. 6.6, з). В этом случае удобно ввести цилиндрическую систему координат:

$$\xi = \rho \cos \theta \text{ и } \eta = \rho \sin \theta. \quad (6.134)$$

Параметры l и m , характеризующие положение точки наблюдения p , также записываются в виде

$$l = s \cos \varphi \text{ и } m = s \sin \varphi,$$

Учитывая (6.110), вместо (6.107) получаем

$$\mathcal{U}(p) = C_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \cos(\theta-\varphi)} \rho d\rho d\theta. \quad (6.135)$$

Из теории функций Бесселя известно следующее равенство:

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \alpha} e^{-in\alpha} d\alpha.$$

В частности,

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \alpha} d\alpha. \quad (6.136)$$

Сравнение выражений (6.135) и (6.136) дает

$$\mathcal{U}(p) = 2\pi C_0 \int_0^a J_0(k\rho) \rho d\rho$$

или

$$\mathcal{U}(p) = \frac{2\pi C_0}{(ks)^2} \int_0^{ksa} y J_0(y) dy. \quad (6.137)$$

Для дальнейшего упрощения этого выражения используем рекуррентное соотношение

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x).$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим

$$x J_1(x) = \int_0^x y J_0(y) dy. \quad (6.138)$$

Соответственно, вместо (6.137), имеем

$$\mathcal{U}(p) = \frac{2\pi C_0}{(ks)^2} k s a J_1(ksa)$$

и

$$\mathcal{U}(p) = C_0 S_0 \frac{2J_1(ksa)}{ksa}, \quad (6.139)$$

где $S_0 = \pi a^2$ – площадь круга.

Отсюда функцию интенсивности можно записать как

$$I = I_0 F = I_0 \left[\frac{2J_1(ksa)}{ksa} \right]^2, \quad (6.140)$$

где

$$I_0 = C_0^2 S_0^2 \text{ и } F = \left[\frac{2J_1(ksa)}{ksa} \right]^2.$$

Выражение (6.140) представляет собой известную формулу, полученную Эйри в девятнадцатом веке.

Поведение функции $F(ksa)$ показано на рис. 6.7, а. Очевидно, что оно похоже на поведение функции F , соответствующей случаю прямоугольного отверстия. По определению,

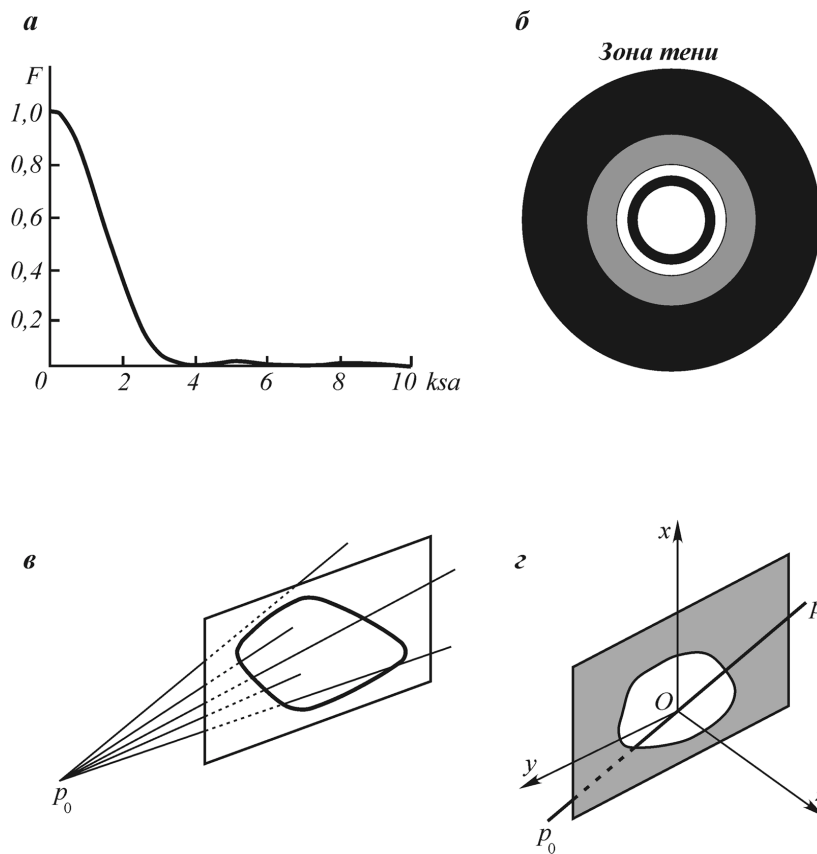


Рис. 6.7. Поведение функции $F(a)$; дифракционная картина для кругового отверстия (б); геометрия лучей в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ (в); иллюстрация дифракции Френеля (г)

$$s = \sqrt{l^2 + m^2} = r/R. \quad (6.141)$$

В каждой точке на оси z функция F имеет главный максимум, равный единице. Далее, на плоскостях параллельных экрану, функция I быстро уменьшается с увеличением расстояния r , а затем наблюдаются кольцевые зоны разной интенсивности.

Положение нулей функции I определяется из равенства

$$J_1(ksa) = 0. \quad (6.142)$$

Значения нескольких первых максимумов и минимумов функции F приводятся в табл. 2.

Поскольку

$$\frac{r}{R} ka = ksa,$$

из табл. 2 следует, что радиусы колец с нулевыми значениями интенсивности равны

$$\frac{r^{(1)}}{R} = 0,61\frac{\lambda}{a}, \quad \frac{r^{(2)}}{R} = 1,116\frac{\lambda}{a}, \quad \frac{r^{(3)}}{R} = 1,619\frac{\lambda}{a}, \quad \dots \quad (6.143)$$

С увеличением аргумента ksa , поведение функций Бесселя становится асимптотическим и описывается синусоидами с затухающими амплитудами. Поэтому отношение этих радиусов r/R стремится к $\lambda/2a$. Как и в предыдущем примере, размер дифракционной картины обратно пропорционален радиусу отверстия.

В соответствии с (6.143), с уменьшением длины волны ширина зоны главного и вторичных максимумов становится меньше, и они приближаются друг к другу. В пределе, при $\lambda \rightarrow 0$, из равенств (6.143) следует, что интенсивность волны всюду, за исключением оси z , равняется нулю. Конечно, этот результат противоречит экспериментальным данным, которые показывают, в общем случае, что в рассматриваемом высокочастотном пределе ($\lambda \rightarrow 0$) волны существуют только в пределах конуса, вершина которого находится в источнике, а его горизонтальные поверхности проходят через край отверстия (рис. 6.7, в).

Наше рассмотрение предполагает, что приближение Фраунгофера приме-

Т А Б Л И Ц А 2

ksa	F	
0	1	max
$1,220\pi = 3,833$	0	min
$1,635\pi = 5,136$	0,0175	max
$2,223\pi = 7,016$	0	min
$2,679\pi = 8,417$	0,0042	max
$3,238\pi = 10,174$	0	min
$3,699\pi = 11,620$	0,0016	max

нимо только в определенном диапазоне частот. С одной стороны, граничные условия Кирхгофа можно использовать, только когда длина волны меньше размеров отверстия. Это определяет верхний предел для волновых чисел. С другой стороны, нижнюю границу длины волны можно оценить из выражения (6.114), характеризующего приближение Фраунгофера. Полагая, например, что источник находится на бесконечности, выражения (6.114) можно записать как

$$R \gg a^2/\lambda \text{ или } R/a \gg a/\lambda. \quad (6.144)$$

Комбинируя эти неравенства с первым из равенств (6.143), получим

$$r^{(1)}/a \gg 1, \quad (6.145)$$

т.е. при длинах волн удовлетворяющих приближению Фраунгофера, радиус главного максимума значительно превышает радиус диска a . Заметим, также, что поскольку источник находится на бесконечности, коническая поверхность (рис. 6.7, в) вырождается в цилиндрическую поверхность радиуса a . Соответственно, граница главной зоны находится далеко за пределами этой поверхности и предельный случай ($\lambda \rightarrow 0$) не наблюдается.

Чтобы изучить поведение дифракционной картины на меньших длинах волн, необходимо использовать более точное приближение, либо численно интегрировать непосредственно выражение (6.97).

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

Рассмотрим теперь приближение, которое называется дифракцией Френеля и при котором, в отличие от предыдущего случая, функция $f(\xi, \eta)$ заменяется первыми двумя членами в разложении (6.109). Это означает, что мы предполагаем квадратичное изменение фазы вторичных волн вдоль поверхности S_0 . Конечно, такой подход также является приближенным, однако он позволяет изучать дифракцию в более близких к экрану точках и при меньших длинах волн.

Перепишем выражение (6.107) в виде

$$U(p) = B(C + iS), \quad (6.146)$$

где

$$B = -A \frac{i \cos \alpha}{\lambda} \frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1} \quad (6.147)$$

и

$$C = \int_{S_0} \cos[k f(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (6.148)$$

$$S = \int_{S_0} \sin[k f(\xi, \eta)] d\xi d\eta.$$

Как и ранее, мы предполагаем, что поверхность S_0 плоская, а точки p и p_0 находятся на одной прямой. Пусть также ось x расположена в плоскости, образованной прямой pp_0 и осью z (рис. 6.7, z). Тогда, как это следует из формулы (6.103),

$$l_0 = l \text{ и } m_0 = m$$

и, следовательно, линейные члены функции $f(\xi, \eta)$ обращаются в нуль. Как видно из рис. 6.7, z ,

$$l = l_0 \sin \delta, m = m_0 = 0, n = n_0 \cos \delta, \quad (6.149)$$

где δ – угол между прямой pp_0 и осью z .

Соответственно, для функции

$$f(\xi, \eta) = f_2(\xi, \eta),$$

определяющейся выражением (6.111), получим

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \xi^2 \sin^2 \delta \right]$$

или

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2). \quad (6.150)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении интегралы C и S записываются как

$$C = \int_{S_0} \cos \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2) \right] d\xi d\eta$$

и

$$S = \int_{S_0} \sin \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2) \right] d\xi d\eta. \quad (6.151)$$

Чтобы упростить изучение дифракции в одном относительно простом, но интересном случае, мы введем новые переменные

$$\frac{\pi}{2} u^2 = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \xi^2 \cos^2 \delta$$

и

$$\frac{\pi}{2} v^2 = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \eta^2. \quad (6.152)$$

Отсюда

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} \xi \cos \delta$$

и

$$(6.153)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} \eta.$$

Выполняя операцию дифференцирования, получим

$$du = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} \cos \delta d\xi,$$

$$dv = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} d\eta$$

и

$$d\xi d\eta = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \cos \delta} du dv. \quad (6.154)$$

Подстановка выражений (6.153) – (6.154) в формулу (6.151) дает

$$C = b \int_{S_1} \cos \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] du dv$$

и

$$S = b \int_{S_1} \sin \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] du dv, \quad (6.155)$$

где

$$b = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \cos \delta} \quad (6.156)$$

а S_1 обозначает новую площадь интегрирования в плоскости координат u и v .

Дальнейшие упрощения возможны в том случае, когда поверхность S_1 является прямоугольником со сторонами параллельными координатным осям u и v . Для этого случая мы будем использовать тождества

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right),$$

$$\sin \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] = \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right).$$

ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

Указанные соотношения позволяют выразить функции C и S в (6.155) через интегралы Френеля

$$L(\gamma) = \int_0^{\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau$$

и

$$N(\gamma) = \int_0^{\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau, \quad (6.157)$$

которые можно часто встретить в различных задачах, связанных с дифракцией.

Обе приведенные функции, также как и функции Бесселя и Лежандра, являются примерами специальных функций. Опишем кратко некоторые из их свойств.

Прежде всего, разлагая их подынтегральные выражения в степенные ряды и интегрируя затем каждый из членов ряда, получим

$$L(\gamma) = \gamma \left[1 - \frac{1}{2! 5} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2\right)^2 + \frac{1}{4! 9} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2\right)^4 + \dots \right]$$

и

$$N(\gamma) = \gamma \left[\frac{1}{1! 3} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2\right)^2 - \frac{1}{3! 7} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2\right)^3 + \frac{1}{5! 11} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2\right)^5 + \dots \right].$$

Легко увидеть, что данные ряды сходятся при любом значении γ , однако для вычислительных целей их удобно использовать, когда γ относительно мало.

Если значение γ велико, оба интеграла можно разложить в ряд по степеням величины, обратной γ .

Для этого представим функцию L как

$$L(\gamma) = L(\infty) - L_1, \quad (6.158)$$

где

$$L_1 = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\pi \tau} d\sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right). \quad (6.159)$$

Интегрирование по частям дает

$$L_1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right)}{\pi \tau} \Bigg|_{\gamma}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\tau^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \gamma^2\right)}{\pi \gamma} - \frac{1}{\pi^2} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\tau^3} d\cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right).$$

Таким образом,

$$L(\gamma) = L(\infty) + \frac{1}{\pi\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) + \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\pi^2\tau^3} d\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right).$$

Снова выполняя операции разложения в ряд и интегрирования, получим

$$L(\gamma) = L(\infty) - \frac{1}{\pi\gamma} \left[P(\gamma) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) - Q(\gamma) \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) \right], \quad (6.160)$$

где

$$P(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(\pi\gamma^2)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(\pi\gamma^2)^5} - \dots$$

и

$$Q(\gamma) = 1 - \frac{1 \cdot 3}{(\pi\gamma^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(\pi\gamma^2)^4} - \dots$$

(6.161)

По аналогии имеем

$$N(\gamma) = N(\infty) - \frac{1}{\pi\gamma} \left[P(\gamma) \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) + Q(\gamma) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) \right]. \quad (6.162)$$

Теперь необходимо найти значения интегралов $L(\infty)$ и $N(\infty)$. Чтобы решить эту задачу, составим сумму

$$L(\infty) + iN(\infty) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau + i \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

или

$$L(\infty) + iN(\infty) = \int_0^{\infty} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)} d\tau. \quad (6.163)$$

Полагая

$$\alpha = i \frac{\pi}{2},$$

мы приходим к хорошо известному интегралу Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

Отсюда

$$L(\infty) + iN(\infty) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{-i}} = \sqrt{\frac{i}{2}}.$$

Поскольку

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i),$$

получаем

$$L(\infty) + iN(\infty) = (1 + i)/2.$$

Таким образом, в предельном случае интегралы Фурье равняются

$$L(\infty) = 1/2 \text{ и } N(\infty) = 1/2. \quad (6.164)$$

а при достаточно больших значениях γ эти интегралы можно оценить, воспользовавшись формулами (6.160) – (6.161). Выражения (6.161) являются типичными примерами расходящихся (асимптотических) рядов, ограниченное число членов которых обеспечивает достаточную точность, однако дальнейшее увеличение числа используемых членов ряда приводит к увеличению ошибки аппроксимации.

На практике разложение как в степенной, так и в асимптотический ряд позволяет оценить интегралы Фурье с хорошей точностью.

Отметим еще одно интересное свойство этих функций, следующее из их определения (6.157), а именно

$$L(\gamma) = -L(-\gamma) \text{ и } N(\gamma) = -N(-\gamma). \quad (6.165)$$

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ КРАЕ

Предположим, что экраном является полубесконечная плоскость и оси x и z системы координат направлены перпендикулярно краю экрана. Первичный источник и точка наблюдения находятся на оси z , а положение начала координат O характеризуется расстоянием x от края экрана (рис. 6.8, *a*). Наша цель состоит в том, чтобы изучить, как ведет себя функция интенсивности I при различных значениях x .

Очевидно, что обе координаты ξ и η точек, расположенных в области интегрирования, изменяются в пределах

$$-\infty < \xi < x \text{ и } -\infty < \eta < \infty$$

и, как следует из (6.153),

$$-\infty < u < \gamma, \quad -\infty < v < \infty,$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} x \cos \delta \quad (6.166)$$

а δ обозначает угол между прямой pp_0 и осью z . В данном частном случае $\delta = 0$.

Интегралы C и S записываются как

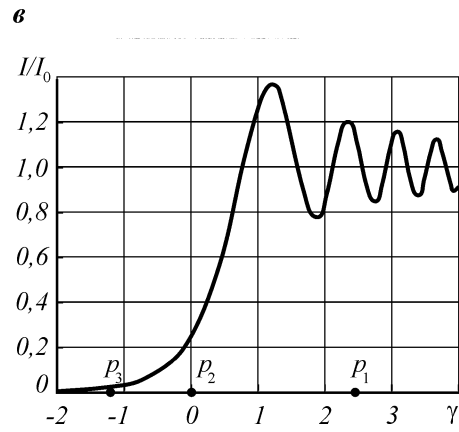
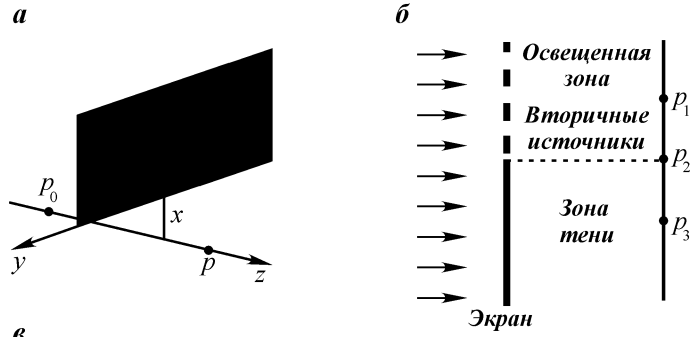


Рис. 6.8. Положение полубесконечного экрана (а); освещенная зона и зона тени; вторичные источники (б); дифракция Френеля на прямом угле (в)

$$C = b \int_{-\infty}^{\gamma} du \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right] dv \quad (6.167)$$

и

$$S = b \int_{-\infty}^{\gamma} du \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right] dv$$

В соответствии с формулами (6.164) – (6.165), имеем

$$\int_{-\infty}^{\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\gamma} = \frac{1}{2} + L(\gamma) \quad (6.168)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = 1.$$

Таким же образом получаем

$$\int_{-\infty}^{\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = \frac{1}{2} + N(\gamma),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = 1.$$

Следовательно, выражения (6.167) записываются теперь как

$$C = b \left[\left(\frac{1}{2} + L(\gamma) \right) - \left(\frac{1}{2} + N(\gamma) \right) \right]$$

и

$$S = b \left[\left(\frac{1}{2} + L(\gamma) \right) + \left(\frac{1}{2} + N(\gamma) \right) \right].$$

Таким образом, интегрирование вдоль полуплоскости сводится к вычислению функций Френеля. Как следует из формулы (6.146), функция интенсивности равняется

$$I = B^2(C^2 + S^2)$$

или

$$I = I_0 F,$$

где

$$I_0 = 4b^2 B^2$$

и

$$F = \left[\left(\frac{1}{2} + L(\gamma) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + N(\gamma) \right)^2 \right]. \quad (6.170)$$

Последняя формула описывает, по существу, результирующую волну, вызванную первичными источниками, расположенными на бесконечности, как показано на рис. 6.8, б. В этом случае вторичные источники имеют одинаковые амплитуды и фазы.

Поведение функции I/I_0 показано на рис. 6.8, в и является яркой демонстрацией эффекта дифракции. Заметим, прежде всего, что если точка наблюдения p_1 находится в “освещенной” зоне, то с увеличением расстояния от края экрана отношение I/I_0 асимптотически стремится к единице, хотя и осциллирующим образом.

В точке p_2 , относящейся к краю экрана, интенсивность равняется

$$I/I_0 = 0,25.$$

Совершенно другая картина наблюдается в зоне “тени”, где по мере увеличения расстояния между точкой p_3 и краем экрана функция I/I_0 постепенно уменьшается. Как следует из формулы (6.166), с уменьшением длины волны переходная зона между “освещенной” и “теневого” зонами становится все уже, и в пределе ее ширина стремится к нулю. Следует заметить, что, несмотря на то что теория Кирхгофа справедлива только в случае отверстия конечных размеров, представленные здесь результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

6.5. ФОРМУЛА ГЕЛЬМГОЛЬЦА – КИРХГОФА

Ранее мы вывели формулу Гельмгольца, которая устанавливает связь между комплексной амплитудой потенциала стационарной волны в некоторой точке объема V и значениями этой функции U и ее производной $\partial U/\partial n$ на поверхности S данного объема (рис. 6.3, а). Согласно (6.61) это выражение записывается как

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial U(g, \omega)}{\partial n} - U(g, \omega) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dS, \quad (6.171)$$

где R – расстояние между точкой наблюдения p и точкой g , расположенной на поверхности S , а единичный вектор \mathbf{n} направлен во внешнюю сторону от объема.

Заметим, что, если точка p лежит вне поверхности S , то внутри объема V особенности отсутствуют, и интеграл в правой части (6.171) обращается в нуль:

$$U(p) = 0. \quad (6.172)$$

Как мы уже знаем, выражение (6.171) играет чрезвычайно важную роль в изучении основных свойств дифракции волн.

В данном разделе мы покажем, что формулы (6.171) – (6.172) можно также использовать, во-первых, для получения аналогичных соотношений в случае нестационарных волн и, во-вторых, как теоретическое обоснование принципа Гюйгенса – Френеля.

ФОРМУЛА КИРХГОФА

Для решения первой из поставленных задач используем интеграл Фурье:

$$U(p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(p, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (6.173)$$

Прежде всего, продифференцируем второй член, стоящий в скобках подынтегрального выражения (6.171). В результате получим

$$U(p, \omega) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial U(g, \omega)}{\partial n} - U(g, \omega) e^{ikR} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} - \right. \\ \left. - U(g, \omega) \frac{ik}{R} e^{ikR} \frac{\partial R}{\partial n} \right] dS. \quad (6.174)$$

Далее, применяя преобразование Фурье и меняя порядок интегрирования в правой части выражения (6.174), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(p, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(g, \omega)}{\partial n} e^{-i\omega(t-R/c)} d\omega - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} U(g, \omega) e^{-i\omega(t-R/c)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} d\omega - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\omega}{c} U(g, \omega) e^{-i\omega(t-R/c)} d\omega \right] dS. \quad (6.175)$$

Из формулы (6.173) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) U(p, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Следовательно, соотношение (6.175) после умножения на коэффициент $1/2\pi$ запишется как

$$U(p, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial U(g, t_1)}{\partial n} - U(g, t_1) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} + \frac{1}{cR} \frac{\partial U(g, t_1)}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial n} \right] dS, \quad (6.176)$$

где

$$t_1 = t - R/c. \quad (6.177)$$

Выражение (6.176) называется формулой Кирхгофа и показывает, что потенциал $U(p, t)$ в произвольный момент времени t и для любой точки p объема V определяется значениями этой же функции на поверхности S , а также ее производными $\partial U/\partial n$ и $\partial U/\partial t$ в предыдущие моменты времени. Запаздывание по времени $\Delta t = t - t_1 = R/c$ зависит при этом от расстояния R и скорости c .

Выражения (6.173) и (6.176) являются, по существу, формулами, представляющими, соответственно, синусоидальные и нестационарные волны. Они описывают соотношение между волновым полем в некоторой точке внутри объема и значениями этого поля на поверхности данного объема.

Именно поэтому эти выражения играют такую важную роль в теории волн. В частности, эти формулы лежат в основе некоторых методов сейсмической миграции. Интересно отметить, что выражение (6.171) было первоначально выведено Гельмгольцем. После этого Кирхгоф снова получил формулу (6.171), а также выражение (6.17, 6), описывающее нестационарные волны, и использовал их для изучения дифракции света.

Обсудим теперь смысл подынтегральных выражений, стоящих в указанных формулах. Эти выражения принято интерпретировать как сумму элементарных сферических волн, вызванных источниками, расположенными на поверхности S . Так, например, из формулы Кирхгофа следует, что значения волнового поля внутри объема V в момент времени t определяются силой источников в предыдущие моменты времени.

СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим геометрию и физический смысл волн, вызванных элементарным источником. Для этого можно воспользоваться как формулой Кирхгофа, так и формулой Гельмгольца, однако здесь мы рассмотрим только случай стационарных волн.

Подынтегральное выражение в (6.171) представляет собой сумму двух членов:

$$A_1 = \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.178)$$

и

$$A_2 = -U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right). \quad (6.179)$$

Последнее выражение можно записать как

$$A_2 = U \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \cos \psi, \quad (6.180)$$

где

$$\cos \psi = \partial R / \partial n, \quad (6.181)$$

а ψ – угол между радиус-вектором \mathbf{R} и единичным вектором \mathbf{n} (см. рис. 6.9, a).

Согласно (6.178) – (6.179) каждый элемент поверхности dS вызывает появление в объеме V двух сферических волн. Одна из них, описываемая функцией A_1 , является сферической волной, амплитуда и фаза которой остаются постоянными на сфере S_0 с центром в точке g . В то же время вторая волна, задаваемая выражением (6.179), является сферической волной другого типа. Ее фазовая поверхность, как и в предыдущем случае, является сферой, однако амплитуда волны на этой поверхности изменяется в зависимости от угла ψ . Поскольку поверхности обеих волн являются сферами, имеющими общий центр в точке g , сумма этих элементарных волн также является сферической волной. Наконец, как следует из (6.171), полная волна является результатом суперпозиции элементарных сферических волн.

Суммируя, можно сказать, что источники распределяются таким образом, что оказываются выполненными следующие условия.

1. Каждый элемент поверхности S порождает сферическую волну.
2. Полную волну внутри объема V можно рассматривать как результат интерференции элементарных волн.
3. Как следует из выражения (6.172), результирующий потенциал, порожденный источниками на поверхности S , равняется нулю вне объема V . Этот факт может служить доказательством того, что волны в однородной среде не распространяются в сторону первичного источника.

Наш анализ основывался на использовании формул (6.171)–(6.172), однако, как уже отмечалось ранее, аналогичный результат можно получить, исходя из формулы Кирхгофа (6.176).

ВТОРИЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ

В обеих рассматриваемых формулах предполагается, что существуют вторичные источники двух типов. Их появление связано с тем, что распространение волн сопровождается деформацией и движением среды. Теперь, основываясь на понятии источников, мы снова выведем формулу Гельмгольца. Воспользуемся для этого соотношениями между волновыми полями и потенциалом, т.е.

$$\mathbf{v} = \text{grad } U, \quad P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \quad (6.182)$$

и

$$\theta = \text{div } \mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{или} \quad \theta = -\frac{P}{\rho c^2},$$

где \mathbf{v} – скорость частицы, θ – дилатация, P – вызванное волной избыточное давление.

Как было показано в главе 5, потенциал элементарного сферического источника определяется как

$$U(\rho, t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (6.183)$$

Здесь $f(t - R/c) = \cos \omega(t - R/c)$. Соответственно, скорость частиц

$$v_R = \partial U / \partial R$$

равняется

$$v_R = \frac{1}{R^2} f\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{1}{Rc} f'\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

или

$$4\pi R^2 v_R = -4\pi f\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{4\pi R}{c} f'\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (6.184)$$

Левая часть этого равенства описывает скорость, с которой среда движется через поверхность, окружающую источник.

В пределе $R \rightarrow 0$ имеем

$$4\pi R^2 v_R \rightarrow -4\pi f(t). \quad (6.185)$$

По этой причине функцию $f(t)$ естественно назвать силой источника, поскольку с точностью до множителя -4π она равняется количеству жидкости, проходящей через поверхность за единицу времени, при условии, что плотность ρ равна единице. Очевидно, что такой тип источника порождает однородную сферическую волну.

В нашем случае, когда среда движется внутрь объема V через элементарную поверхность dS , сила источника становится равной

$$f(t) = -\frac{v_n dS}{4\pi} \quad \text{или} \quad f(t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial n} dS. \quad (6.186)$$

Сравнение выражений (6.184) и (6.186) показывает, что компонента v_R заменяется нормальной компонентой v_n , а поверхность сферы – элементарной поверхностью dS . Следовательно, для синусоидальных колебаний комплексная амплитуда сферической волны, вызванной этим элементарным источником (рис. 6.9, а), есть

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.187)$$

что совпадает со вторым членом, стоящим в скобках выражения (6.74).

Ранее было отмечено, что волна, распространяющаяся через поверхность S , приводит к появлению следующих двух эффектов:

- а) появлению потока вещества через поверхность dS ;
- б) изменению давления.

В силу первого эффекта простейшие источники появляются вблизи поверхности S .

Рассмотрим теперь, как зарождаются и действуют источники второго типа. Согласно (6.182), комплексная амплитуда избыточного давления определяется из равенства

$$P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{или} \quad P = i\omega \rho U. \quad (6.188)$$

Отсюда комплексная амплитуда силы, действующей на элемент dS , есть

$$dF = i\omega \rho U dS, \quad (6.189)$$

и наша цель состоит в том, чтобы определить волну, вызванную силой

$$dF = \text{Re}(i U e^{-i\omega t}) \omega \rho dS. \quad (6.190)$$

Чтобы исследовать эффект действия этой силы, рассмотрим следующую задачу. Предположим, что, в отличие от предыдущих случаев, заданная внешняя сила \mathbf{F} распределена внутри объема V_1 . Тогда, как это следует из второго

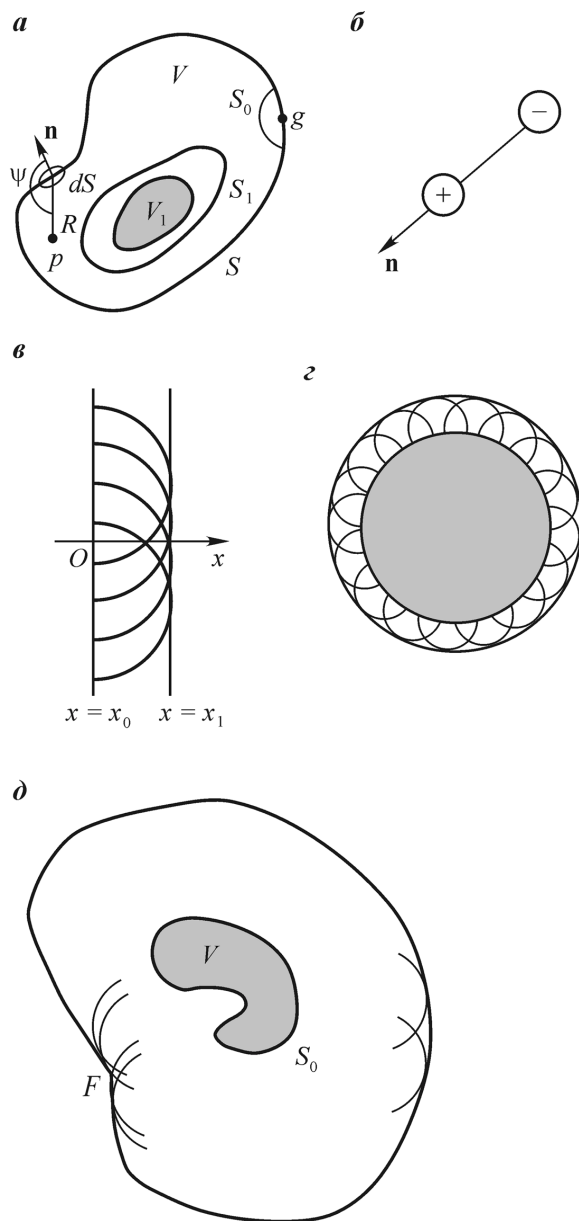


Рис. 6.9. Иллюстрация формул (6.179) – (6.181) (*a*); акустический диполь (*б*); принцип Гюйгенса для плоской, сферической и произвольной волны (*с*, *z*, *д*)

закона Ньютона, уравнение движения частицы, например, вдоль оси x записывается следующим образом:

$$m \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta V + F_x \rho \Delta V, \quad (6.191)$$

где ΔV – элементарный объем; $\rho F_x \Delta V$ – x -компонента силы \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}. \quad (6.192)$$

Здесь \mathbf{F} – сила, действующая на единицу массы.

Учитывая уравнение (6.182), вместо формулы (6.191) имеем

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + F_x. \quad (6.193)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + F_y \quad (6.194)$$

и

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + F_z. \quad (6.195)$$

Дифференцируя каждое из уравнений (6.193)–(6.195) соответственно по x , y и z , а затем складывая получившиеся выражения, имеем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \theta + \operatorname{div} \mathbf{F},$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (6.196)$$

Соответственно, для синусоидальной волны получим

$$\nabla^2 \Theta + k^2 \Theta = - \frac{1}{c^2} \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (6.197)$$

Здесь Θ и \mathbf{F} – комплексные амплитуды дилатации и силы \mathbf{F} .

Таким образом, функция Θ является решением неоднородного уравнения Гельмгольца в объеме V_1 . Присутствие правой части в уравнении (6.197) предполагает наличие внешней силы $\operatorname{div} \mathbf{F} / c^2$ в каждой точке внутри данного объема. Как было показано в главе 5, комплексную амплитуду дилатации, вызванной таким источником, можно записать как

$$d\Theta = \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}}{4\pi c^2} \frac{e^{ikR}}{R} dV_1.$$

Следовательно, действие силы \mathbf{F} можно представить как суперпозицию волн, вызванных элементарными источниками. Это дает

$$\Theta = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V_1} \operatorname{div} F \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) dV_1, \quad (6.198)$$

где

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1.$$

Объем интегрирования имеет конечные размеры, а dx_1 , dy_1 и dz_1 обозначают координаты точек внутри объема. Другими словами, мы получили решение уравнения (6.197).

Применим теперь следующее известное соотношение из векторного анализа (приложение 3):

$$\operatorname{div}(\varphi F) = F \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} F, \quad (6.199)$$

где

$$\varphi = e^{ikR}/R.$$

Подставляя (6.199) в (6.198), получим

$$\Theta = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\int_{V_1} \operatorname{div}(\varphi F) dV_1 - \int_{V_1} F \cdot \nabla \varphi dV_1 \right]. \quad (6.200)$$

Согласно формуле Гаусса – Остроградского,

$$\int_{V_1} \operatorname{div}(\varphi F) dV_1 = \oint_{S_1} \varphi F \cdot dS$$

и, следовательно, вместо выражения (6.200) мы имеем

$$\Theta = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\oint_{S_1} \frac{e^{ikR}}{R} (F \cdot dS) - \int_{V_1} F \cdot \overset{g}{\nabla} \frac{e^{ikR}}{R} dV_1 \right], \quad (6.201)$$

где g обозначает точку объема V_1 , и операции дифференцирования и интегрирования выполняются относительно координат точки. На это указывает используемое нами обозначение $\overset{g}{\nabla}$.

Вне указанного объема силы F отсутствуют, следовательно, поверхностный интеграл в (6.201) обращается в нуль, и мы имеем

$$\Theta = -\frac{1}{4\pi c^2} \int_{V_1} F \cdot \overset{g}{\nabla} \frac{e^{ikR}}{R} dV_1. \quad (6.202)$$

Предположим теперь, что сила F направлена вдоль оси x и концентрируется в окрестности начала координат ($R \rightarrow 0$) в некотором объеме, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Тогда вместо члена

$$\nabla \frac{e^{ikR}}{R}$$

мы можем использовать только его x -компоненту

$$\nabla \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Поскольку объем мал, этот член можно вынести из-под знака интеграла. Таким образом, получим

$$\Theta = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{V_1} F_x dV_1,$$

и F_x является x -компонентой потенциала F .

В силу определения (6.192),

$$\Theta = -\frac{F}{4\pi c^2 \rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.203)$$

где F обозначает силу, действующую на массу объема V_1 .

Учитывая, что

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R},$$

и, следовательно,

$$\Theta = \frac{F}{4\pi c^2 \rho} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.204)$$

Последнее выражение позволяет определить потенциал волны, источником которой служит сила, сконцентрированная в малом объеме. Действительно, из (6.182) следует, что

$$\Theta = -\frac{i\omega}{c^2} U.$$

Подстановка этого выражения в формулу (6.204) дает

$$U = \frac{iF}{\omega 4\pi \rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.205)$$

В частности, если сила направлена вдоль нормали \mathbf{n} , комплексная амплитуда потенциала равняется

$$U = \frac{i}{4\pi} \frac{F}{\omega\rho} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.206)$$

Сравнение с выражением (6.171) показывает, что второй член в скобках описывает волну, вызванную элементарной силой, действующей на элемент dS и ориентированной в направлении нормали \mathbf{n} .

Легко показать, что потенциал U , задаваемый выражением (6.206), совпадает с потенциалом, вызванным двумя элементарными источниками, расположенными вдоль нормали (рис. 6.9, б), а сдвиг фаз между ними равняется π . Существенно при этом, что расстояние от этой системы до точки наблюдения гораздо больше расстояния между источниками. Такая пара источников называется акустическим диполем.

Следует заметить, что приведенные формулы следуют непосредственно из волнового уравнения, т.е. они основываются на физических законах и не требуют никаких дополнительных предположений. В то же время основные положения, вытекающие из формул Гельмгольца – Кирхгофа, были известны ранее из результатов Гюйгенса (1690) и Френеля (1818). К таким положениям относятся существование элементарных сферических волн с центрами в каждой точке волновой поверхности и интерференция таких волн, в результате которой образуется полная волна.

Учитывая основополагающую роль, которую играют принципы Гюйгенса и Френеля в теории волн, мы подробно остановимся на них в следующем разделе.

6.6. ПРИНЦИПЫ ГЮЙГЕНСА – ФРЕНЕЛЯ

Для того чтобы описать поведение волн, Гюйгенс ввел несколько предположений, известных теперь как принцип Гюйгенса. Предположим, что нам известно положение волновой поверхности в некоторый момент времени. Тогда, согласно принципу Гюйгенса, каждый элемент этой поверхности можно рассматривать как источник вторичной сферической волны. Более того, в некоторый последующий момент времени огибающая таких элементарных волн характеризует новое положение фазовых поверхностей. По существу, принцип Гюйгенса является правилом, которое позволяет строить волновые поверхности в различные моменты времени. В той части среды, которая является однородной, радиусы указанных волновых поверхностей могут иметь произвольное значение, так как скорость распространения постоянная. Если же среда неоднородна, то радиусы волновых поверхностей могут различаться и часто оказываются весьма малыми. Помимо этого, Гюйгенс предположил, что возмущения, вызванные каждым из элементов поверхности волны, распространяются только в сторону от первичного источника. Это предположение очень важное, поскольку всегда существуют две огибающие, по обе стороны от волновой поверхности.

Таким образом, принцип Гюйгенса основывается на следующих трех предположениях.

1. Каждая точка волновой поверхности является источником вторичной волны.
2. Эти волны являются сферическими, а их огибающая определяет новое положение фазовой поверхности.
3. Суперпозиция элементарных волн в однородной среде не приводит к появлению волны, приходящей к первичному источнику.

Сравнение выражений (6.171) и (6.176) показывает, что принцип Гюйгенса согласуется с формулами Гельмгольца – Кирхгофа.

Рассмотрим теперь несколько примеров, иллюстрирующих этот принцип.

Пример 1: принцип Гюйгенса и плоские волны

Предположим, что плоская волна распространяется вдоль оси x (рис. 6.9, в). Как мы знаем, скалярный потенциал скорости описывается формулой

$$U(x, t) = A_0 f \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right], \quad (6.207)$$

а фазовые поверхности являются плоскостями параллельными плоскости YOZ .

Пусть в момент времени $t = t_0$ фронт волны характеризуется координатой $x = x_0$. Чтобы определить его положение в момент времени $t = t_1 (t > t_0)$, используя принцип Гюйгенса, построим в каждой точке фазовой поверхности ($x = x_0$) сферу радиуса

$$R = c(t_1 - t_0).$$

Из рис. 6.9, в видно, что огибающая этих вторичных волн образует плоскость $x = x_1$, где

$$x_1 = x_0 + c(t_1 - t_0),$$

что, конечно, следует из выражения (6.207).

По определению, фазы волнового фронта в обоих положениях должны совпадать. Действительно,

$$t_1 - \frac{x_1}{c} = t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + c\Delta t}{c} = t_0 - \frac{x_0}{c}.$$

Пример 2: принцип Гюйгенса и сферические волны

Предположим теперь, что волна является сферической:

$$U(R, t) = \frac{A_0}{R} f \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \quad (6.209)$$

и в некоторый момент времени $t = t_0$ нам известно положение фазовой по-

верхности S_0 и, в частности, положение волнового фронта (рис. 6.9, з). Чтобы определить его конфигурацию в произвольный момент времени $t_1 > t_0$, используя принцип Гюйгенса, нарисуем снова элементарные волны с тем же радиусом

$$R = c(t_1 - t_0),$$

так, чтобы их центры находились на поверхности S_0 . Поскольку среда однородная, можно задать произвольный радиус R и получить положение фазовой поверхности на любом расстоянии от той, что была вначале.

Очевидно, что в силу симметрии фазовая поверхность всюду является сферической. Однако форма этой поверхности может изменяться, если параметры среды не остаются постоянными. Например, если скорость имеет различные значения на поверхности S_0 , то со временем фазовая поверхность деформируется и будет вытянута вдоль направления, соответствующего максимальной скорости.

Пример 3: принцип Гюйгенса и произвольные волны

Рассмотрим случай, когда фазовая поверхность S_0 имеет в момент времени $t = t_0$ произвольную форму (рис. 6.9, д). Снова рассматривая точки этой поверхности как центры вторичных сферических волн с радиусом

$$R = c(t_1 - t_0),$$

мы определим новое положение этой поверхности в момент времени $t = t_1$. Очевидно, что, если указанный радиус мал по сравнению с максимальным объемом V , окруженным поверхностью S_0 , то обе поверхности S_0 и S_1 имеют практически одинаковую форму. Однако с увеличением времени расстояния от точек текущей фазовой поверхности до соответствующих точек исходной поверхности, расположенных на одной и той же прямой, становятся практически одинаковыми. Это означает, что на достаточно больших расстояниях от S_0 форма фазовых поверхностей становится почти сферической. Процедура построения фазовых поверхностей подсказывает также то, что в общем случае амплитуда волны на таких поверхностях ($t \gg t_1$) изменяется медленнее по сравнению с амплитудой на исходной поверхности.

Как видно из рис. 6.9, д, выполняя рассматриваемую процедуру, можно столкнуться с ситуацией, когда все вторичные волны пересекаются в одной точке, которая называется фокусом. Это происходит тогда, когда на поверхности S_0 имеется вогнутость или если среда является неоднородной.

Мы рассмотрели несколько примеров, показывающих, как принцип Гюйгенса позволяет строить волновые поверхности в однородной среде в том случае, когда в некоторый момент времени $t = t_0$ известна исходная фазовая поверхность. Этот результат остается справедливым и для многих случаев неоднородной среды, при условии, что радиус элементарных волн достаточно мал. Следует отметить, что принцип Гюйгенса очень часто дает правильный результат, независимо от длины волны. Далее мы рассмотрим модель, в

которой применение этого принципа обычно не дает практически никакой информации о волновом поле.

Пример 4: использование принципа Гюйгенса позади отверстия в экране

Предположим, что первичная волна – плоская, а ее фазовые поверхности параллельны плоскости экрана с отверстием (рис. 6.10, *a*). Для того чтобы, используя принцип Гюйгенса, определить положение поверхностей волн за экраном, мы должны исходить из фазовой поверхности S_0 , которая совпадает с отверстием. Выполняя процедуру построения волн и соответствующих огибающих, мы видим, что волновые поверхности не являются плоскими, а с увеличением расстояния от отверстия они становятся практически сферическими. Помимо этого, из самой процедуры следует, что распределение волн не зависит от длины волны. Однако, изучая дифракцию Фраунгофера и Френеля, мы видели, что поведение волн гораздо сложнее и существенно зависит от длины волны. Другими словами, принцип Гюйгенса не учитывает влияние интерференции волн на их амплитуду. Здесь следует вспомнить, как,

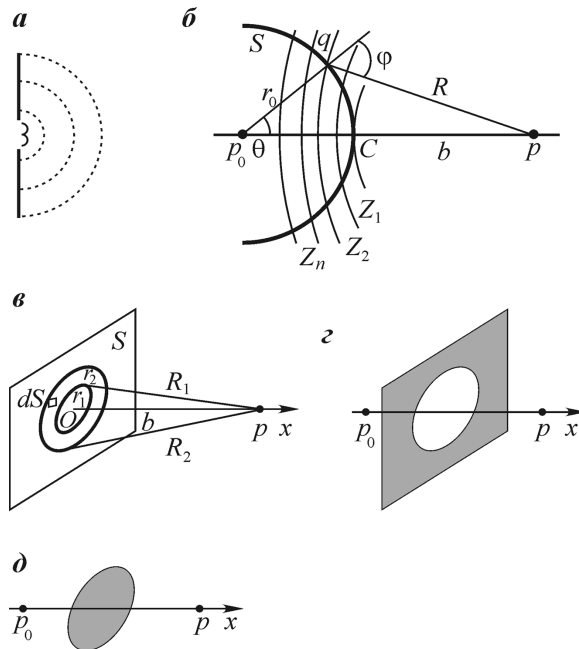


Рис. 6.10. Использование принципа Гюйгенса в области позади отверстия (*a*); зоны Френеля для сферических волн (*б*); зоны Френеля для плоских волн (*в*); точки наблюдения позади круглого отверстия (*в*); точки наблюдения позади круглого экрана (*д*)

рассматривая данный пример и используя принцип Гюйгенса для звука и света, Ньютон отверг представление о волновой природе света.

Суммируя сказанное, стоит отметить следующее.

1. Согласно формуле Гельмгольца – Кирхгофа, каждый элемент фазовой поверхности порождает сферическую волну. Строя в каждой такой точке элементарную волну радиуса $R = c\Delta t$, мы видим, что новое положение фазовой поверхности определяется огибающей этих волн. Таким образом, основные предположения, заложенные в принципе Гюйгенса, следуют непосредственно из формул (6.171) и (6.176).

2. При выводе этих формул мы показали также, что источники, распределенные на поверхности S (рис. 6.9, *a*) не порождают волны вне объема V однородной среды и, в частности, позади волнового фронта. Таким образом, было подтверждено третье предположение, сделанное Гюйгенсом.

3. Рассматриваемый принцип является большим вкладом в теорию волн. Он позволяет строить волновые поверхности в различных средах и, в частности, его можно использовать для изучения преломления и отражения волн на границах раздела сред с различными параметрами.

4. В то же время принцип Гюйгенса не позволяет оценить распределение амплитуды волны и, следовательно, его нельзя применить для изучения дифракции.

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА – ФРЕНЕЛЯ

Следующий шаг в разработке теории волн, позволяющий учитывать также дифракцию, был сделан Френелем. Он исходил из основных положений принципа Гюйгенса, а именно из того, что каждый элемент фазовой поверхности в любой точке среды порождает сферическую волну. Помимо этого Френель предположил следующее.

1. Вторичная волна в произвольной точке p пропорциональна следующим величинам:

- а) элементу dS в окрестности точки q фазовой поверхности;
- б) амплитуде волны в этой точке, т.е. интенсивности первичного источника;
- в) некоторому множителю $K(\varphi)$, зависящему от угла φ между нормалью к элементу поверхности $dS(q)$ и прямой, соединяющей точки q и p (рис. 6.10, *б*); этот множитель уменьшается с ростом φ .

2. В точке наблюдения p волна является результатом интерференции сферических волн, возникающих на всех элементах фазовой поверхности.

3. Если между dS и точкой наблюдения имеется жесткое препятствие, то влияние волны, вызванной источником на элементе dS , исчезает. В то же время присутствие такого препятствия не меняет амплитуды других вторичных источников. Очевидно, что данное предположение совпадает с условиями Кирхгофа.

4. Длина волны λ гораздо меньше расстояния R между точкой наблюдения p и точками q фазовой поверхности:

$$\lambda \ll R. \quad (6.210)$$

Другими словами, наше рассмотрение ограничивается волновой зоной, определяемой для источников на поверхности S .

В отличие от принципа Гюйгенса, указанные предположения позволяют вывести выражение для результирующей волны и, следовательно, изучить распределение ее амплитуды. Рассмотрим синусоидальную зависимость от времени. В этом случае комплексная амплитуда $dU(p)$ сферической волны с началом в точке q дается выражением

$$dU(p) = K(\varphi)U(q) \frac{e^{ikR}}{R} dS, \quad (6.211)$$

где $U(p)$ – комплексная амплитуда волны в точках фазовой поверхности S . В волновой зоне ($kR \gg 1$) второй член в подынтегральном выражении (6.171) является доминирующим и, следовательно, мы приходим к формуле (6.211).

Затем, применяя постулат Френеля об интерференции элементарных волн, мы получим окончательное выражение для комплексной амплитуды $U(p)$ полной волны:

$$U(p) = \int_S K(\varphi)U(q) \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.212)$$

Разрабатывая данную теорию дифракции, Френель не определял функцию $K(\varphi)$, называемую обычно фактором наклона. Однако он предполагал, что эта функция достигает своего максимального значения в направлении распространения $\varphi = 0$, затем быстро убывает по мере увеличения угла φ и обращается в нуль, когда прямая qr становится касательной к фазовой поверхности.

ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА (6.212) В ЗОНАХ ФРЕНЕЛЯ

Несмотря на то что явный вид множителя $K(\varphi)$ был не известен, Френелю удалось описать множество существенных свойств дифракции. Это было сделано благодаря чрезвычайно элегантному методу оценки интеграла в правой части выражения (6.212).

Для того чтобы проиллюстрировать этот подход, называемый построением зон Френеля, предположим сначала, что первичная волна, распространяющаяся вдоль оси X , является плоской, т.е.

$$U(q) = A e^{ikx}. \quad (6.213)$$

Соответственно, фазовые поверхности являются плоскостями перпендикулярными оси x (рис. 6.10, a).

Прежде всего, учитывая выражение (6.213), мы имеем

$$U(p) = A e^{ikx_0} \int_S K(\varphi) \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.214)$$

Здесь x_0 характеризует положение данной фазовой поверхности S , а R обозначает расстояние между точками p и q .

Чтобы оценить приведенный выше интеграл в некоторой точке p , опустим из этой точки перпендикуляр на плоскость $x = x_0$ и обозначим точку их пересечения как O (рис. 6.10, *в*). Очевидно, что сферические волны, возбужденные элементами dS , расположенными на одинаковом расстоянии от точки O , дают одинаковый вклад в потенциал U . Поэтому фазовую поверхность $x = x_0$ можно представить как систему кольцевых зон, называемых зонами Френеля, с центром в точке O (рис. 6.10, *в*), так что

$$R_1 = b + \frac{\lambda}{2}, R_2 = b + 2\frac{\lambda}{2}, R_3 = b + 3\frac{\lambda}{2}, \dots$$

и, в общем случае,

$$R_n = b + n\frac{\lambda}{2}, \quad (6.215)$$

где b – расстояние между точками O и p .

Чтобы выполнить это построение, нарисуем сферические поверхности с началом в точке p и радиусами, удовлетворяющими соотношению (6.215). Пересечение этих поверхностей с плоскостью $x = x_0$ дает набор окружностей. Каждая пара соседних окружностей образует при этом кольцо (зону Френеля). Конечно, для каждой точки наблюдения p имеется свое собственное множество зон Френеля.

Таким образом, результирующая волна представляет собой сумму элементарных волн U_n , порожденных источниками, расположенными в каждом из колец:

$$U(p) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(p). \quad (6.216)$$

Прежде чем рассмотреть эффект от единичной зоны, обсудим ее параметры. Из рис. 6.10, *в* видно, что зона с индексом n ограничивается двумя окружностями с радиусами r_{n-1} и r_n , причем

$$r_{n-1}^2 = R_{n-1}^2 - b^2 \text{ и } r_n^2 = R_n^2 - b^2, \text{ если } n \geq 1. \quad (6.217)$$

Подстановка (6.215) в (6.217) дает

$$r_n^2 = \left(b + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2 \text{ или } r_n^2 = \lambda nb + \frac{n^2\lambda^2}{4}.$$

Полагая

$$b \gg n\lambda, \quad (6.218)$$

получим

$$r_n^2 = b\lambda n \text{ или } r_n = \sqrt{b\lambda n}. \quad (6.219)$$

Конечно, с увеличением номера n неравенство (6.218) перестает выполняться, однако это относится к настолько далеким зонам, что их вклад в потенциал $U(\rho)$ практически равен нулю. Площадь рассматриваемых колец определяется как

$$S_n = \pi r_n^2 - \pi r_{n-1}^2 = \pi b \lambda [n - (n-1)]$$

или

$$S_n = \pi b \lambda. \quad (6.220)$$

Таким образом, все зоны имеют одинаковую площадь, которая прямо пропорциональна расстоянию b и длине волны λ . Из выражений (6.219) следует, что

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1}) \approx 2r_n \Delta r_n = b \lambda$$

или

$$\Delta r_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b \lambda}{n}}.$$

Так, например, при $n = 1$

$$\frac{\Delta r_1}{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} \ll 1 \text{ и } \frac{\Delta r_1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \gg 1,$$

однако с ростом n ширина зоны Δr_n становится сравнимой с длиной волны.

Согласно (6.214) потенциал, соответствующий зоне с номером n , определяется как

$$U_n(\rho) = A e^{ikx_0} \int_{S_n} K(\varphi) \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.221)$$

Поскольку

$$dS = 2\pi r dr,$$

имеем

$$U_n(\rho) = 2\pi A e^{ikx_0} \int_{S_n} K(\varphi) \frac{e^{ikR}}{R} r dr. \quad (6.222)$$

Чтобы упростить этот интеграл, произведем в нем замену переменных. Для этого продифференцируем равенство

$$R^2 = b^2 + r^2.$$

Это дает

$$R dR = r dr.$$

Далее вместо (6.222) получим

$$U_n(p) = 2\pi A e^{ikx_0} \int_{R_{n-1}}^{R_n} K(\varphi) e^{ikR} dR. \quad (6.223)$$

Учтем теперь тот факт, что расстояния R_n и R_{n-1} значительно больше длины волны (выражение (6.210)), а ширина каждой зоны Δr_n мала по сравнению с этими расстояниями:

$$\Delta r_n \ll R_{n-1} \text{ и } \Delta r_n \ll R_n.$$

Последние неравенства означают, что фактор наклона K почти постоянен в пределах зоны и, следовательно, его можно вынести из-под знака интеграла. Окончательно получим

$$U_n(p) = 2\pi A K_n e^{ikx_0} \int_{R_{n-1}}^{R_n} e^{ikR} dR. \quad (6.224)$$

В отличие от множителя K_n функция e^{ikR} может быстро изменяться в пределах зоны и поэтому она должна оставаться под интегралом.

Выполняя интегрирование в (6.224) и используя (6.215), получим

$$U_n = \frac{2\pi A}{ik} K_n e^{ikx_0} (e^{ikR_n} - e^{ikR_{n-1}})$$

или

$$U_n = \frac{2\pi A}{ik} K_n e^{ik(x_0+b)} [e^{ikn\frac{\lambda}{2}} - e^{ik(n-1)\frac{\lambda}{2}}].$$

Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, последнее выражение можно переписать как

$$U_n(p) = -i\lambda A K_n e^{ik(x_0+b)} e^{i\pi n} (1 - e^{-i\pi}).$$

Учитывая, что

$$e^{i\pi n} = (-1)^n \text{ и } 1 - e^{-i\pi} = 2,$$

имеем

$$U_n(p) = 2i\lambda (-1)^{n+1} K_n A e^{ik(x_0+b)}. \quad (6.225)$$

В связи с этим полезно заметить следующее. По определению, колебания в источниках, расположенных на фазовой поверхности и, в частности, в пределах каждой из зон, происходят синхронно, однако волны, вызванные этими источниками, имеют различные фазы в точке наблюдения p .

Подстановка (6.225) в (6.216) дает следующее выражение для комплексной амплитуды результирующей волны:

$$U(p) = 2i\lambda A e^{ik(x_0+b)} L, \quad (6.226)$$

где

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_n = K_1 - K_2 + K_3 - K_4 + K_5 - K_6 + \dots \quad (6.227)$$

Таким образом, вычисление результирующей волны, возникшей в результате интерференции волн от всех зон, сводится в волновой зоне ($b \gg \lambda$) к оценке ряда L . Этот ряд имеет несколько важных свойств, которые следуют из сделанных ранее предположений:

- а) ряд является знакопеременным;
- б) с увеличением индекса n члены ряда уменьшаются в силу свойств K_n ;
- в) абсолютные величины двух последовательных членов ряда близки друг к другу.

В силу этих свойств относительно легко оценить сумму ряда L .

Прежде всего, представим (6.227) в виде

$$L = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \left(\frac{K_5}{2} - K_6 + \frac{K_7}{2} \right) + \dots \quad (6.228)$$

Предположим сначала, что каждый из членов K_n больше или равен среднему арифметическому значений K_{n-1} и K_{n+1} :

$$K_n \geq \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2}.$$

Тогда выражения, стоящие в скобках (6.228) отрицательны и, соответственно,

$$L \leq K_1/2. \quad (6.229)$$

Таким же образом ряд (6.228) можно записать как

$$L = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2} \right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2} \right) - \dots \quad (6.230)$$

Выражения в скобках снова являются отрицательными и, следовательно,

$$L \geq K_1 - K_2/2. \quad (6.231)$$

Учитывая, что значения K_1 и K_2 почти одинаковы, вместо предыдущего неравенства получим

$$L \geq K_1/2. \quad (6.232)$$

Сравнение выражений (6.229) и (6.232) позволяет сделать вывод о том, что приблизительно

$$L = K_1/2. \quad (6.233)$$

Очевидно, что при уменьшении длины волны относительно расстояния R разница между факторами наклона, относящимися к соседним зонам, становится меньше и, следовательно, выражение (6.233) выполняется с большей точностью.

Если предположить, что

$$K_n \leq \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2},$$

то мы снова придем к формуле (6.223). Действительно, из (6.228) и (6.230) получим, соответственно,

$$L \leq \frac{K_1}{2} \text{ и } L \geq K_1 - \frac{K_2}{2} > \frac{K_1}{2},$$

Как и ранее, это означает, что

$$L = K_1/2.$$

Из этого равенства следует, что амплитуда волны, вызванной первой зоной, в 2 раза превышает амплитуду результирующей волны. Этот интересный факт мы используем позднее.

Далее, подстановка (6.233) в (6.226) дает

$$U(p) = i\lambda K_1 A e^{ik(x_0+b)}. \quad (6.234)$$

Последнее выражение представляет собой комплексную амплитуду U плоской волны в однородной среде, полученную как результат суперпозиции вторичных элементарных волн.

С другой стороны, как известно, плоская волна в рассматриваемой среде определяется выражением

$$U(p) = A e^{ik(x_0+b)}. \quad (6.235)$$

Сравнение последних двух равенств позволяет определить фактор наклона для первой зоны:

$$K_1 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}. \quad (6.236)$$

Покажем теперь, что аналогичные результаты получаются, когда первичная волна возбуждается элементарным источником, а фазовые поверхности являются, соответственно, сферическими (рис. 6.10, б).

Построим снова зоны Френеля, рисуя сферические поверхности с началом в точке наблюдения и радиусами, удовлетворяющими соотношению (6.215). Как и ранее, предполагается, что радиус r_0 фазовой поверхности, а также расстояние b значительно превышают длину волны λ .

Комплексная амплитуда потенциала первичной волны хорошо известна и равняется

$$U(q) = A e^{ikr_0}/r_0. \quad (6.237)$$

Согласно формуле (6.212), потенциал в точке p , соответствующий зоне с номером n , определяется как

$$U_n(p) = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} K_n \int_{S_n} \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.238)$$

Из рис. 6.10, б видно, что

$$R^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta. \quad (6.639)$$

Дифференцирование этого выражения дает

$$R \, dR = r_0(r_0 + b) \sin\theta \, d\theta. \quad (6.240)$$

Площадь элементарного кольца с радиусом $r_0 \sin\theta$ и шириной $r_0 d\theta$ равняется

$$dS = 2\pi r_0^2 \sin\theta \, d\theta$$

или, с учетом (6.240),

$$dS = \frac{2\pi r_0 R \, dR}{r_0 + b}.$$

Следовательно, выражение (6.238) записывается как

$$U_n(p) = \frac{2\pi A e^{ikr_0}}{r_0 + b} K_n \int_{R_{n-1}}^{R_n} e^{irR} dR.$$

Интеграл, стоящий в этом выражении, рассматривался ранее, и мы получаем

$$U_n(p) = 2i\lambda(-1)^{n+1} K_n \frac{A e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}.$$

Соответственно, результирующая волна определяется как

$$U_n(p) = 2i\lambda A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} L_N, \quad (6.241)$$

где

$$L_N = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_n. \quad (6.242)$$

В отличие от случая плоской волны, сумма L_N содержит конечное число членов. Ее оценка слегка отличается от рассмотренного ранее случая, поскольку здесь необходимо учесть присутствие последнего члена K_N .

Предположим сначала, что сумма L_N содержит нечетное число членов. Тогда ее можно записать как

$$L_N = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots + \frac{K_N}{2}$$

или (6.242)

$$L_N = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2} \right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2} \right) - \dots - \frac{K_{N-1}}{2} + K_N.$$

Если мы снова предположим, что

$$K_n \geq \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2},$$

то тогда (6.243) даст

$$L_N \geq \frac{K_1 + K_N}{2} \text{ и } L_N \leq \frac{K_1 + K_N}{2}.$$

Следовательно,

$$L_N = \frac{K_1 + K_N}{2}. \quad (6.244)$$

Легко показать, что это выражение остается верным, когда

$$K_n < \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2}.$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда N является четным числом. Как и в предыдущем случае, сумму L_N можно представить двумя разными способами:

$$L_N = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots + \frac{K_{N-1}}{2} - K_N \quad (6.245)$$

или

$$L_N = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2} \right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2} \right) - \dots - \frac{K_N}{2}.$$

Если, например, K_N превышает среднее арифметическое соседних с ним членов, то выражение (6.245) дает

$$L_N > \frac{K_1}{2} + \frac{K_{N-1}}{2} - K_N \text{ и } L_N < K_1 - \frac{K_2}{2} - \frac{K_N}{2}$$

или

$$L_N > \frac{K_1 - K_N}{2} \text{ и } L_N < \frac{K_1 - K_N}{2}, \quad (6.246)$$

поскольку соседние члены почти равны друг другу. Таким образом, в случае четного числа членов мы имеем

$$L_N = \frac{K_1 - K_N}{2}. \quad (6.247)$$

Этот результат не изменится, если

$$K_n < \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2}.$$

Подстановка (6.244) и (6.247) в (6.241) даст

$$U_n(p) = i\lambda(K_1 \pm K_N)A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}. \quad (6.248)$$

Из рис. 6.10, видно, что прямая qr является касательной к зоне $\varphi = \pi/2$ и, в соответствии с предположением Френеля, $K_N = 0$.

Таким образом, мы снова получаем

$$U_n(p) = i\lambda K_1 A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}, \quad (6.249)$$

в то время как потенциал, соответствующий первой зоне, имеет в 2 раза большие значения:

$$U_1(p) = 2U(p). \quad (6.250)$$

Потенциал в точке наблюдения, вызванный элементарным источником в однородной среде,

$$U(p) = A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}$$

и, следовательно, как и в случае плоской волны,

$$K_1 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}.$$

Рассмотрим теперь два примера, иллюстрирующие применение зон Френеля.

Пример 1: зависимость интенсивности от расстояния позади кругового отверстия

Предположим, что отверстие в экране представляет собой круг, а источник p_0 и точка наблюдения p располагаются на прямой, проходящей через его центр (рис. 6.10, з). Согласно выражению (6.219), радиус зоны Френеля пропорционален расстоянию b от точки наблюдения до экрана. Поэтому размер отверстия может быть гораздо меньше первой зоны, если это расстояние достаточно велико. Соответственно, амплитуда волны значительно меньше амплитуды в однородной среде, когда экран полностью отсутствует. По мере приближения к экрану существует такое расстояние, при котором радиус первой зоны равняется радиусу отверстия. В этом случае, согласно (6.250), амплитуда волны в 2 раза больше, чем в случае однородной среды. Конечно, этот эффект было довольно трудно предсказать, так как экран располагается между точкой наблюдения и практически всей фазовой поверхностью. По мере приближения к экрану амплитуда волны начинает уменьшаться, поскольку вместе с первой зоной отверстие частично занято второй зоной Френеля. Это также довольно удивительно, потому что точка p становится ближе к отверстию, однако амплитуда при этом уменьшается. Кроме того, существует такое расстояние, при котором внешний контур вто-

рой зоны совпадает с краем отверстия. В этом случае интенсивность волны падает почти до нуля, поскольку волны, вызванные обеими зонами, имеют практически одинаковые амплитуды $K_2 \approx K_1$, а сдвиг фаз между ними равен π . Когда расстояние b становится еще меньше (рис. 6.10, з), наблюдаются целые серии максимумов и минимумов. Максимумы появляются тогда, когда в отверстии укладывается нечетное число зон, а минимумы, когда число зон в пределах отверстия оказывается четным. И, наконец, когда точка p находится совсем близко от отверстия, амплитуда волны достигает некоторого постоянного значения, соответствующего волне в однородной среде.

Аналогичное поведение наблюдается, когда точка p фиксирована, а изменяется радиус отверстия.

Пример 2: зависимость интенсивности от расстояния позади кругового экрана

Предположим теперь, что между источником и точкой наблюдения расположен экран в форме круга (рис. 6.10, д) и все расстояния остаются неизменными.

Если радиус экрана достаточно большой по отношению к b , то существует множество зон Френеля, расположенных в пределах площади круга, однако они не вносят вклада в амплитуду волны. В то же время эффект от зон, расположенных вне экрана, пренебрежимо мал, поскольку малы соответствующие им факторы наклона ($\varphi \rightarrow \pi/2$). Интенсивность волны очень слабая (тень). С уменьшением размеров экрана интенсивность начинает возрастать. Так, например, когда с круговым отверстием совпадает первая зона, наблюдается почти такая же амплитуда волны, как и в случае, когда экран отсутствует. Действительно, в этом случае, как следует из (6.255), волна в точке наблюдения описывается как

$$U(p) = 2i\lambda \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0+b} [-K_2 + K_3 - K_4 + K_5 - \dots], \quad (6.251)$$

поскольку эффект от первой зоны отсутствует.

Используя тот же подход, что и ранее, мы приходим к выводу, что сумма (6.251) приближенно равняется величине $-\frac{1}{2}K_2$. Так как $K_2 \approx K_1$, имеем

$$U(p) = -\frac{i\lambda AK_1}{r_0+b} e^{ik(r_0+b)}.$$

Таким образом, позади экрана имеется геометрическая тень, однако существует такая точка, в которой амплитуда волны такая же, как и в случае отсутствия экрана.

Это открытие имеет очень интересную историю. В 1818 году Френель представлял перед Французской Академией свою работу, в которой были изложены принципы интерференции волн и построения зон. Эту работу проанализировал Пуассон, который пришел к выводу, что в некоторой точ-

ке позади экрана интенсивность волны может быть такой же, как и в случае его отсутствия. Этот результат он рассматривал как доказательство того, что теория не верна. Однако эксперименты, проведенные Араго и Френелем, подтвердили правоту Френеля.

Концепция зон Френеля в присутствии таких неоднородностей, как экраны, основывается на предположениях, которые впоследствии были использованы в теории дифракции Кирхгофа. Действительно, вклад каждой из зон Френеля остается постоянным и не зависит от того, находятся ли остальные зоны напротив отверстия или напротив непрозрачной части экрана.

В заключение следует сказать, что работа Френеля была важным шагом в развитии теории волн. Сущностью этой работы является принцип суперпозиции вторичных волн, полностью согласующийся с формулами Гельмгольца – Кирхгофа. Как мы уже знаем, эти выражения подтвердили многие положения, лежащие в основе принципов Гюйгенса и Френеля, но, в отличие от них, эти формулы позволяют точно определить волну внутри объема, при условии, что она известна на поверхности, окружающей данный объем.

6.7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛОМ И НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Ранее мы получили соотношения между потенциалом $U(\mathbf{r}, t)$ в произвольной точке объема V и значениями этой функции и ее нормальной производной на поверхности S данного объема (формулы Гельмгольца – Кирхгофа). Решим теперь совершенно другую задачу и предположим, что потенциал U и его производная по времени $\partial U/\partial t$ известны в некоторый момент времени $t = 0$:

$$U(\mathbf{g}, 0) = \varphi(\mathbf{g}) \text{ и } \frac{\partial U(\mathbf{g}, 0)}{\partial t} = \chi(\mathbf{g}), \text{ если } t = 0. \quad (6.252)$$

Следует заметить, что функции φ и χ отличны от нуля только внутри некоторого объема V , ограниченного поверхностью Σ (рис. 6.11, a).

Учитывая соотношения между потенциалом U и волновыми полями, можно сказать, что в начальный момент времени заданы распределения давления и скорости. И, конечно, скалярный потенциал в каждой точке подчиняется волновому уравнению:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (6.253)$$

Соотношения (6.252) – (6.253) однозначно определяют волну во всех точках однородной среды. Наша цель состоит в том, чтобы получить выражение для скалярного потенциала U в произвольный момент времени, считая, что начальные условия (6.252) известны.

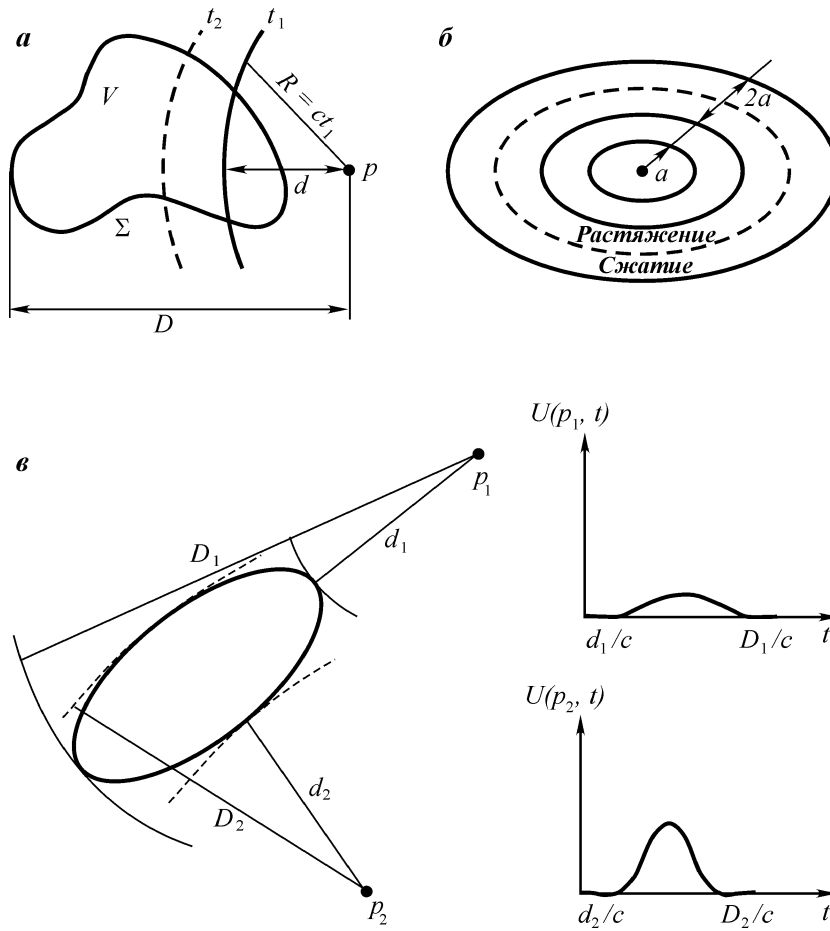


Рис. 6.11. Начальные условия внутри произвольного объема (а); равномерное сжатие сферы (б); потенциал как функция времени (в)

Мы начнем с простейшего случая плоской волны, затем рассмотрим сферическую волну, а после этого перейдем к случаю волн, вызванных произвольным распределением источников.

Случай 1: плоская волна

Пусть волна является плоской. Тогда, как известно, уравнение (6.253) заметно упрощается, и его решение описывается выражением

$$U(x, t) = F(x + ct) + f(x - ct). \quad (6.254)$$

Для простоты здесь опущен коэффициент a аргумента $a(x \pm ct)$.

Определим теперь неизвестные функции F и f таким образом, чтобы удовлетворить начальным условиям. В соответствии с (6.252) имеем

$$U(x, 0) = F(x) + f(x) = \varphi(x) \quad (6.255)$$

и

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = cF'(x) - cf'(x) = \chi(x). \quad (6.256)$$

Интегрирование этого выражения дает

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha + C, \quad (6.257)$$

где x_0 и C – постоянные, α – переменная интегрирования.

Решая систему уравнений

$$F(x) + f(x) = \varphi(x),$$

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha + C,$$

получим

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \quad (6.258)$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Полученные выражения справедливы для любого аргумента и, в частности, для $x + ct$ или $x - ct$, т.е.

$$F(x + ct) = \frac{1}{2} \varphi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \quad (6.259)$$

и

$$f(x - ct) = \frac{1}{2} \varphi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Подстановка (6.259) в (6.254) дает

$$U(x, t) = \frac{\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} \chi(\alpha) d\alpha. \quad (6.260)$$

Таким образом, потенциал плоской волны выражается через начальные условия. Выражение (6.260) называется формулой Даламбера.

Случай 2: сферическая волна

Предположим теперь, что источник порождает сферическую волну. В частности, такая волна может быть вызвана элементарным источником. В силу центральной симметрии относительно начала координат O , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

а его решение (глава 5) дается формулой

$$RU(R, t) = F(R + ct) + f(R - ct). \quad (6.261)$$

Очевидно, что данный случай похож на предыдущий, однако имеется одно существенное отличие, а именно то, что в левой части (6.261) присутствует множитель R .

Чтобы удовлетворить начальным условиям, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$F(R) + f(R) = R \varphi(R),$$

$$F'(R) - f'(R) = \frac{R}{c} \chi(R).$$

Эти уравнения справедливы при любом значении R . Поэтому их удобно переписать в виде:

$$F(z) + f(z) = z \varphi(z), \quad (6.262)$$

$$F'(z) - f'(z) = \frac{z}{c} \chi(z),$$

где z – произвольный аргумент.

Интегрируя второе из приведенных уравнений, мы приходим к системе уравнений относительно двух неизвестных функций:

$$F(z) + f(z) = z \varphi(z) \quad \text{и} \quad (6.623)$$

$$F(z) - f(z) = \frac{1}{c} \int_{z_0}^z \alpha \chi(\alpha) d\alpha + C.$$

Отсюда

$$F(z) = \frac{z \varphi(z)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \alpha \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \quad \text{и} \quad (6.264)$$

$$f(z) = \frac{z \varphi(z)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \alpha \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Как и в случае плоских волн, выражения (6.264) справедливы при любом аргументе. Так, например,

$$F(R + ct) = \frac{(R + ct)\varphi(R + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{z_0}^{R+ct} \alpha \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}$$

(6.265)

и

$$f(R - ct) = \frac{(R - ct)\varphi(R - ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{z_0}^{R-ct} \alpha \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Таким образом, потенциал U описывается выражением

$$U(R, t) = \frac{(R + ct)\varphi(R + ct) + (R - ct)\varphi(R - ct)}{2R} + \frac{1}{2cR} \int_{R-ct}^{R+ct} z \chi(z) dz. \quad (6.266)$$

При выводе этой формулы мы предполагали, что z является одним из возможных значений R , т.е. величиной положительной. Это означает, что (6.266) справедливо, когда

$$R \geq ct.$$

Для того чтобы получить аналогичное выражение для отрицательных z , рассмотрим как ведет себя потенциал в окрестности начала координат O .

Из выражения (6.262) следует, что

$$0 = F(z) + f(-z)$$

или

$$f(z) = -F(-z), \quad (6.267)$$

где

$$z = R - ct < 0.$$

Таким образом, потенциал можно представить как

$$RU(R, t) = F(R + ct) + f(R - ct) = F(R + ct) - F(ct - R).$$

Отсюда, с учетом первого из выражений (6.265), получим

$$U(R, t) = \frac{(R + ct)\varphi(R + ct)}{2} + \frac{1}{2cR} \int_{z_0}^{R+ct} \alpha \chi(\alpha) d\alpha - \\ - \frac{(ct - R)\varphi(ct - R)}{2R} - \frac{1}{2cR} \int_{z_0}^{ct-R} \alpha \chi(\alpha) d\alpha$$

или

$$U(R, t) = \frac{(ct + R)\varphi(ct + R) - (ct - R)\varphi(ct - R)}{2R} + \frac{1}{2cR} \int_{ct-R}^{ct+R} z\chi(z)dz. \quad (6.268)$$

Таким образом, формулы (6.266) и (6.268) показывают, что в произвольной точке среды потенциал $U(R, t)$ определяется начальными условиями.

С физической точки зрения приведенные соотношения очевидны, поскольку, как уже отмечалось ранее, условия (6.252) характеризуют распределение источников в начальный момент времени.

Чтобы продемонстрировать применение выражения (6.266), рассмотрим один пример. Предположим, что часть среды, имеющая форму сферы радиуса a (рис. 6.11, б), находится в состоянии однородного сжатия и покоится. В момент времени $t = 0$ сфера начинает возвращаться в свое недеформированное состояние. В результате этого движения возникает волна, которая должна удовлетворять начальным условиям

$$v_R(R, 0) = 0 \text{ и } \theta(R, 0) = \begin{cases} \theta_0, & \text{если } R \leq a, \\ 0, & \text{если } R > a, \end{cases} \quad (6.269)$$

где v_R и θ обозначают, соответственно, скорость частиц и дилатацию.

Поскольку

$$v = \text{grad } U, \quad P_a = -\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t}$$

и

$$\theta = -P_a / \rho_0 c^2,$$

мы вместо условий (6.252) имеем

$$\varphi(R) = 0 \text{ и } \chi(R) = \begin{cases} c^2 \theta_0, & \text{если } R \leq a, \\ 0, & \text{если } R > a. \end{cases} \quad (6.270)$$

Следует заметить, что дилатация θ удовлетворяет волновому уравнению и, поскольку волны распространяются от сферы, аргумент функции θ равен

$$R - ct.$$

Соответственно, последнее из условий (6.270) можно записать как

$$\chi(z) = \begin{cases} c^2 \theta_0, & \text{если } z \leq a, \\ 0, & \text{если } z > a. \end{cases} \quad (6.271)$$

Каждый элемент сферы можно рассматривать как элементарный источник, причем ближайший к точке наблюдения источник расположен на расстоянии $R - a$, а $R + a$ характеризует максимальное расстояние. Следовательно, движение в окрестности произвольной точки p будет происходить в течение интервала времени

$$\frac{R-a}{c} \leq t \leq \frac{R+a}{c}.$$

В силу сферической симметрии волновые движения возникают в сферической оболочке толщины $2a$.

Из начальных условий (6.270) следует, что в этом случае выражение для потенциала (6.266) заметно упрощается, и мы имеем

$$U(R, t) = \frac{1}{2cR} \int_{R-ct}^{R+ct} z \chi(z) dz.$$

Используя (6.271), получим

$$U(R, t) = \frac{1}{2c} \frac{c^2 \theta_0}{R} \int_{R-ct}^a z dz$$

или

$$U(R, t) = \frac{c\theta_0}{4R} [a^2 - (R-ct)^2]. \quad (6.272)$$

Поскольку

$$\theta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t},$$

дилатация внутри зоны возмущения равняется

$$\theta = \frac{\theta_0}{2} \frac{R-ct}{R}$$

или

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{R-ct}{2R}, \quad (6.273)$$

где

$$ct - a \leq R \leq ct + a.$$

Радиус сферической поверхности, проходящей через середину оболочки,

$$R_m = ct.$$

Из соотношения (6.273) следует, что вблизи этой поверхности функция θ стремится к нулю. В то же время во внешней по отношению к данной поверхности области ($R > R_m$) дилатация имеет тот же знак, что и θ_0 , а во внутренней области ($R < R_m$) – противоположный.

Заметим, что функция θ в точках волнового фронта определяется соотношением

$$\theta/\theta_0 = a/2R$$

и уменьшается пропорционально расстоянию R .

Для того чтобы рассмотреть более общий случай, необходимо вывести соотношение между начальными условиями и потенциалом U в начале координат, которое должно выполняться для произвольного момента времени.

Из (6.262) следует, что

$$U(R, t) = \frac{F(R + ct) + f(R - ct)}{R}.$$

Используя соотношения (6.267), получим

$$U(R, t) = 2 \frac{F(ct + R) - F(ct - R)}{2R}, \text{ если } R \rightarrow 0,$$

или, разлагая функцию F в ряд в окрестности точки $R = 0$, имеем

$$U(0, t) = 2F'(ct). \quad (6.274)$$

Дифференцируя первое из уравнений (6.262), приходим к новой системе уравнений относительно функций f' и F' :

$$F'(z) + f'(z) = \frac{\partial}{\partial z}[z\varphi(z)]$$

и

$$F'(z) - f'(z) = \frac{z}{c}\chi(z).$$

Отсюда

$$2F'(z) = \frac{z}{c}\chi(z) + \frac{\partial}{\partial z}[z\varphi(z)],$$

и вместо (6.274) имеем

$$U(0, t) = t\chi(ct) + \frac{\partial}{\partial t}[t\varphi(ct)]. \quad (6.275)$$

Таким образом, мы выразили потенциал в точке начала координат через функции φ и χ .

Применяя этот результат к волне (6.270), вызванной однородно сжатой сферой, получим

$$U(0, t) = c^2\theta_0 \begin{cases} t, & \text{если } ct < a, \\ 0, & \text{если } ct > a. \end{cases}$$

Случай 3: произвольная волна

Предположим, что начальные условия заданы в произвольном объеме V , окруженном поверхностью Σ (рис. 6.11, a). Для того чтобы выразить по-

тенциал U для любой точки p в произвольный момент времени t через функции φ и χ , мы используем подход, предложенный Пуассоном.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса R с центром в точке наблюдения p . В общем случае значения потенциала U меняются на этой поверхности. Введем среднее значение потенциала:

$$U_m(R, t) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S U(g, t) dS, \quad (6.276)$$

где g обозначает точку поверхности S .

Конечно, функция $U_m(R, t)$ зависит от радиуса R и времени t и обычно не совпадает со значением потенциала в точке p . Например, варьируя радиус R при постоянном времени, мы получим различные значения U_m . В частности, если волна еще не достигла поверхности S , среднее значение функции U_m равняется нулю. Точно так же варьирование времени приводит к изменению функции U_m на фиксированной сферической поверхности.

Из выражения (6.276) следует, что

$$U_m(R, t) = \frac{1}{4\pi} \oint U(g, t) d\Omega, \quad (6.277)$$

где $d\Omega$ обозначает телесный угол, под которым элемент сферической поверхности виден из точки наблюдения p .

Это означает, что функция $U_m(R, t)$ является линейной комбинацией скалярных потенциалов и, следовательно, удовлетворяет также волновому уравнению. Более того, поскольку функция U_m не зависит от сферических координат θ и φ , ее можно записать как

$$RU_m(R, t) = F(R + ct) + f(R - ct).$$

Вводя средние значения начальных условий

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \oint_S U(g, 0) d\Omega$$

и (6.278)

$$\chi_m = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{U(g, 0)}{\partial t} d\Omega,$$

общий случай сводим к предыдущему. Затем, используя (6.275), запишем следующее выражение для среднего значения U_m в начале координат:

$$U_m(0, t) = t\chi_m(ct) + \frac{\partial}{\partial t} [t\varphi_m(ct)]. \quad (6.279)$$

С другой стороны, поскольку скалярный потенциал является непрерывной функцией,

$$U_m(0, t) = U(0, t).$$

Действительно, при $R \rightarrow 0$ имеем

$$U_m(R, t) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint U dS \rightarrow \frac{S}{4\pi R^2} U(0, t) = U(0, t), \text{ если } R \rightarrow 0.$$

Таким образом, мы приходим к выражению

$$U(0, t) = \frac{t}{4\pi} \oint \chi(ct) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (t \oint \varphi(ct) d\Omega)$$

или

$$U(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \oint \chi(ct) dS + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2 t} \oint \varphi(ct) dS \right), \quad (6.280)$$

поскольку

$$R = ct.$$

Формула (6.280) позволяет найти волновое поле в однородной среде при условии, что заданы начальные условия. Это выражение называется формулой Пуассона.

Чтобы проиллюстрировать применение формулы (6.280), предположим, что внутри поверхности Σ имеется определенное распределение первичных источников, которые начинают действовать в момент времени $t = 0$. Каждый из этих источников порождает сферическую волну, которая достигает точки наблюдения p (рис. 6.11, *а*) в момент времени t . Очевидно, что волны, вызванные источниками, расположенными на одной и той же сферической поверхности, приходят в ее центр одновременно, и благодаря их интерференции формируется результирующая волна. Из рис. 6.11, *а* видно, что первая волна приходит в эту точку в момент времени $t = d/c$. Амплитуда этой волны очень мала, поскольку в этот момент мала часть сферической поверхности S_m . С течением времени площадь S_m увеличивается и, соответственно, амплитуда волны также может возрасти, при условии, что элементарные волны имеют почти одинаковые фазы. Наконец, в момент времени $t = D/c$ наблюдается хвост волны, после чего колебания отсутствуют.

Рассмотрим еще один пример (рис. 6.11, *б*), в котором в момент времени $t = 0$ функция φ равняется нулю, а χ имеет постоянное значение внутри Σ . Как и следовало ожидать, формула Пуассона в этом случае сильно упрощается, и мы имеем

$$U(p, t) = \frac{\chi S_\Sigma}{4\pi c^2 t}. \quad (6.281)$$

Здесь S_Σ обозначает площадь, образованную пересечением поверхности Σ и сферы S радиуса

$$R = ct$$

с центром в точке p . Это означает, что эффект действия источников зависит от размера и формы поверхности S_e , а также от положения точки наблюдения p . Из рис. 6.11, *б* легко увидеть, что максимальный сигнал в точке p_1 будет меньше, чем в точке p_2 , однако продолжительность этого сигнала будет больше.

6.8. ПЕРЕХОД К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКЕ

Приступим теперь к изучению волн и, в частности, дифракционной картины в предельном случае, когда длина волны стремится к нулю: $\lambda \rightarrow 0$. Сначала мы рассмотрим относительно простой случай, когда в однородной среде имеется экран с отверстием произвольной формы. Затем, основываясь на уравнении Гельмгольца, мы обсудим общий случай.

Ранее было показано (см. формулу 6.97), что комплексную амплитуду U стационарной волны позади неоднородности можно записать как

$$i\lambda U(p) = A \int_{S_e} \frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) dS_e, \quad (6.282)$$

где R и R_1 – расстояния от точки отверстия до, соответственно, точки наблюдения и источника; S_e – площадь отверстия (рис. 6.12, *а*). С уменьшением длины волны параметр k неограниченно возрастает, и подынтегральное выражение становится сильно осциллирующей функцией. Поэтому вряд ли возможно проанализировать асимптотическое поведение функции U , используя для этого численное интегрирование. Для решения этой задачи был предложен очень простой и элегантный подход. В формуле (6.282) под интегралом стоит выражение

$$\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R})}{RR_1} e^{ik(R+R_1)}$$

и очевидно, что поверхности постоянной фазы этой функции определяются как

$$R + R_1 = \text{const.} \quad (6.283)$$

Эти поверхности являются эллипсоидами, имеющими общие фокальные точки p_1 и p (рис. 6.12, *а*). Поскольку в данном разделе нигде не используется понятие плотности среды, мы обозначим расстояние через ρ .

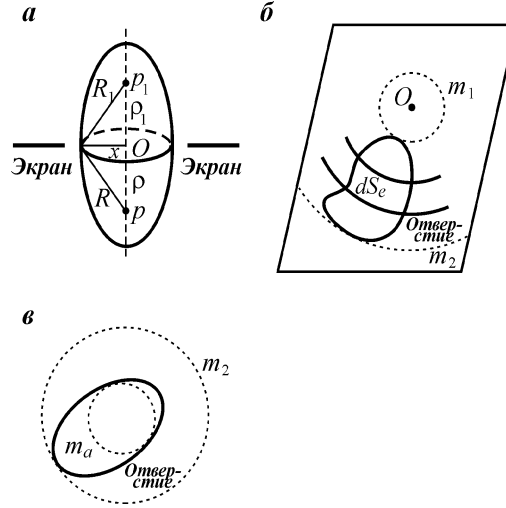
Можно представить себе бесконечное число таких эллипсоидов. В частности, когда максимальное сечение эллипсоида стремится к нулю, он вырождается в прямую линию pp_1 . Расстояние

$$\rho + \rho_1$$

называется фокальным расстоянием, где

$$\rho = pO \text{ и } \rho_1 = p_1O,$$

Рис. 6.12. Иллюстрация формул (6.283) и (6.285) (а); точка находится на экране (б); точка находится в пределах отверстия (в)



а точка О является точкой пересечения фокальной прямой с плоскостью экрана.

Наша цель состоит в том, чтобы преобразовать интеграл из выражения (6.282) таким образом, чтобы можно было довольно легко получить его асимптотическое значение при $\lambda \rightarrow 0$. Предположим, что прямая pp_1 перпендикулярна отверстию, и рассмотрим круговое сечение эллипсоида с центром в точке О. Радиус этого сечения равняется x , а расстояния от произвольной точки сечения до точек p_1 и p равняются, соответственно, R и R_1 :

$$R^2 = \rho^2 + x^2, \quad R_1^2 = \rho_1^2 + x^2$$

или

$$R = \rho \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2}} \quad \text{и} \quad R_1 = \rho_1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}}. \quad (6.284)$$

Поскольку мы предположили, что обе точки p_1 и p находятся далеко от экрана, можно использовать разложение Маклорена для функций R и R_1 :

$$R \approx \rho \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho^2} \right) \quad \text{и} \quad R_1 \approx \rho_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho_1^2} \right). \quad (6.285)$$

Таким образом,

$$R + R_1 = \rho + \rho_1 + m, \quad (6.286)$$

где

$$m = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{x^2}{2} + \dots, \quad dm = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) x dx. \quad (6.287)$$

Следовательно, параметр m характеризует, с точностью до константы, площадь соответствующего круга радиуса x , полученного пересечением эллипсоида и экрана.

Каждый из этих кругов можем представить как набор элементарных колец с площадью

$$dS_r = 2\pi x dx,$$

либо, используя (6.287), получим

$$dS_r = \frac{2\pi}{1/\rho + 1/\rho_1} dm = f dm. \quad (6.288)$$

Здесь

$$f = \frac{2\pi}{1/\rho + 1/\rho_1}. \quad (6.289)$$

Далее, введем функцию $\varphi(m)$, определяющую ту часть кольца радиуса x , которая уместается в пределах отверстия:

$$0 \leq \varphi(m) \leq 1,$$

т.е.

$$dS_e = \varphi(m)dS_r = f \varphi(m)dm,$$

где dS_e обозначает площадь, соответствующую отверстию (рис. 6.12, б). Таким образом, интегрирование по области отверстия выполняется с использованием суммирования элементарных круговых колец.

В дальнейшем удобно рассматривать отдельно следующие две ситуации:

- а) точка O располагается на экране;
- б) точка O находится в пределах отверстия.

Начнем с первого случая, показанного на рис. 6.12, б. После введения параметра m интегрирование в правой части (6.282) можно производить по этому параметру, имея m_1 и m_2 в качестве нижнего и верхнего пределов:

$$m_1 \leq m \leq m_2.$$

Из рис. 6.12, , видно, что те части колец, которые относятся к предельным значениям m_1 и m_2 , равняются нулю:

$$\varphi(m_1) = \varphi(m_2) = 0. \quad (6.290)$$

Используя обозначение

$$F(m) = f \varphi(m) \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R})}{RR_1}$$

и выражения (6.286) – (6.288), формулу (6.282) можно переписать в виде

$$i\lambda U(\rho) = A e^{ik(\rho+\rho_1)} \int_{m_1}^{m_2} F(m) e^{ikm} dm. \quad (6.291)$$

Интегрирование этого выражения по частям дает

$$\int_{m_1}^{m_2} F(m) e^{ikm} dm = \frac{F(m)}{ik} e^{ikm} \Big|_{m_1}^{m_2} - \frac{1}{ik} \int_{m_1}^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm. \quad (6.292)$$

В силу (6.290) первый член в выражении (6.292) исчезает, и мы получаем

$$U(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{m_1}^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm,$$

так как

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Поскольку функция, стоящая в последнем интеграле, имеет осциллирующий характер, этот интеграл стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, в предельном случае, когда длина волны стремится к нулю, волна в точке p исчезает, если прямая pp_1 пересекает экран. Это происходит независимо от того, имеется в экране отверстие или нет. Иными словами, результирующая волна в таких точках исчезает в результате интерференции волн, возникших на поверхности отверстия. Поскольку между источником и указанными точками наблюдения располагается жесткий экран, мы можем сказать, что волна отсутствует в зоне геометрической тени. В то же время в реальной ситуации, когда $\lambda \neq 0$, всегда наблюдается дифракция и, до некоторой степени, волны всегда присутствуют в этой части среды.

Рассмотрим теперь второй случай, когда точка O располагается где-то в пределах отверстия (рис. 6.12, *б*). Согласно (6.287) интегрировать нужно, начиная со значения $m = 0$, поскольку площадь начальной полосы также равна нулю. На интервале

$$0 \leq m \leq m_a$$

все точки круговых колец относятся к отверстию и, следовательно,

$$\varphi(m) = 1.$$

Из рис. 6.12, *б* хорошо видно, что эта функция уменьшается от единицы до нуля между точками $m = m_a$ и $m = m_2$:

$$1 \geq \varphi(m) \geq 0.$$

Соответственно, выражение (6.291) можно переписать как

$$i\lambda U(p) = A e^{ik(\rho+\rho_1)} \int_0^{m_2} F(m) e^{ikm} dm.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_0^{m_2} F(m) e^{ikm} dm = \frac{F(m)}{ik} e^{ikm} \Big|_0^{m_2} - \frac{1}{ik} \int_0^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm$$

или

$$U(p) = \frac{A e^{ik(\rho+\rho_1)}}{2\pi} \left[-F(m) e^{ikm} \Big|_0^{m_2} + \int_0^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm \right]. \quad (6.293)$$

Как и в предыдущем случае, интеграл исчезает при $\lambda \rightarrow 0$. Значение первого члена, соответствующее верхнему пределу, также равняется нулю, поскольку $\varphi(m_2) = 0$.

Таким образом,

$$U(p) = \frac{A e^{ik(\rho+\rho_1)}}{2\pi} F(0). \quad (6.294)$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi(0) = 1, \quad \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R})}{RR_1} = \frac{1}{\rho\rho_1},$$

а также формулу (6.289), получим

$$F(0) = \frac{2\pi}{\rho_1 + \rho} \quad (6.295)$$

и, используя выражение (6.293),

$$U(p) = \frac{A}{\rho_1 + \rho} e^{ik(\rho+\rho_1)}. \quad (6.296)$$

Это выражение описывает комплексную амплитуду потенциала падающей волны на расстоянии $\rho + \rho_1$ от источника, которая была бы в отсутствие экрана. Таким образом, каждый раз, когда прямая $\rho\rho_1$ пересекает отверстие, волна позади экрана совпадает с той, что была бы в однородной среде. Другими словами, волна распространяется от источника к точке наблюдения вдоль прямой линии. Как видно из рис. 6.13, *a, б*, такое поведение наблюдается внутри конуса с вершиной в точке ρ_1 , боковая поверхность которого касается края отверстия. В то же время вне этого конуса, в зоне геометрической тени волна отсутствует. Следовательно, в пределе ($R \rightarrow 0$) дифракционная картина исчезает и, соответственно, волновые поля претерпевают разрыв на боковой поверхности конуса. Как уже отмечалось, в реальной ситуации, независимо от того, насколько мала длина волны, дифракция проявляется в пределах относительно небольшой зоны по обе стороны от этой поверхности.

Предположим, что в экране имеется множество различных отверстий. Тогда в пределе $\lambda \rightarrow 0$ все пространство позади экрана можно разбить на две

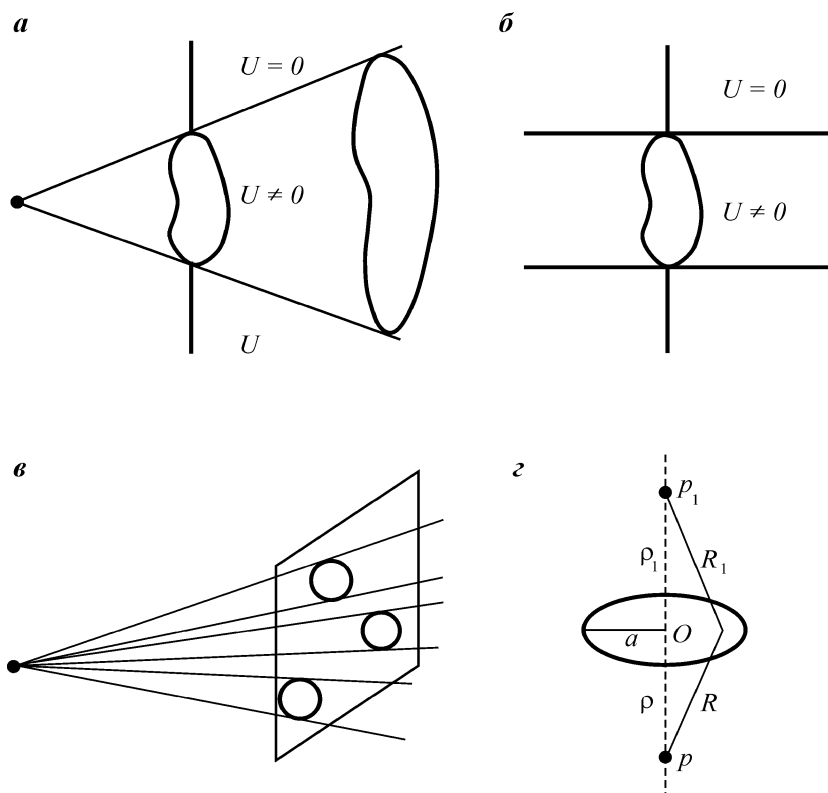


Рис. 6.13. Переход к геометрической акустике (а, б, в); круглый экран радиуса a (г)

части. Одна часть, где волны распространяются вдоль прямых линий, состоит из пучков лучей, а в другой части объема частицы находятся в покое.

Поскольку распределение волн определяется только геометрическими факторами, а именно положением источника и точки наблюдения, размером, формой и положением отверстия, рассматриваемое приближение ($\lambda \rightarrow 0$) называется геометрической акустикой. Оно играет чрезвычайно важную роль в сейсмологии, а его основные черты будут описаны в одной из следующих глав.

Здесь следует отметить, что переход от волновой к геометрической акустике происходит не всегда. Существуют такие случаи, когда при стремлении длины волны λ к нулю все еще наблюдается дифракция. Для иллюстрации такого поведения мы рассмотрим два связанных между собой примера.

Пример 1: интенсивность позади экрана

Как было показано ранее, если точка O находится за пределами отверстия (рис. 6.12, \cdot), то

$$U(p) \rightarrow 0, \quad \text{если } \lambda \rightarrow 0.$$

Однако существуют исключения из этого правила, например когда конечная часть указанного края экрана совпадает с одним из двух граничных кругов, характеризующихся параметрами

$$m_1 = \text{const} \text{ и } m_2 = \text{const}.$$

В таких случаях множители $\varphi(m_1)$ и $\varphi(m_2)$ не равны нулю и, следовательно, первый член в правой части выражения (6.292) не исчезает. Отсюда следует, что позади экрана (в зоне геометрической тени) присутствует волна. Иными словами, суперпозиция волн не приводит к их полному взаимному гашению, если край экрана имеет соответствующую круговую форму. Например, это происходит, когда точки p_1 и p расположены на перпендикуляре, проходящем через центр круга (рис. 6.13, z), и именно этот круг является экраном (остальная часть плоскости прозрачна). В этом случае выражение (6.282) можно переписать как

$$i\lambda U(p) = A \int_0^\infty \frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) 2\pi x dx. \quad (6.297)$$

Мы предполагаем, что $\rho = \rho_1$, и, следовательно $R = R_1 = r$, а также

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) = \frac{\rho}{R} = \frac{\rho}{r}.$$

Далее, из формулы (6.284) следует, что

$$r^2 = \rho^2 + x^2, \quad x dx = r dr.$$

Отсюда вместо (6.297) получаем

$$i\lambda U(p) = 2\pi A\rho \int_{\sqrt{a^2+\rho^2}}^\infty e^{2ikr} \frac{dr}{r^2}. \quad (6.298)$$

Интегрирование по частям дает

$$i\lambda U(p) = \frac{2\pi A\rho}{2ik} \left\{ \frac{e^{2ikr}}{r^2} \Big|_{\sqrt{a^2+\rho^2}}^\infty + 2 \int_{\sqrt{a^2+\rho^2}}^\infty \frac{e^{2ikr}}{r^3} dr \right\}$$

или

$$U(p) = -\frac{A\rho}{2} \left\{ \frac{e^{2ikr}}{r^2} \Big|_{\sqrt{a^2+\rho^2}}^\infty + 2 \int_{\sqrt{a^2+\rho^2}}^\infty \frac{e^{2ikr}}{r^3} dr \right\}.$$

Интегрируя по частям второй член этого выражения, мы видим, что он обращается в ноль при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, в пределе мы получим

$$U(\rho) = \frac{A\rho}{2(a^2 + \rho^2)} e^{2ik\sqrt{a^2 + \rho^2}}. \quad (6.299)$$

Как видно из рис. 6.13, z , потенциал падающей волны в точках на краю экрана определяется формулой

$$U_1 = A \frac{e^{ikR_1}}{R_1} = A \frac{e^{ik\sqrt{a^2 + \rho^2}}}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}.$$

Соответственно, выражение (6.289) переходит в

$$U(\rho) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} e^{ik\sqrt{a^2 + \rho^2}} U_1,$$

а функция интенсивности I изменяется вдоль оси диска как

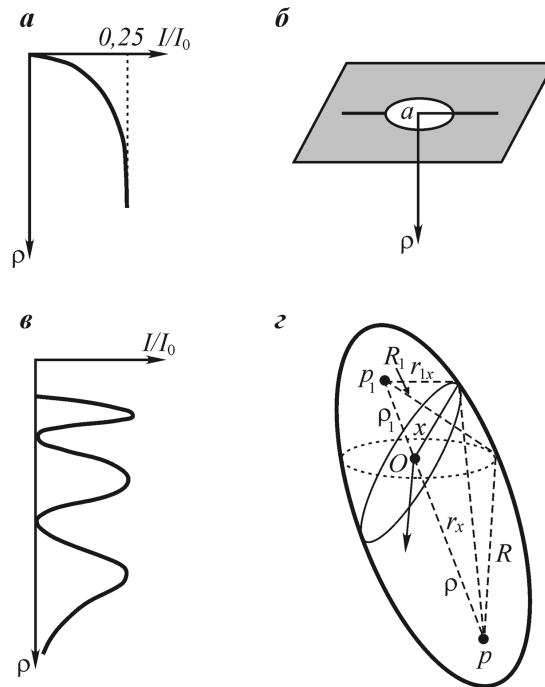


Рис. 6.14. Интенсивность позади круглого экрана (a); экран с круглым отверстием (b); интенсивность позади круглого отверстия (c); произвольное положение источника и точки наблюдения (d)

$$I(\rho) = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2} I_0, \quad (6.300)$$

где I_0 – интенсивность падающей волны на краю экрана.

Качественно мы уже обсуждали этот парадоксальный результат, изображенный на рис. 6.14, *а*. Из равенства (6.300) следует, что волна присутствует всюду вдоль оси ρ , за исключением точек вблизи диска. Это происходит, несмотря на то, что точки наблюдения лежат в области геометрической тени. Относительная интенсивность I/I_0 постепенно увеличивается с увеличением расстояния ρ между экраном и точкой ρ и асимптотически стремится к значению 0,25.

Заметим, что если падающая волна является плоской, то

$$I \rightarrow I_0, \text{ если } \rho \rightarrow \infty,$$

т.е. на достаточно больших расстояниях присутствие экрана практически никак не влияет на точки, расположенные на оси ρ . Как отмечалось ранее, поведение волны, описываемое выражением (6.300) противоречит концепции распространения волн вдоль прямолинейных лучей при $\lambda \rightarrow 0$. Иногда такое поведение называют дифракцией Пуассона. В то же время следует снова подчеркнуть, что равенство (6.300) выполняется только на оси ρ , поскольку в этом случае прямые

$$m = \text{const}$$

совпадают с краем диска. Вместе с тем, данное условие не удовлетворяется в точках, не принадлежащих этой оси, и, соответственно, для этих точек амплитуда волны стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$.

Пример 2: интенсивность позади кругового отверстия

Рассмотрим теперь экран с круговым отверстием и поведение волны вдоль его оси ρ (рис. 6.14, *б*). Придерживаясь предположений и обозначений предыдущего примера, вместо выражения (6.298) получим

$$i\lambda U(\rho) = 2\pi A\rho \int_{\rho}^{\sqrt{a^2+\rho^2}} e^{2ikr} \frac{dr}{r^2}. \quad (6.301)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что получившийся член, содержащий интеграл, стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$, имеем

$$i\lambda U(\rho) = \frac{2\pi A\rho}{2ik} \frac{e^{2ikr}}{r^2} \Big|_{\rho}^{\sqrt{a^2+\rho^2}}$$

или

$$U(\rho) = \frac{A\rho}{2} \left[\frac{e^{2ik\rho}}{\rho^2} - \frac{e^{2ik\sqrt{a^2+\rho^2}}}{a^2 + \rho^2} \right] = \frac{Ae^{2ik\rho}}{2\rho} \left[1 - \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2} e^{2ik(\sqrt{a^2+\rho^2}-\rho)} \right]. \quad (6.302)$$

Предположим, что точки наблюдения расположены на достаточно больших расстояниях от отверстия:

$$\rho \gg a.$$

Тогда, используя приближенные формулы

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2} \approx 1, \quad \sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho \approx \frac{a^2}{2\rho},$$

запишем выражение (6.302) в виде

$$U(\rho) = \frac{A}{2\rho} e^{2ik\rho} \left(1 - e^{2ik\frac{a^2}{\rho}} \right) = -i \frac{A}{\rho} e^{2ik\rho} e^{ik\frac{a^2}{2\rho}} \sin \frac{ka^2}{2\rho}. \quad (6.303)$$

Снова вводя функцию интенсивности I , находим, что

$$\frac{I}{I_0} \sin^2 \left(\frac{ka^2}{2\rho} \right), \quad (6.304)$$

где

$$I_0 = \frac{A^2}{a^2 + \rho^2} \approx \frac{A^2}{\rho^2}.$$

По мере увеличения расстояния ρ отношение I/I_0 образует систему максимумов и минимумов, причем вначале расстояние между ними увеличивается с увеличением ρ (рис. 6.14, *в*). Все максимумы имеют одинаковую амплитуду, равную единице, а все минимумы равны нулю. Для относительно больших расстояний, когда $2\rho > ka^2$, функция I/I_0 постепенно стремится к нулю.

В данном примере источник и точки наблюдения лежат на оси ρ , и между ними нет никакого экрана. Естественно ожидать поэтому, что в пределе $\lambda \rightarrow 0$ амплитуда волны будет отличаться от нуля во всех точках оси ρ . Однако, как следует из выражения (6.304), вместо этого наблюдается большое число точек, в которых волна отсутствует. Более того, с увеличением расстояния ρ интенсивность волны становится значительно меньше I_0 .

В противоположном случае, когда между источником и приемником находится круговой экран, интенсивность стремится к I_0 при $\rho \rightarrow \infty$. Конечно, поведение волновых полей в обоих случаях достаточно парадоксальное. Интересно также заметить следующее. В присутствии отверстия картина дифракции Фраунгофера на плоскости $\rho = \text{const}$ предполагает, что максимум интенсивности должен наблюдаться в точках на оси ρ . Следовательно, данное приближение применимо только в том случае, когда отношение I/I_0 , задаваемое равенством (6.304), монотонно уменьшается.

До сих пор мы предполагали, что точки ρ и ρ_1 расположены на перпендикуляре к экрану. Теперь представим себе более общую ситуацию (рис. 6.14, *в*), и снова построим семейство эллипсоидов. Очевидно, что

$$r_x = \rho \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2}} \text{ и } r_{1x} = \rho_1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}}.$$

Поскольку

$$\frac{x}{\rho} \ll 1 \text{ и } \frac{x}{\rho_1} \ll 1,$$

приведенные выше выражения можно представить как

$$r_x \approx \rho \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho^2} \right), \quad r_{1x} \approx \rho_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho_1^2} \right)$$

и, соответственно,

$$r_x + r_{1x} \approx \rho + \rho_1 + m,$$

где, как и ранее,

$$m = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{x^2}{2}.$$

Последнюю величину можно рассматривать как параметр системы эллипсов, сформированных в результате пересечения эллипсоида вращения с плоскостью экрана.

Площадь элементарного кольца сечения эллипсоида

$$dS_r = 2\pi x dx.$$

Конечно, существует корреляция между этой площадью и проекцией на отверстие dS_e , которое является эллиптической полосой, т.е.

$$dS_e = f_1 dS_r = f dm,$$

где f – некоторый коэффициент пропорциональности.

Таким образом, мы представили площадку интегрирования в виде системы эллиптических полос, каждая из которых характеризуется параметрами m и $f(m)$.

Используя данный подход, снова приходим к выражению (6.291), которое позволяет получить такой же результат, как и в предыдущем случае.

Мы продемонстрировали переход от волновой к геометрической акустике на относительно простой модели экрана, помещенного в однородную среду. В дальнейшем мы остановимся на более общих моделях среды и будем использовать формулы, описывающие волновые поля.

6.9. УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА И УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Как мы знаем из изучения волн в однородной среде, их поведение в волновой зоне можно описать следующим образом:

$$A(R, k) e^{ikR}. \quad (6.305)$$

Иными словами, амплитуда волны зависит, в общем случае, от расстояния R , а поведение фазы определяется экспоненциальным членом e^{ikR} .

С уменьшением длины волны λ ближняя и промежуточная зоны занимают относительно меньший объем вокруг источника, и в пределе $\lambda \rightarrow 0$ практически всюду наблюдается волновая зона.

Предположим теперь, что среда неоднородна и скорость распространения c является непрерывной функцией пространственных координат. Легко увидеть, что в этом случае комплексная амплитуда потенциала U также удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad (6.306)$$

а волновое число

$$k = \omega/c$$

является функцией координат точки. Действительно, из первого основного уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\text{grad } P$$

и соотношения

$$s = \text{grad } U$$

имеем

$$P = -\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

при условии, что плотность является постоянной. Тогда второе уравнение

$$\text{div } s = -\frac{1}{c^2 \rho} P$$

дает

$$\text{div grad } U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

или

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Соответственно, в частотной области мы приходим к уравнению (6.306).

Полагая, что длина волны стремится к нулю, т.е. $k \rightarrow \infty$, мы будем искать асимптотическое решение уравнения (6.306). Поскольку расстояния от источника при этом становятся значительно больше длины волны, представляется естественным, по аналогии со случаем однородной среды, представить искомое решение в виде

$$U = A e^{ik_0 S(\mathbf{R})}, \quad (6.307)$$

где k_0 – значение волнового числа в некоторой точке среды; A – амплитуда; S – функция, называемая эйконалом; \mathbf{R} – радиус-вектор.

Так как $k_0 \rightarrow \infty$, скалярный потенциал U является быстро изменяющейся функцией пространственных координат. Однако амплитуда A и эйконал S изменяются от точки к точке относительно медленно и не стремятся к бесконечности при $k_0 \rightarrow \infty$.

Из определения (6.307) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 A \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S}$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 \frac{\partial S}{\partial x} U. \quad (6.308)$$

Соответственно, вторая производная записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{ik_0 S} + ik_0 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} U + \\ &+ ik_0 \frac{\partial S}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 A \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} \right). \end{aligned} \quad (6.309)$$

Поскольку $k_0 \rightarrow \infty$, первым членом в правой части этого выражения можно пренебречь. В результате получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 U \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - k_0^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 U$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k_0^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 U + 2ik_0 U \left(\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \log A}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right).$$

Аналогично записываются выражения для вторых производных $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ и

$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, и мы приходим к следующему выражению для лапласиана $\nabla^2 U$:

$$\nabla^2 U = -k_0^2 U D(S) + 2ik_0 U \left(\text{grad } S \cdot \text{grad } \log A + \frac{1}{2} \nabla^2 S \right), \quad (6.310)$$

где

$$D(S) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \quad (6.311)$$

и

$$\nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \quad (6.312)$$

Следовательно, в любой точке с координатами x, y, z уравнение Гельмгольца можно приближенно заменить следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U + k^2 U &= -k_0^2 U \left[D(S) - \frac{k^2}{k_0^2} \right] + \\ &+ 2ik_0^2 U \left(\text{grad } S \cdot \text{grad } \log A + \frac{1}{2} \nabla^2 S \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.313)$$

Это уравнение будет выполняться, если функции A и S подчиняются следующим двум условиям:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2, \quad (6.314)$$

где

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{c_0}{c} \quad (6.315)$$

является показателем преломления, и

$$\text{grad } S \cdot \text{grad } \log A = -\frac{\nabla^2 S}{2}. \quad (6.316)$$

Дифференциальное уравнение эйконала (6.314) является неоднородным уравнением первого порядка и второй степени.

Как только решение этого уравнения $S(x, y, z)$ становится известным, мы можем определить функции $\text{grad } S$ и $\nabla^2 S$. После этого амплитуду A можно определить из уравнения (6.316), которое называется уравнением переноса.

Левая часть (6.316) представляет собой скалярное произведение двух векторов: ∇S и $\nabla \log A$, зависящее от $\nabla \log A$ только в направлении градиента S . Это означает, что данное уравнение описывает поведение волн даже в том случае, когда амплитуда A является разрывной функцией в направлении, ортогональном вектору $\text{grad } S$.

Согласно определению (6.307), равенство

$$S(x, y, z) = \text{const} \quad (6.317)$$

характеризует поверхности постоянной фазы, т.е. волновые поверхности. Единичный вектор нормали \mathbf{n}_0 к такой поверхности определяется градиентом S :

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\text{grad } S}{|\text{grad } S|} \quad (6.318)$$

и задает направление прямой (луча), ортогональное поверхности эйконала. Очевидно, что в общем случае направление \mathbf{r}_1 изменяется и, соответственно, лучи изгибаются. В неоднородной среде интегрирование уравнения эйконала – это наиболее естественный способ определения направления указанных лучей и положения фазовых поверхностей. Так, например, согласно равенству (6.315), в однородной среде $n = \text{const}$ и простейшим решением уравнения (6.314) является линейная функция

$$S = n(\alpha x + \beta y + \gamma z). \quad (6.319)$$

Подстановка последнего выражения в (6.314) дает

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (6.320)$$

Функция $S(x, y, z)$ содержит две произвольные постоянные; она описывает плоскости, а лучи в этом случае являются прямыми линиями, которые задаются уравнением

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dz}{\beta} = \frac{dy}{\gamma}. \quad (6.321)$$

Эти соотношения следуют из того, что смещение $d\mathbf{l}$ вдоль луча

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

и градиент S

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{k} = n(\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k})$$

параллельны друг другу.

Поскольку S – линейная функция, из (6.316) получаем

$$\nabla S \cdot \nabla \log A = 0, \quad (6.322)$$

т.е. функция $\log A$ и, следовательно, A могут изменяться только вдоль фазовой поверхности, хотя этого изменения может и не быть. В случае однородной плоской волны амплитуда A постоянна и уравнение (6.322) удовлетворяется автоматически.

Если элементарный источник порождает сферическую волну, то решением уравнения (6.314) является функция

$$S = nR, \quad (6.323)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{nx}{R}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{ny}{R}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{nz}{R}$$

и

$$\text{grad } S = \frac{n\mathbf{R}}{R} = n\mathbf{R}_0.$$

Аналогично, простейшее решение уравнения эйконала в двумерном случае (цилиндрическая волна) есть

$$S = nr \text{ и } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, мы описали метод, основанный на решении уравнения эйконала и уравнения переноса, позволяющий определить поверхности постоянной фазы и амплитуды волн в произвольной среде при $\lambda \rightarrow 0$.

ОБЛАСТЬ, В КОТОРОЙ УРАВНЕНИЯ (6.314) И (6.316) ОСТАЮТСЯ СПРАВЕДЛИВЫМИ

Полезно определить условия, при которых уравнение эйконала и уравнение переноса можно использовать вместо волнового уравнения с приемлемой точностью.

Для решения этой задачи вернемся снова к определению (6.307) и уравнению Гельмгольца:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ik_0 S(\mathbf{r})} \quad (6.324)$$

и

$$\nabla^2 U + k_0^2 n^2 U = 0,$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Поскольку мы рассматриваем случай малых длин волн λ , естественно предположить, что относительное изменение показателя преломления n в рассматриваемом диапазоне длин волн мало:

$$\Lambda |\nabla n| \ll n, \quad (6.325)$$

где

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (6.326)$$

а $|\nabla n|$ – абсолютная величина градиента, т.е. максимальная производная, n .

Таким образом, неравенство (6.325) показывает, что максимальное изменение n

$$\Lambda |\nabla n|$$

на интервале $\lambda/2\pi$ незначительно по сравнению с самим n .

Заметим, что по определению

$$k = nk_0 \text{ или } \frac{1}{c} = n \frac{1}{c_0},$$

и $\text{grad } n$ характеризует изменение скорости $c(\mathbf{r})$.

По аналогии с предположением (6.325) можно ожидать, что амплитуда $\varphi(\eta)$ также мало меняется на рассматриваемом интервале и

$$\Lambda |\nabla A| \ll A. \quad (6.327)$$

Неравенства (6.325) и (6.327) удобно представить в виде

$$\Lambda \ll \frac{n}{|\nabla n|} = L_1 \text{ и } \Lambda \ll \frac{A}{|\nabla A|} = L_2.$$

Здесь L_1 и L_2 называются характеристическими длинами данной задачи, а их значения могут изменяться от точки к точке. В частности, с уменьшением $\text{grad } n$ значение L_1 становится больше.

Рассмотрим поведение показателя преломления n на интервале L_1 и предположим, что он меняется на этом интервале почти линейно. Тогда мы можем записать

$$n(\mathbf{r} + \mathbf{L}_1) - n(\mathbf{r}) \approx \mathbf{L}_1 \cdot \text{grad } n$$

или

$$|n(\mathbf{r} + \mathbf{L}_1) - n(\mathbf{r})| \approx L_1 |\nabla n|.$$

Здесь \mathbf{L}_1 обозначает произвольно ориентированный вектор, длина которого равняется L_1 . В то же время из равенств (6.328) следует, что

$$n(\mathbf{r}) = |\nabla n| L_1.$$

Сравнение двух последних соотношений показывает, что

$$|n(\mathbf{r} + \mathbf{L}_1) - n(\mathbf{r})| \approx n(\mathbf{r}), \quad (6.329)$$

т.е. изменение n вдоль \mathbf{L}_1 сравнимо по величине с самим n .

По аналогии, имеем

$$|A(\mathbf{r} + \mathbf{L}_2) - A(\mathbf{r})| \approx |A(\mathbf{r})|. \quad (6.330)$$

Вектор \mathbf{L}_2 также имеет произвольную ориентацию, а его длина равняется L_2 . Очевидно, что неравенства (6.328) можно переписать как

$$\frac{L_1}{\Lambda} \gg 1 \text{ и } \frac{L_2}{\Lambda} \gg 1. \quad (6.331)$$

Эти неравенства показывают, что характеристические длины значительно превышают величину Λ .

Выбирая минимальное из двух значений L_1 и L_2 :

$$L = \min(L_1, L_2),$$

вместо неравенств (6.331) имеем

$$L \gg \Lambda$$

или

$$\frac{\Lambda}{L} = \frac{1}{kL} = \frac{1}{k_0 n L} \ll 1. \quad (6.332)$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В СТЕПЕННОЙ РЯД

Покажем теперь, что решение уравнения Гельмгольца можно представить в виде ряда по степеням Λ/L , первый и второй члены которого соответствуют уравнению эйконала и уравнению переноса. Более того, как будет показано, вклад последующих членов этого ряда относительно мал, если $\Lambda/L \ll 1$, т.е. показатель преломления мало изменяется на расстоянии, равном длине волны.

С физической точки зрения, это должно означать, что поведение волны корректно описывается в рамках геометрической акустики, если выполняются условия (6.328). Чтобы удостовериться в этом, введем новые переменные:

$$x_1 = x/L, \quad y_1 = y/L, \quad z_1 = z/L$$

или

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}/L, \quad (6.333)$$

т.е. координаты точки наблюдения нормируются на характеристическую длину L .

Очевидно, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial U}{\partial x_1}$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2}.$$

Таким образом, получаем

$$\nabla^2 U = \frac{1}{L^2} \nabla_1^2 U, \quad (6.334)$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}.$$

Уравнение Гельмгольца записывается как

$$\nabla_1^2 U(\mathbf{r}_1) + k_0^2 L^2 n^2 U(\mathbf{r}_1) = 0$$

или

$$\nabla_1^2 U(\mathbf{r}_1) + \frac{n^2}{\mu^2} U(\mathbf{r}_1) = 0, \quad (6.335)$$

где

$$\mu = \frac{1}{k_0 L} = \frac{\Lambda_0}{L} \quad (6.336)$$

является малым параметром.

Из равенства (6.333) следует, что

$$\nabla_1 n = L \nabla n \text{ и } \nabla_1 A = L \nabla A \quad (6.337)$$

и, используя (6.328), мы получаем

$$L \approx \frac{n}{|\nabla n|} = \frac{nL}{|\nabla_1 n|} \text{ и } L \approx \frac{|A|}{|\nabla A|} = \frac{|A|L}{|\nabla_1 A|}$$

или

$$\nabla_1 n \approx n \text{ и } |\nabla_1 A| \approx |A|. \quad (6.338)$$

Таким образом, в новой системе координат x_1, y_1, z_1 скорость изменения показателя преломления n и амплитуды A сравнима по величине с значениями этих величин, которые обычно близки к единице.

Фазу в уравнении (6.324) целесообразно записать как

$$k_0 S(\mathbf{r}) = k_0 L \frac{S_1(\mathbf{r}/L)}{L} = \frac{S_1(\mathbf{r}_1)}{\mu}.$$

Функция $S_1(\mathbf{r}_1)$ меняется относительно медленно, т.е.

$$|\nabla_1 S_1(\mathbf{r}_1)| \leq 1.$$

Таким образом, скалярный потенциал U записывается в следующем виде:

$$U(\mathbf{r}_1) = A(\mathbf{r}_1) e^{i \frac{S_1(\mathbf{r}_1)}{\mu}}. \quad (6.339)$$

Учитывая уравнение (6.334), соотношения

$$k_0 \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\mu L} \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \quad k_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu L^2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2},$$

а также формулу (6.309), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = & \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} e^{i \frac{S_1}{\mu}} + \frac{i}{L^2 \mu} \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} e^{i \frac{S_1}{\mu}} + \frac{i A}{L^2 \mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2} e^{i \frac{S_1}{\mu}} + \\ & + \frac{i}{L^2 \mu} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i \frac{S_1}{\mu}} + A \frac{i}{\mu} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} e^{i \frac{S_1}{\mu}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда уравнение Гельмгольца записывается как

$$\begin{aligned} \nabla^2 U + k^2 U = & \frac{1}{L^2} \left[\nabla_1^2 A + \frac{i}{\mu} \nabla_1 A \cdot \nabla_1 S_1 + \frac{i A}{\mu} \nabla_1^2 S_1 + \frac{i}{\mu} \nabla_1 S_1 \cdot \nabla_1 A - \right. \\ & \left. - \frac{A}{\mu^2} (\nabla_1 S_1)^2 \right] e^{i \frac{S_1}{\mu}} + k_0^2 n^2 A e^{i \frac{S_1}{\mu}} = 0. \end{aligned}$$

Умножая последнее выражение на L^2 и учитывая, что

$$\mu = 1/k_0 L,$$

получим

$$[n^2 - (\nabla_1 S_1)^2] \frac{A}{\mu^2} e^{i \frac{S_1}{\mu}} + \frac{i}{\mu} [2 \nabla_1 A \cdot \nabla_1 S_1 + A \nabla_1^2 S_1] e^{i \frac{S_1}{\mu}} + \nabla_1^2 A e^{i \frac{S_1}{\mu}} = 0. \quad (6.340)$$

Представим теперь амплитуду A в виде ряда по степеням μ :

$$U(\mathbf{r}_1) = e^{i \frac{S_1}{\mu}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{i} \right)^m A_m(\mathbf{r}_1), \quad (6.341)$$

где множитель $(1/i)^m$ введен для упрощения алгебраических преобразований.

Подставляя (6.341) в (6.340) и приравнявая отдельно действительные и мнимые члены с одинаковыми степенями μ , получим

$$\begin{aligned} (\mu^{-2}) \quad & (\nabla_1 S_1)^2 = n^2, \\ (\mu^{-1}) \quad & 2(\nabla_1 A_0 \cdot \nabla_1 S_1) + A_0 \nabla_1^2 S_1 = 0, \\ (\mu^0) \quad & 2(\nabla_1 A_1 \cdot \nabla_1 S_1) + A_1 \nabla_1^2 S_1 = -\nabla_1^2 A_0, \\ \dots \quad & \dots \quad \dots \\ (\mu^{m-1}) \quad & 2(\nabla_1 A_m \cdot \nabla_1 S_1) + A_m \nabla_1^2 S_1 = -\nabla_1^2 A_{m-1}. \end{aligned} \quad (6.342)$$

Возвращаясь к исходной системе координат, имеем

$$(\nabla S)^2 = n^2,$$

$$2(\nabla A_0 \cdot \nabla S_1) + A_0 \nabla^2 S = 0,$$

$$2(\nabla A_1 \cdot \nabla S) + A_1 \nabla^2 S = -L \nabla^2 A_0,$$

...

...

Из формул (6.342) следует, что первые два приведенных уравнения являются уравнением эйконала и уравнением переноса, а вклад остальных членов мал, поскольку $\mu \ll 1$.

Следует заметить, что малость μ обеспечивается как уменьшением длины волны, так и увеличением L , что соответствует более плавному изменению n . Таким образом, мы показали, что поведение волн описывается законами геометрической акустики, если выполняются условия

$$L|\nabla n| \ll n \text{ и } L|\nabla \ddot{A}| \ll A. \quad (6.343)$$

Ранее мы рассматривали дифракцию в однородной среде позади экрана, где неравенства (6.343) не выполнялись вблизи края отверстия практически при любой длине волны. Несмотря на это, с уменьшением λ влияние дифракции становится меньше, и энергия распространяется от источника к точкам наблюдения вдоль прямых линий. Однако существуют такие случаи, когда этого перехода не происходит.

Согласно (6.324), в рассматриваемом приближении волна ведет себя как плоская. Заметим, что потенциал U можно представить как

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{i\text{tot}(\mathbf{r})}.$$

Тогда, выполняя ту же процедуру, что и ранее, мы получим уравнения для времени τ и амплитуды A . Таким образом, при описании геометрической акустики, мы можем иметь дело как с уравнением эйконала, так и с временными полями. Конечно, оба этих подхода являются эквивалентными.

Пример: плоская волна в вертикально неоднородной среде

Чтобы проиллюстрировать сделанные нами выкладки, рассмотрим относительно простой пример, в котором плоская волна распространяется вдоль оси z , а параметры среды зависят только от этой координаты. В этом случае решение уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 U + k^2(z)U = 0 \quad (6.344)$$

хорошо известно и записывается как

$$U = A e^{\pm ikz}, \quad (6.345)$$

где A и k – константы.

Предположим далее, что длина волны λ настолько мала, что волновое число $k(z)$ практически не меняется на расстоянии λ , т.е.

$$\frac{k(z + \lambda) - k(z)}{k(z)} \ll 1.$$

Это позволяет представить решение уравнения Гельмгольца в виде, аналогичном тому, который получается для однородной среды:

$$U = A(z)e^{i\varphi(z)}. \quad (6.346)$$

Поскольку в однородной среде $A = \text{const}$ и $\partial\varphi/\partial z = k = \text{const}$, будем считать, что вариации этих функций малы в масштабе длины волны λ . Беря первые и вторые производные от U , получим

$$U' = A'e^{i\varphi} + Ai\varphi'e^{i\varphi} = (A' + A\varphi')e^{i\varphi}$$

и

$$\begin{aligned} U'' &= (A'' + iA'\varphi' + iA\varphi'')e^{i\varphi} + [iA'\varphi' - (\varphi')^2A]e^{i\varphi} = \\ &= [A'' + 2iA'\varphi' + iA\varphi'' - A(\varphi')^2]e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (6.344) запишется как

$$A'' + 2iA'\varphi' + iA\varphi'' + [k^2(z) - (\varphi')^2]A = 0. \quad (6.347)$$

Попытаемся теперь найти приближенное решение этого уравнения. Обозначим через L расстояние, на котором вариации $A(z)$ и $\varphi(z)$ являются еще значимыми. Очевидно, что

$$L \gg \lambda.$$

Данное неравенство указывает на то, что члены уравнения (6.347) имеют различный порядок малости. Покажем это, используя следующие равенства:

$$f'(x) \approx \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \sim \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

если

$$f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \gg f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Соответственно,

$$f''(x) \approx f(x)/(\Delta x)^2.$$

Таким образом, можно записать

$$A' \sim A/L, A'' \sim A/L^2, \varphi'' \sim \varphi'/L. \quad (6.348)$$

Оценка членов в (6.347) дает

$$A'' \sim A/L^2,$$

$$2i\varphi'A' + i\varphi''A \sim \varphi'A/L$$

и

$$[k^2(z) - (\varphi')^2]A \sim A/\lambda^2$$

в силу соотношения

$$\varphi' \sim 1/\lambda \approx k.$$

Это следует из предположения о том, что фаза $\varphi(z)$ изменяется почти так же, как и в случае однородной среды.

Поскольку слагаемые в уравнении (6.347) имеют различный порядок, каждое из них должно равняться нулю, чтобы удовлетворить этому уравнению. Помимо этого, мы пренебрежем первым членом, в силу его малости.

Таким образом, получаем два уравнения:

$$(\varphi')^2 = k^2(z) \quad (6.349)$$

и

$$2\varphi'A' + \varphi''A = 0. \quad (6.350)$$

Решением уравнения (6.349) является функция

$$\varphi' = \pm k(z)$$

и, соответственно,

$$\varphi(z) = \pm \int_{z_0}^z k(\xi) d\xi. \quad (6.351)$$

В действительности мы решили таким образом уравнение эйконала.

Второе уравнение записывается теперь как

$$\frac{A'}{A} = \frac{\varphi''}{2\varphi'} = -\frac{k'(z)}{2k(z)}. \quad (6.352)$$

Его решением является функция

$$A(z) = C/\sqrt{k(z)}, \quad (6.353)$$

где C – некоторая константа.

Подставляя (6.351) и (6.353) в (6.346), получим

$$U = \frac{1}{\sqrt{k(z)}} \left[C_1 e^{i \int_{z_0}^z k(\xi) d\xi} + C_2 e^{-i \int_{z_0}^z k(\xi) d\xi} \right]. \quad (6.354)$$

Последнее выражение называется приближением геометрической акустики или, иначе, приближенным решением Венцеля – Крамера – Брюллюэна (ВКБ). Следует заметить, что интеграл

$$\int_{z_0}^z k(\xi) d\xi$$

характеризует изменение фазы между точками z_0 и z .

Из физических соображений очевидно, что среднее значение потока энергии не должно зависеть от z . Докажем это утверждение.

Потенциал U определяется как

$$U(z) = \frac{C}{\sqrt{k(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)].$$

Таким образом,

$$S_z = -\frac{Ck'(z)}{2\sqrt{k^3(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)] + \frac{C\varphi'(z)}{\sqrt{k(z)}} \sin[\omega t - \varphi(z)].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{Ck'(z)\omega}{2\sqrt{k^3(z)}} \sin[\omega t - \varphi(z)] + \frac{C\varphi'(z)\omega}{\sqrt{k(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)] = \\ &= \frac{Ck'(z)\omega}{2\sqrt{k^3(z)}} \sin[\omega t - \varphi(z)] + C\omega\sqrt{k(z)} \cos[\omega t - \varphi(z)]. \end{aligned}$$

В то же время давление задается формулой

$$P = \frac{C\rho_0\omega^2}{\sqrt{k(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)].$$

Следовательно, среднее значение потока энергии через единичную поверхность, перпендикулярную оси Z , за один период равняется

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T P v_z dt = \frac{1}{2} C^2 \rho_0 \omega^3.$$