

Государственный комитет Российской Федерации  
по высшему образованию  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

А.П. Шашкин

**ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ**

Моделирование газодинамических течений

Учебное пособие

для студентов 3 -4 курсов ФЛА гидрогазодинамических специальностей

Новосибирск

2001

629.7.015: 533.6

Настоящее пособие, посвящено изложению основ прикладной газодинамики и создано на базе курса лекций автора по прикладной газодинамике, читаемых в НГТУ по специальности аэрогидромеханика на факультете летательных аппаратов. Основная направленность материала – методы построения приближенных моделей, невязкие и сверхзвуковые течения.

Задачей пособия является:

– проследить логику построения математической модели гидрогазодинамики и получения на ее основе общих уравнений;

– показать, что уравнения прикладной газодинамики являются следствием упрощения общих моделей и дать представление о способах получения этих уравнений;

Из-за ограниченности объема пособия материал изложен так, что в нем нет подробных выкладок. Даны лишь алгоритмы выводов и опорные формулы, которые позволяют читателю легко пройти весь путь получения окончательного результата. Формулы, вывод которых хорошо изложен в распространенных учебных изданиях, сопровождаются только ссылками на эти издания. Некоторые фрагменты материала, особенно важные, по мнению автора, для понимания, в пособии изложены подробно.

Настоящее пособие может быть полезным студентам и аспирантам по специальности газодинамика, а также научным работникам и инженерам, интересующимся вопросами газодинамики.

Составил            доц., к.ф. - м.н. А.П. Шашкин,

Рецензенты:        проф., д.ф.-м.н В.И. Меркулов

                          доц., к.ф.-м.н. Т.А. Коротаева

Работа подготовлена на кафедре аэрогидродинамики ФЛА

© Новосибирский государственный технический университет, 2001.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
<b>Глава 1. МЕТОДЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ.....</b>	<b>14</b>
(Основные понятия) .....	14
1.1 Основные символы оценок.....	15
1.2 Регулярные и сингулярные возмущения .....	17
1.3. Рациональные и иррациональные приближения .....	21
1.4 Численные методы - пример рациональных приближений .....	22
1.5 Пример исследования двумерного течения в плоском канале.....	24
<b>Глава 2 ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА .....</b>	<b>27</b>
2.1 Применение осредненных уравнений .....	27
2.2. Использование подобия в гидрогазодинамике .....	32
2.3 Обтекание тонких тел потенциальным потоком.....	38
<b>Глава 3. РАЗРЫВЫ В СОВЕРШЕННОМ ГАЗЕ.....</b>	<b>42</b>
3.1 Поверхности разрыва.....	42
3.2 Прямой скачок уплотнения. ....	44
3.3 Косой скачок уплотнения.....	49
<b>Глава 4. ОДНОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....</b>	<b>56</b>
4.1 Уравнения течения газа в одномерных каналах .....	56
4.2 Основные формулы изоэнтропического течения. ....	57
4.3 Поток в канале переменного сечения.....	59

4.4 Движение с подогревом газа.....	61
<b>Глава 5. ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА.....</b>	<b>65</b>
5.1 Уравнения движения.....	65
5.2 Инварианты Римана. Волны в газе.....	66
5.3 Элементарная теория ударной трубы.....	70
5.4 Метод характеристик.....	72
<b>Глава 6. ПЛОСКИЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ.....</b>	<b>77</b>
6.1 Характеристики в плоском сверхзвуковом течении.....	77
6.2 Метод характеристик.....	80
6.3 Обтекание сверхзвуковым равномерным потоком выпуклого угла (течение Прандтля - Майера).....	82
<b>Глава 7 ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ.....</b>	<b>85</b>
7.1 Предельные формулы совершенного газа при $M \rightarrow \infty$ . Изэнтропические формулы.....	86
7.2 Метод Ньютона.....	89

## ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика - наука, изучающая законы движения несжимаемой и сжимаемой жидкости (газа). Развитие этой науки проходило как решение проблем, связанных с определением силы сопротивления, оказываемого жидкой (газообразной) средой движущемуся в ней телу. Не останавливаясь подробно на истории гидродинамики отметим некоторые этапы развития этой науки. Первые успехи теории сопротивления, относящиеся к XVII в., были достигнуты благодаря изучению закона падения тел и движения маятника, который служил в то время инструментом для измерения времени. На основе своих опытов Галилей впервые показал, что сопротивление, испытываемое телом, движущимся в жидкой среде, возрастает с увеличением плотности среды и скорости движения. Количественную оценку величины сопротивления Галилей не произвел. В конце XVII и начале XVIII в. в изучение проблемы сопротивления большой вклад внес Исаак Ньютон. Исследуя движение шара в различных средах, Ньютон установил, что сопротивление шара  $R$  пропорционально плотности среды  $\rho$ , квадрату скорости движения  $v$  и площади сечения  $S$ . Таким образом, был открыт основной закон сопротивления:  $R = C\rho v^2 S$ , при этом для шара  $C = 0.5$ . В своих теоретических работах Ньютон особенно подробно исследовал движение гипотетической жидкости, состоящей из дискретных частиц. Применительно к ней Ньютон создал так называемую ударную теорию сопротивления пластинки, движущейся под некоторым углом атаки. Применяя теорему о количестве движения, он определил величину силы сопротивления. Ньютон полагал, что масса жидкости, набегающей за единицу времени на

пластинку площадью  $S$  под углом атаки  $\alpha$  равна  $\rho S v \sin(\alpha)$ , а нормальная составляющая скорости частиц жидкости к пластине, равная  $v \sin(\alpha)$ , полностью теряется при ударе жидкости об эту пластину. Ньютон получил следующую формулу для силы сопротивления  $R$ , нормальной к поверхности пластины:  $R = \rho S v^2 \sin^2(\alpha)$ . Величина подъемной силы крыла, полученная в соответствии с полученной формулой, была настолько мала, что долгое время этот факт приводился в качестве доказательства неосуществимости полета аппаратов тяжелее воздуха.

В настоящее время при макроскопическом выводе уравнений движения жидкости выделяется элементарный объем, к которому приложены поверхностные и объемные силы, и используется второй закон Ньютона для вычисления его ускорения. При этом в основе системы аксиом Ньютона лежит базисный эксперимент по соударению двух точечных масс, моделирующийся упругим соударением двух шаров [19]. Для жидкостей и газов такого базисного эксперимента нет. Хотя сам И.Ньютон в работе «Математические начала натуральной философии» отмечал «Жидкость есть такое тело, коего части уступают всякой как бы то ни было приложенной силе и, уступая, свободно движутся друг относительно друга», уравнения движения жидкости и газа, в основу которых положены законы сохранения Ньютона, позволили в значительной степени изучить многие явления природы, достичь технического прогресса и, что немаловажно, дать толчок в развитии многих важных разделов математики.

В XVIII в. учение о сопротивлении стимулировалось главным образом развитием мореплавания, гидроэнергетики и артиллерии. Развитие мореходства выдви-

нуло задачу об определении сопротивления корабля, что заставило ученых более детально заняться вопросами обтекания. В 1763 г. капитан французского флота Борда провел многочисленные опыты по определению сопротивления различных тел в воздухе и в воде. Борда подтвердил квадратичный закон сопротивления Ньютона и одновременно, в чем его огромная заслуга, показал, что ударная теория Ньютона дает слишком заниженные значения подъемной силы. В результате чего вновь возродился интерес к проблеме создания летательных аппаратов тяжелее воздуха.

С середины XVIII в. развернулись теоретические исследования по изучению движения жидкости, положившие начало теоретической гидродинамике. Честь ее создания принадлежит Российской Академии наук в лице Леонарда Эйлера и Даниила Бернулли. В труде «Общие принципы движения жидкостей» Л. Эйлер впервые вывел основные дифференциальные уравнения движения так называемой «идеальной жидкости», положив начало важнейшей отрасли механики сплошной среды - *гидроаэродинамике*. Л. Эйлеру гидроаэродинамика обязана, в частности, введением понятия давления. Д. Бернулли принадлежит открытие фундаментального закона гидродинамики, устанавливающего связь между давлением и скоростью в потоке несжимаемой жидкости, обобщенного ныне для случая сжимаемой жидкости.

Дальнейшее развитие аналитические методы гидродинамики получили в трудах известного французского ученого Лагранжа, давшего новую форму дифферен-

циальных уравнений гидродинамики и разработавшего теорию потенциального движения жидкости.

Как самостоятельная наука теоретическая гидродинамика начала складываться в первой половине XIX в.. Стало формироваться теоретическое направление, цель которого описать поведение жидкости и газов и их взаимодействие с телами путем построения адекватных моделей. Поставленная Даламбером задача о теоретическом определении силы сопротивления тела, обтекаемого потенциальным (безвихревым) потоком идеальной жидкости, привела к неожиданному результату: сила сопротивления оказалась равной нулю. Этот результат носит название парадокса Даламбера. Указанное обстоятельство сыграло роль своеобразного тупика, в котором очутилась теория идеальной жидкости при определении силы сопротивления.

Значительно позже известные немецкие ученые Гельмгольц и Кирхгофф вновь сделали попытку использовать модель идеальной жидкости, предложив совершенно иную модель обтекания со срывом струй. Эта теория позже была развита и усовершенствована в работах Жуковского, Леви-Чивита и Вилля, а далее в работах А.И. Некрасова, Н.С. Аржанникова, Н.А. Слезкина и др.

В начале XIX в. в работах С. Пуассона, Дж. Стокса, Р. Ирншоу были впервые теоретически проанализированы нелинейные эффекты, возникающие при распространении волн давления в сжимаемой среде.

Во второй половине XIX в. в работах Б. Римана, а затем Ж. Адамара нелинейная теория распространения волн в сжимаемой среде была доведена до совершен-

ства. В. Рэнкин и А. Гюгонио заложили основы движения сжимаемых сред с разрывами параметров.

В 1826 г. французский ученый Навье получил впервые дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости, основываясь на ряде физических гипотез. В 1846г. английский гидродинамик Стокс дал строгий вывод этих уравнений, в силу чего они известны как уравнения Навье- Стокса. При феноменологическом выводе уравнений Навье- Стокса, используются два главных допущения:

- а) о тензорном законе вязкого сопротивления, обобщающем закон Ньютона;
- б) о короткодействии внутренних сил в элементарном объеме, которые, следовательно, сводятся к силам поверхностным. При принятом условии компоненты тензора напряжений не зависят от порядка индексов, т.е. тензор напряжений симметричен. При малых числах Рейнольдса это вполне оправдано. Однако турбулентность в потоке опровергает это допущение. Кроме того, по определению - элементарный объем это такой малый объем, в котором сохраняются основные свойства макроскопического процесса и (в газовой динамике) свойство короткодействию сил применимо лишь с оговорками.

Турбулентное течение характеризуется заметным вихревым течением с вихрями самых разных масштабов. Подробный обзор стоящих здесь проблем дан Белоцерковским О.М. в книге [18]. Для практического решения задачи о движении турбулентных течений, как правило, вводится допущение о локальной изотропии механизма турбулентного перемешивания. Изотропия позволила получить все тензоры аналогичные случаю только молекулярной вязкости. Опираясь на аналогию

между ламинарным и осредненным турбулентным течением Ж. Буссинеск (1877) по аналогии с первым предложил формулу для касательного напряжения, похожую на формулу Ньютона,  $\tau_t = A \cdot \frac{d\bar{v}}{dy}$ . Здесь вместо обычной молекулярной вязкости  $\mu$  употребляется коэффициент турбулентной (молярной) вязкости «А» [6]. Величина «А» определяется на основе различных полуэмпирических подходов. Неадекватность модели Буссинеска физическому процессу очевидна. Такой подход не отражает многие свойства турбулентных потоков (с крупномасштабными пульсациями). В частности, не учитывается свойство анизотропии крупномасштабных вихрей. Поэтому аппроксимации величины «А» не могут носить общий характер. Следовательно, внесение дополнительных поправок в такую модель, видимо, только усложняет задачу и не решают проблему в целом. Однако для решения ряда задач этот подход позволяет получить приемлемые результаты. Поэтому теории, построенные на «моделях турбулентности» все еще имеют широкое распространение.

В конце XIX в. при исследовании движений сжимаемых сред стала ясной необходимость использования представлений термодинамики, причем не только ее первого начала, которое выражает закон сохранения энергии, но и второго начала - закона не убывания энтропии в замкнутых адиабатических системах.

С начала XX в. и до середины 30-х годов в теоретической газовой динамике шло накопление фактов, вызванные потребностями практики создавались теории обтекания крыла бесконечного размаха и тел вращения, движения газа в межлопа-

точных каналах турбины и соплах. В связи с ростом интереса к проблемам авиации, т.е. к изучению движения тел в вязкой жидкости с относительно большими скоростями, теория Навье-Стокса значительно продвинулась вперед благодаря работам Л. Прандтля, предложившего в 1904 г. модель пограничного слоя, которая явилась большим вкладом в теорию сопротивления.

Огромная роль в развитии отечественной и мировой аэродинамики принадлежит Н.Е. Жуковскому и С.А. Чаплыгину. Н.Е. Жуковским написан ряд работ, заложивших теоретические основы аэродинамики полета и крыла. Им разработаны методы экспериментальных исследований в аэродинамике. Отличительной особенностью работ С.А. Чаплыгина является общность даваемых им методов, что позволило ему и созданной им школе (А.И. Некрасов, В.В. Голубев, М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев, Л.И. Седов, Ф.И. Франкль, С.А. Христианович и др.) значительно продвинуть вперед разработку проблем современной аэродинамики. В последние годы продолжается стремительное развитие науки о газовой динамике, которая к середине 60-х годов превратилась в разветвленную область знания, составляющую основу ряда направлений естествознания и многих областей современной техники. Под воздействием потребностей газовой динамики происходило и происходит развитие асимптотических методов математики, вычислительной математики, вычислительной техники и др. На фундаменте классической газовой динамики в последние десятилетия интенсивно развиваются ее новые специальные разделы, например физико-химическая газодинамика. Она сама уже представляет совокупность ряда направлений, таких как:

–гиперзвуковая газовая динамика, связанная с изучением полета тел в атмосфере Земли и других планет с очень большой скоростью. Здесь возникает высокая температура потока, обтекающего тело, которая делает необходимым учет химических превращений в газах;

–радиационная газовая динамика, связанная также с гиперзвуковым полетом, с задачами горения газовых смесей, в которых необходимо учитывать процессы переноса лучистой энергии в газах;

–релаксационная газовая динамика, в которой определяющую роль играет неравновесный характер протекающих в газе физико - химических процессов и другие разделы.

В представленном кратком обзоре не нашли своего отражения многие важные моменты развития аэродинамики. В частности, не прослежена история развития теории «вихря» и связанная с ней теория отрыва потока. С подробной историей развития науки можно познакомиться в [5,7,11].

На сегодня наука “газовая динамика” является математически одной из наиболее развитых и строго обоснованных.

Задача прикладной газовой динамики - построение адекватных приближенных математических моделей для решения практически важных частных задач в газовой динамике и изучение поведения газов в этих случаях. При составлении математической модели необходимо стремиться к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса. С другой стороны, математическая модель должна быть достаточно простой для исследования, давать возможность извлечь

из нее доступными средствами необходимую информацию о процессе. Поэтому какими-то факторами, влияние которых на процесс представляется малым, неизбежно приходится пренебрегать и они оказываются не представленными в математической модели процесса. Для уточнения «модели» часто прибегают к замене «неосновных факторов» их интегральной оценкой или «сглаженным» учетом при описании происходящего процесса [17].

### Литература

- 1.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. -М.: Наука, 1986.
- 2.Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. М.: ИФМЛ, 1963. -Т 1,2.
- 3.Седов Л.И. Механика сплошной среды. -М.: Наука, 1983. -Т 1,2.
- 4.Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. -М.: Наука, 1981.
- 5.Аржанников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. -М.: Оборонгиз, 1956.
- 6.Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1987.
- 7.Черный Г.Г. Газовая динамика. -М.: Наука, 1988.
- 8.Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидроаэродинамика. -М.: Энергоатом-издат, 1984.
- 9.Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. -М.: Наука, 1969.
- 10.Дейч М.Е. Техническая газодинамика. -М: Госэнергоиздат, 1961.
- 11.Смирнов Г.Ф. Рожденные вихрем. -М.: Знание, 1982.
- 12.Мхитарян А.М., Ушаков В.В., Баскакова А.Г., Трубенков В.Д., Аэрогидромеханика. -М.: Машиностроение, 1984.
- 13.Бондарев Е.Н., Дубов В.Г., Рыжов Ю.А. и др. Аэрогидромеханика. -М.: Машиностроение, 1993.
- 14.Краснов Н.Ф. Аэродинамика в вопросах и задачах. -М.: Высшая школа, 1985.

15. Бекнев В.С., Епифанов В.М., Круглов М.Г. и др. Сборник задач и упражнений по газовой динамике. -М.: Машиностроение, 1992.
16. Киселев С.П. Сборник задач по теоретической аэрогидромеханике - Новосибирск: Изд-во НГТУ, Новосибирск, 1994
17. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. - М.: Наука, 1975.
18. Белоцерковский О.М. Прямое численное моделирование "переходных течений газа и задач турбулентности" /Кн. Механика турбулентных потоков. Наука, М:
19. Овсянников В.М. Введение в аксиоматическую механику жидкости, основанную на базисных экспериментах с жидкостью //Проблемы аксиоматики в гидродинамике. -М.: вып 4, 1997.

## **Глава 1. МЕТОДЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ**

### **(Основные понятия)**

Представление о частных случаях решений уравнений газовой динамики тесно связано с понятием асимптотического решения при различных предельных переходах в независимых переменных. При изучении модельных процессов естественно поставить вопрос о роли неучтенных факторов: будет ли их влияние на ход процесса несущественным, или, напротив, учет этих факторов, хотя они и кажутся нам незначительными, может существенно изменить ту информацию о процессе, которую мы получаем из математической модели. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно составить расширенную модель, учитывающую малые факторы, опущенные в первоначальной модели, и затем исследовать вопрос о близости решений, полученных из упрощенной и расширенной моделей.

## 1.1 Основные символы оценок

Рассмотрим две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  на множестве  $x \in M$ . Будем использовать следующие общепринятые обозначения:

<i>Формула</i>	<i>Определение</i>
$f(x) = g(x)$	когда значения функций $f(x)$ и $g(x)$ равны
$f(x) \equiv g(x)$	$f(x) = g(x)$ при всех значениях $x$
$f(x) \approx g(x)$	$f(x) = g(x)$ в нужном смысле $x$
$f(x) \sim g(x) \ (x \rightarrow a)$	$f(x)$ одного порядка с $g(x)$ при $(x \rightarrow a)$ т.е. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1;$
$f(x) = o(g(x))$ $(x \rightarrow a)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$
$f(x) = O(g(x))$	Существует постоянная $C$ такая, что $ f(x)  \leq C g(x) $
$f(x) = O(g(x))$ $(x \rightarrow a)$	Существует постоянная $C$ и окрестность $U$ точки $a$ такие, что $ f(x)  \leq C g(x) $ при $x \in M \supset U$ или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C;$

Соотношение  $f(x) = o(g(x)) \ (x \rightarrow a)$  означает, что функция  $f(x)$  бесконечно мала по сравнению с  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$ . Аналогично, соотношение  $f(x) = O(g(x)) \ (x \rightarrow a)$  означает, что функция  $f(x)$  ограничена по сравнению с функцией  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$ . Отсюда легко получить ряд правил действий с символами  $o$  и  $O$ :

$$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$$

Действительно, пусть  $g_1(x) = o(f(x))$  и  $g_2(x) = o(f(x))$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x) + g_2(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0,$$

$$o(f(x)) * o(g(x)) = o(f(x) * g(x));$$

$$o(o(f(x))) = o(f(x)).$$

Аналогично при  $x \rightarrow a$

$$O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x));$$

$$O(f(x)) * O(g(x)) = O(f(x) * g(x));$$

$$O(O(f(x))) = O(f(x)).$$

Имеют место также формулы при  $x \rightarrow a$

$$o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x));$$

$$o(f(x)) * O(g(x)) = o(f(x) * g(x));$$

$$O(o(f(x))) = o(f(x));$$

$$o(O(f(x))) = o(f(x)).$$

Соотношения вида  $f(x) \sim g(x)$ ,  $f(x) = o(g(x))$ ,  $f(x) = O(g(x))$  называются асимптотическими формулами или асимптотическими оценками.

Простые примеры:

$$(x+1)^2 \sim x^2 \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$(x^2 - c^2)/x^2 \sim 2(x-c)/c = O(x-c) = o(1) \quad (x \rightarrow c).$$

## 1.2 Регулярные и сингулярные возмущения

Учет малых факторов в расширенной модели процесса приводит, как правило, к тому, что в расширенной модели по сравнению с первоначальной появляются дополнительные члены с малыми множителями. Эти малые множители называются *малыми параметрами*. Члены уравнения, содержащие малые параметры, называются *возмущением*, исходное уравнение, не содержащее этих членов - *невозмущенным*. Указанные возмущения можно условно разделить на два класса: *регулярные* и *сингулярные*. Под регулярным возмущением понимают такое возмущение, которое приводит к малому изменению решения невозмущенной задачи. В отличие от регулярных возмущений сингулярные возмущения, хотя и являются малыми в каком-то смысле, вызывают существенные изменения решения.

### Пример 1

Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения

$$A_\varepsilon : \frac{du}{dx} = -u + \varepsilon x; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0) = 1.$$

Решение этой задачи находится в явном виде

$$u_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon) \exp(-x) + \varepsilon(x - 1).$$

Соответствующая невозмущенная задача  $A_0$ , получающаяся из задачи  $A_\varepsilon$  при  $\varepsilon=0$ , имеет вид

$$A_0 : \frac{du}{dx} = -u; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0) = 1.$$

Отсюда

$$u_0(x) = \exp(-x).$$

Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\max_{[0,1]} |u_\varepsilon(x) - u_0(x)| = \varepsilon \max_{[0,1]} |\exp(-x) + x - 1| = \varepsilon \exp(-1) \rightarrow 0$$

Значит, задача  $A_\varepsilon$  является регулярно возмущенной.

## Пример 2

Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения, в котором малый параметр  $\varepsilon > 0$  входит множителем при производной:

$$A_\varepsilon : \varepsilon \frac{du}{dx} = -u + x; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0) = 1$$

Решение имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon) \exp(-x/\varepsilon) + x - \varepsilon.$$

Уравнение  $A_0$ , получающееся из  $A_\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ , является в данном случае алгебраическим:

$$A_0 : 0 = -u + x. \quad u_0(x) = x$$

и, следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\max_{[0,1]} |u_\varepsilon(x) - u_0(x)| = \max_{[0,1]} |(1 + \varepsilon) \exp(-x/\varepsilon) - \varepsilon| = 1.$$

Таким образом,  $\max_{[0,1]} |u_\varepsilon(x) - u_0(x)|$  не стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а значит, задача  $A_\varepsilon$  является сингулярно возмущенной. Графики  $u_0(x)$  и  $u_\varepsilon(x)$  при малом  $\varepsilon > 0$  показаны на рис.1.1.

Решение  $u_0(x)$  не является близким при малых  $\varepsilon$  к решению  $u_\varepsilon(x)$  лишь в малой  $\delta$ -окрестности начальной точки, а на отрезке  $[\delta, 1]$  и  $u_0(x)$  близко к  $u_\varepsilon(x)$ .

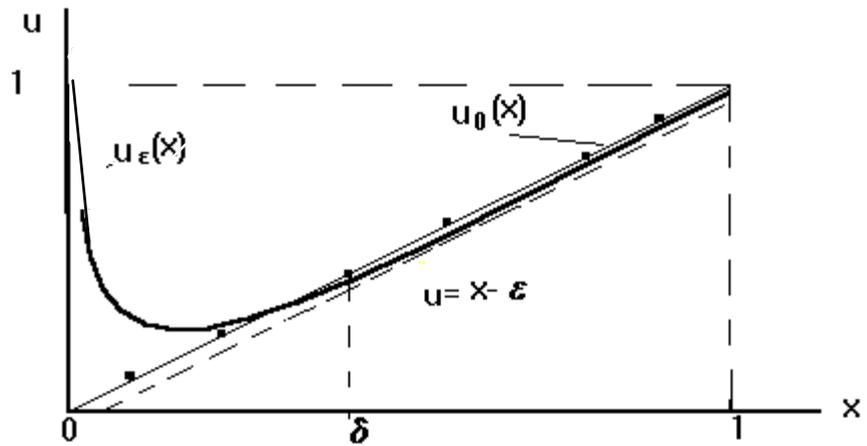


Рис.1. 1

Промежуток  $[0, \delta]$ , на котором происходит быстрое изменение решения  $u_\epsilon(x)$  от начального значения до значений, близких к  $u_0(x)$ , называется *пограничным слоем*.

Дифференциальные уравнения с малым параметром при производных, для решений которых характерно явление пограничного слоя, можно считать типичными представителями сингулярно возмущенных задач. Основной проблемой при этом является построение приближения к решению  $u_\epsilon(x)$ , пригодного как вне пограничного слоя, так и в пограничном слое, то есть, равномерно пригодного во всей области изменения  $x$ .

### Два метода решения сингулярно - возмущенных задач

**Метод сращивания.** Решение разбивается на две части: вне промежутка  $[0, \delta]$  (внешнее решение) и внутри промежутка  $[0, \delta]$  (внутреннее решение). В качестве внешнего решения принимается  $u_0(x)$ . Для определения внутреннего решения вводится замена переменных  $x \rightarrow \bar{x} \equiv \frac{x}{\epsilon}$ . Т.е., рассматривается решение в растя-

нутом интервале, соизмеримым с величиной  $\varepsilon$ . В новых переменных уравнение  $A_\varepsilon$  принимает вид

$$\frac{du}{dx} = -u + \varepsilon x;$$

Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получим  $\frac{du}{dx} = -u$ ; откуда  $u_1 = ce^{-x}$ .

А так как  $u_1(0) = 1$ , то  $u_1(x) = e^{-x}$ .

Окончательно имеем

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_1(x) & 0 \leq x \leq \delta \\ u_0(x) & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Для уравнений более высокого порядка, при наличии свободных констант в  $u_1(x)$  и  $u_0(x)$ , недостающим условием для определения постоянных является условие  $u_1(\delta) = u_0(\delta)$ .

В газовой динамике типичным примером такого сорта будет применение схемы Прандтля (невязкое течение плюс пограничный слой), когда в качестве внешнего решения берется решение уравнения Эйлера, а в качестве внутреннего - решение, полученное из теории пограничного слоя.

**Составные решения.** По предложению Вишика М.И. и Люстерника Л.А. решение сингулярно- возмущенной задачи ищется как составное в виде:

$$u_c(x) = u_0(x) + u_1(x).$$

При этом все значения констант интегрирования определяются не отдельно для  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$ , а для составного решения. Таким образом, в примере 2 в качестве составного решения имеем:

$$u_c(x) = c \cdot \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + x; \quad u_c(0) = 1$$

и, следовательно,  $u_c(x) = \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + x$ .

Отклонение возмущенного решения от составного имеет вид

$$\max_{[0,1]} |u_\varepsilon(x) - u_c(x)| = \varepsilon \max_{[0,1]} |\exp(-x/\varepsilon) - 1| = \varepsilon = 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

### 1.3. Рациональные и иррациональные приближения

Рассмотренные решения возмущенной задачи являются строго математическими представлениями, которые могут быть записаны в виде разложения по малому параметру

$$u_\varepsilon(x) = \sum_i u_i \varepsilon^i.$$

Такие разложения называются *рациональными*. В газовой динамике в них в качестве малого параметра могут быть отклонения параметров по некоторому направлению: число Маха  $M$  при малых скоростях,  $\sqrt{M^2 - 1}$  при трансзвуковых скоростях,  $\frac{1}{M}$  при гиперзвуковых скоростях, при больших числах Рейнольдса  $Re$  в турбулентном течении  $\frac{1}{Re}$  и т.д.. Однако в прикладной газовой динамике часто используют приближения, которые не становятся точными ни при каком предель-

ном переходе, такие приближения называют - *иррациональными* приближениями [3]. К таким приближениям можно отнести: замену пространственной геометрии самолета некоторой плоскостной конфигурацией при определении подъемной силы, применение теории скачков уплотнения - волн разрежения для определения аэродинамических характеристик при гиперзвуковых скоростях полета и т.д.

#### 1.4 Численные методы - пример рациональных приближений

В последнее время широкое распространение получили численные методы решения задач в газовой динамике. Фактически такой подход означает применение рационального приближения к рассматриваемой модели путем введения возмущения с малым параметром. В подтверждение сказанного рассмотрим решение обыкновенного дифференциального уравнения для скалярной функции. Пусть в области  $x \geq 0$  имеем задачу отыскания решения "u" уравнения

$$\frac{du}{dx} = F(x, u) \quad (2.1')$$

с граничным условием

$$u(0) = u_0, \quad (1.1'')$$

где  $F(x, u)$  - непрерывно дифференцируемая по "u" функция.

Численное решение задачи состоит в замене приближенным оператором  $Lu^h$  точного дифференциального оператора и решения задачи

$$Lu^h = F(x^h, u^h) \quad (1.2')$$

с граничным условием

$$u^h(0) = u_0^h, \quad (1.2'')$$

где индекс  $h$  означает численное значение. Решение ищется в некоторых точках пространства, называемых точками сетки, расположенных с шагом  $h$  по координате  $X$ . При решении вместо  $X$ ,  $U(x)$ ,  $F(x,u)$  рассматриваются значения функции в точках сетки, т.е. решение ищется на множестве сеточных функций:  $x_k, u_k, F_k$ .

Рассмотрим согласованность задачи (1.2) и задачи (1.1). Пусть уравнение (1.2') с оператором  $Lu$  имеет вид

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = F(x_k, u_k). \quad (1.3)$$

Представляя решение  $u_k$  в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_k$  и, подставляя в (1.3), получим :

$$\frac{du_k}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2u_k}{dx^2} h + \dots = F(x_k, u_k). \quad (1.4)$$

Из сравнения (1.4) и (1.1) видно, что в задаче (1.2) уравнение является возмущенным по отношению к уравнению в задаче (1.1). Второй член (1.4), имеющий смысл возмущения, называется *схемной вязкостью* или первым дифференциальным приближением по отношению к задаче (1.1).

Оператор  $Lu^h$  может быть составлен так, что возмущение точной задачи (1.1) будет иметь порядок  $O(h^p)$ , где  $p \geq 2$ . Показатель  $p$  имеет название порядка аппроксимации. Однако для решения поставленной задачи согласованности уравнений еще не достаточно. Необходимо потребовать, чтобы постановка задачи (1.2) была корректной, т.е., малые отклонения в граничных условиях или другие малые возмущения не должны приводить к большим отклонениям в решении задачи.

## 1.5 Пример исследования двумерного течения в плоском канале

Рассмотрим более сложный пример приближенного решения задачи о течении в плоском канале с прямолинейными стенками, показанном на рис. 1.2.

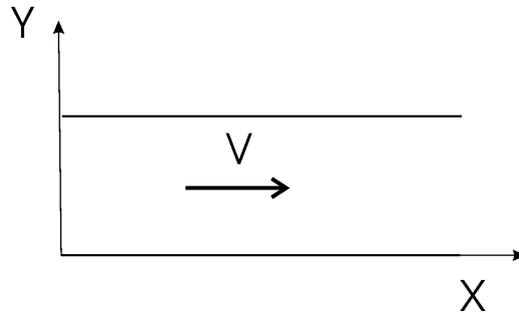


Рис.1.2

Пусть на стенке ( $y=0$ ) выполняются условия прилипания ( $V_x = V_y = 0$ ), при  $y=1$  течение удовлетворяет условию  $V_x = V(x)$ . Значение  $V_y$  в канале за счет толщины вытеснения у стенки канала и других причин вообще говоря не равно нулю  $V_y = \varepsilon_1^0(x)$ . Принимаем, что  $V_y$  имеет среднюю величину

$$\varepsilon_1 = \int_0^1 V_y dy.$$

Примем также, что  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon = \frac{1}{\text{Re}}$  мало. Уравнения движения газа, уравнение

сохранения массы и энергии в этих переменных имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\varepsilon}{3} \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial x} \right) \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\varepsilon}{3} \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} = 0 \\ \gamma P \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + V_x \frac{\partial P}{\partial x} + V_y \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Здесь  $V_x, V_y$  соответственно составляющие скорости вдоль оси  $X$  и  $Y$ ,  $P$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $\gamma$  - показатель адиабаты. Построим составные решения. Уравнения для внешнего решения:

$$A_0 : \begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} = 0 \\ \gamma P \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения и третьего имеем:  $\rho \frac{V_x^2}{2} + P = const$ , из второго -  $P = P(x)$ , из третьего -  $\rho V_x = const$ , из последнего -  $\gamma \frac{\partial \ln V_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \ln p}{\partial x} = 0$ . Откуда  $v_{x0}^\gamma p = const$  или  $\frac{P}{\rho^\gamma} = const$ , т.е. внешнее решение представляет собой решение невязкого одномерного течения. Так как из первого и третьего уравнений  $const \cdot V_{x0} + P = const$ , а из четвертого  $V_{x0}^\gamma P = const$ , то  $V_{x0} = const$ .

Для определения внутреннего решения введем  $Y=y/\varepsilon$ , подставим в (1.5) и отбросим члены, содержащие  $\varepsilon$ :

$$A_\varepsilon : \begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\partial V_{x1}}{\partial Y} = \frac{\partial^2 V_{x1}}{\partial Y^2} \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial \rho \varepsilon_1}{\partial Y} = 0 \\ \gamma P \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial Y} + \varepsilon_1 \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

Из четвертого уравнения имеем  $\varepsilon_1^\gamma P = const$ , из третьего -  $\rho \varepsilon_1 = const$ . Ограничимся рассмотрением только первого уравнения, полагая в нем  $\varepsilon_1 = const$ . Из

этого уравнения  $\frac{\partial V_{x1}}{\partial Y} = c \cdot \exp(\varepsilon_1 Y)$  и  $V_{x1} = \frac{c}{\varepsilon_1} \exp(\varepsilon_1 Y) + c_1$ .

Составное решение

$$V_x = V_{x1} + V_{x0} = \frac{c}{\varepsilon_1} \exp(\varepsilon_1 Y) + C_1 + V,$$

при  $y = 0, V_x = 0$ , при  $y = 1, V_x = V$ . Отсюда

$$V_x = V \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon_1 y}{\varepsilon}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right) - 1}.$$

Из полученного соотношения следует, что профиль скорости с учетом вязкости ( $\varepsilon \neq 0$ ) имеет в зависимости от числа Рейнольдса известную из практики форму, показанную на рис. 1.3. Здесь  $Re_1 < Re_2 < Re_3$

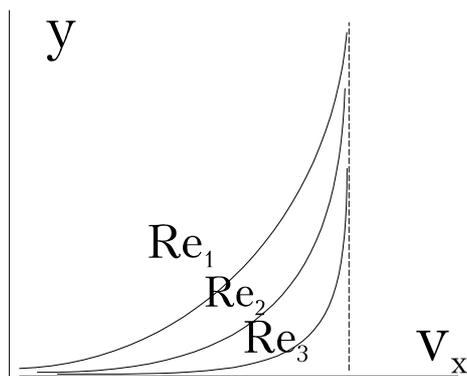


Рис.1.3

### Литература

1. А. Найфэ. Методы возмущений.-М.: Мир, 1976.
2. Дж. Коул. Методы возмущений в прикладной математике. -М.: Мир, 1972.
3. М. Ван - Дайк. Методы возмущений в механике жидкости. -М.: Мир, 1967.
4. А.А. Самарский. Введение в численные методы. -М.: Наука, 1982.

## **Глава 2 ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Основываясь на экспериментально подтвержденных гипотезах и приемах решения, рассмотрим некоторые из распространенных методов, упрощающих получение решения многих прикладных задач.

### **2.1 Применение осредненных уравнений**

При исследовании многих газодинамических проблем часть параметров, имеющих не основное значение в рассматриваемой задаче, заменяют их осредненными значениями. При этом следует иметь в виду, что при любом осреднении не могут быть сохранены все свойства потока, так как при осреднении часть информации о потоке неизбежно теряется. Осреднение представляет собой замену неоднородного потока однородным при условии сохранения наиболее существенных для обсуждаемой задачи свойств течения. На практике часто приходится, например, рассчитывать газовые потоки в каналах с переменными в сечении параметрами. В ряде случаев эти потоки можно рассматривать как одномерные с некоторыми средними значениями параметров в каждом сечении. При этом возникает задача об осреднении параметров газа в поперечном сечении неравномерного потока. Иногда в качестве средних значений принимают осредненные по площади параметры (скорость, плотность, температура и т. д.). Однако такой подход может привести к заметным ошибкам в смысле соблюдения законов сохранения Ньютона (массы, количества движения и энергии). Поэтому при решении задачи осреднения

в общем случае используется другой прием. Заданный неравномерный поток характеризуется рядом интегральных величин, т.е. расходом газа, энергией, импульсом, энтропией и т. д. Заменяя этот поток осредненным следует стремиться к тому, чтобы сохранить неизменными суммарные свойства потока. Поскольку состояние одномерного потока характеризуется тремя независимыми параметрами: полным давлением  $p_0$ , температурой торможения  $T_0$  и скоростью  $v$ , то при осреднении этих параметров чаще всего исходят из сохранения в исходном и осредненном потоках одинаковыми расходами газа  $G$ , полной энергии  $E$  и импульсом  $J$ . Остальные параметры потока (давление, плотность, температура и т.д.) определяются как производные от основных ( $p_0, T_0, v$ ).

Одним из наиболее оправданных для приведения к одномерным течениям считается следующий подход. Определяем средний по площади сечения  $F$  расход в виде:

$$\tilde{G} = \int_F \rho v dF,$$

энергию в объеме

$$\tilde{G} c_p \tilde{T}_0 = \int_F c_p T_0 dG.$$

Отсюда

$$\tilde{T}_0 = \frac{\int T_0 \rho v dF}{\int_F \rho v dF}.$$

Для определения осредненного давления торможения  $\tilde{p}_0$  используем закон сохранения импульса:  $\rho v^2 + p = p_0$ , т.е

$$\tilde{p}_0 = \frac{\int (\rho v^2 + p) dF}{F}.$$

Определим среднюю по площади скорость

$$\tilde{v} = \frac{\int v dF}{F},$$

из закона сохранения массы осредненную плотность

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{G}}{F\tilde{v}},$$

давление

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 - \tilde{\rho}\tilde{v}^2.$$

Температура  $\tilde{T}$  определяется из уравнения Клапейрона  $\tilde{T} = \frac{\tilde{p}M}{\tilde{\rho}R}$  и т.д.

На практике при изучении пограничных слоев при постоянной плотности осреднение скорости проводят из сохранения массы

$$\tilde{v} = \frac{\int v dF}{F},$$

или импульса

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{\int v^2 dF}{F}},$$

или энергии

$$\tilde{v} = \sqrt[3]{\frac{\int v^3 dF}{F}}.$$

Рассматривают также вариант фиксированных значений некоторых параметров (например,  $v = v_m$ ), но при этом изменяется величина  $F$ . Так, при осреднении по массе имеем

$$G = \rho_m v_m F (1 - \delta^*),$$

где  $F(1 - \delta^*) = \tilde{F}$  - эффективная площадь;  $\delta^*$  - толщина вытеснения

$$\delta^* = \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho v}{\rho_m v_m}\right) dF.$$

Аналогично получим толщину потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^1 \frac{\rho v}{\rho_m v_m} \left(1 - \frac{v}{v_m}\right) dF.$$

В общем, в каждой конкретной задаче осреднение проводится исходя из определяющих параметров и определяющих законов сохранения.

Из сказанного следует очевидная рекомендация для случая интерполирования результатов расчета или эксперимента на другую расчетную сетку. Здесь интерполирование по каждому параметру может привести к ошибкам. В этом случае оправдано интерполировать потоки массы, импульса и полной энергии, из которых затем можно получить все необходимые параметры потока.

Другой способ осреднения применяется при исследовании турбулентного течения. Обычное (по Рейнольдсу) осреднение движения по времени позволяет представить скорость в виде суммы среднего значения и пульсации скорости

$$\bar{v} = \tilde{v} + \bar{v}',$$

где

$$\tilde{v}(r, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \bar{v}(r, t) dt. \quad (2.1)$$

Промежуток осреднения  $T$  предполагается достаточно большим по сравнению с периодом турбулентных пульсаций и малым по сравнению с характерным для осредненного турбулентного движения интервалом времени.

С другой стороны, в определенный момент времени  $t$  осреднение параметра  $v$  можно провести по объему, тогда

$$\tilde{v} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \bar{v} d\tau.$$

Для величины скорости в турбулентном потоке целесообразно ввести и такое осреднение [9]  $\bar{v} = \tilde{v} + \langle \bar{v}' \rangle + \langle \bar{v}'' \rangle$ , где величина  $\langle \bar{v}' \rangle$  определяется как отклонение скорости от скорости центра масс малого объема, охваченного поверхностью  $S$  по формуле

$$\langle \bar{v}' \rangle = \frac{1}{S} \int_S \bar{v}' \times \bar{n} ds = \frac{1}{S} \int_{\tau} rot \bar{v} d\tau \sim \frac{\tau}{S} rot \bar{v} \sim \ell rot \bar{v},$$

где  $\ell$  - характерный размер в объеме  $\tau$ . Такой подход позволяет сохранить специфическое поведение крупномасштабной турбулентности, теряемое при обычном осреднении по времени. Член  $\langle \bar{v}'' \rangle$  - осреднение мелкомасштабной пульсации (осреднение по Рейнольдсу). При осреднении потока по Рейнольдсу предполагаются следующие свойства осредняемых величин. Пусть имеем величины  $A$  и  $B$ . Пусть  $A = \tilde{A} + A'$ ,  $B = \tilde{B} + B'$ , где  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  - средние величины,  $A'$ ,  $B'$  - пульсации. Тогда

1)  $\overline{A + B} = \tilde{A} + \tilde{B}$  (среднее суммы равно сумме средних);

2)  $\frac{\partial \overline{A}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x}$  (среднее значение производной равно производной от среднего);

3) Среднее произведения двух сомножителей, из которых только один испытывает турбулентные пульсации, равно произведению средних. В частности,  $\overline{AA'} = 0$ .

Среднее значение произведения двух пульсирующих величин равняется сумме произведений средних величин и среднего значения пульсаций этих величин:

$$\overline{AB} = \tilde{A}\tilde{B} + \overline{A'B'}$$

Следует отметить, что при осреднении значений с помощью интегрирования по времени или по пространству перечисленные здесь свойства осреднения точно выполняться не будут.

## 2.2. Использование подобия в гидрогазодинамике

1. При изучении процессов в прикладной гидрогазодинамике широко применяются методы теории подобия [5,8], в соответствии с которой строится некоторая приближенная схема, позволяющая получить вполне достоверную информацию об изучаемом процессе. Процесс изучения объекта или физического явления при помощи модели или другого явления называется *моделированием*. Два явления называются *физически подобными*, если для них можно установить соответствующие точки пространства и моменты времени так, чтобы в этих точках пространства и в эти моменты времени все физические параметры, характерные для данных явлений, были пропорциональны. Под физическим подобием понимается комплекс ус-

ловий, обеспечивающих одновременно геометрическое, кинематическое и динамическое подобия.

Геометрическое *подобие* - подобие формы (расстояний или координат). Тела или системы называются геометрически подобными, если *отношения их сходных размеров одинаковы*.

Кинематическое *подобие* - подобие движения. Движения двух систем кинематически подобны, если при соблюдении геометрического подобия во всех сходных точках этих систем в сходные моменты времени вектора скоростей имеют одинаковые направления, а отношения модулей скоростей постоянны.

Динамическое *подобие* - подобие сил. Две системы динамически подобны, если *при* выполнении геометрического и кинематического подобия выполняются следующие три условия:

в сходных точках этих систем в сходные моменты времени действуют одинаковые силы (одной и той же природы);

отношения *между* всеми одинаковыми силами во всех сходных точках одинаковы;

движения систем описываются одинаковыми уравнениями, а также одинаковыми и подобными граничными условиями.

Подобие называется полным, если во всем исследуемом пространстве подобие картин движения соблюдается полностью. Если не все физические величины, характеризующие движение модели и натурального объекта, находятся в определенном постоянном соотношении, то такое подобие называется неполным или частичным.

Правильный учет критериев подобия играет очень большую роль в моделировании течений.

2. Рассмотрим два потока: один - обтекающий натуральный объект, а другой - модель. Критерии подобия получим исходя из структуры основных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Структура этих дифференциальных уравнений не должна, очевидно, зависеть от изменения масштабов, входящих в эти уравнения величин. Введем масштабы некоторых характерных параметров газодинамических величин: времени  $-T_i$ , линейный  $-L_i$ , скорости  $V_i$ , плотности  $R_i$ , давления  $-P_i$ , вязкости -  $\nu_i$ , массовой силы  $-G_i$ , где при  $i=1$ , относящихся к первому потоку,

$i=2$  – к второму. Отнесем теперь к ним все соответствующие параметры. Тогда, например уравнение для вязкого потока [16] запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{V_i}{T_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{V_i^2}{L_i} (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = - \frac{P_i}{R_i L_i} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p + \\ + \frac{V_i \nu_i}{L_i^2} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \left( \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \bar{v} \right) - \frac{\nu_i}{L_i T_i} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \times \left( \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\bar{M}_k}{J} - \bar{\Omega} \right) \right) + G_i J_{FM} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Разделим их на динамическую составляющую потока и получим набор коэффициентов

$$\frac{L}{TV}, \frac{P}{V^2}, \frac{\nu V}{L}, \frac{GL}{V^2}. \quad (2.3)$$

Полное совпадение коэффициентов в (2.3) для обоих потоков - означает полное подобие, согласуемость по одному или по части из них -частичное подобие.

Приведенные коэффициенты подобия имеют определенный физический смысл и играют существенную роль при моделировании реальных физических процессов. Так, первый из коэффициентов характеризует соотношение характерного времени нестационарности процесса и времени прохождения газодинамического процесса (число Струхалия  $Sh = \frac{L}{TV}$ ), второй - сжимаемость и представляет собой отношение скорости потока к скорости звука (число Маха  $M = \frac{V}{a}$ ), третий - отношение динамических сил к силам вязкости (число Рейнольдса  $Re = \frac{VL}{\nu}$ ), последний - отношение величины динамических сил к массовым (число Фруда  $F = \frac{V^2}{LG}$ ). Уравнение (2.2) после подстановки коэффициентов подобия примет вид

$$\begin{aligned}
 Sh \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = & - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{1}{\rho} \nabla p + \\
 + \frac{1}{Re} \nabla (\xi \nabla \bar{v}) + \frac{1}{Re} \nabla \left( \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \bar{v} \right) - & \frac{1}{Re Sh} \nabla \times \left( \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\bar{M}_k}{J} - \bar{\Omega} \right) \right) + \frac{1}{F} J_{FM}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

С их помощью этих критериев возможно провести значительное упрощение рассматриваемых уравнений: если по отношению к происходящим процессам степень нестационарности процесса мала, то  $Sh = \varepsilon \rightarrow 0$ ; если массовые силы малы, то  $\frac{1}{F} = \varepsilon$ ; если вязкость мала, то  $\frac{1}{Re} = \varepsilon$ ; если скорость течения мала то  $M = \varepsilon$ ; если течение трансзвуковое, то  $M-1 = \varepsilon$ .

Пример решения уравнений газовой динамики при  $\frac{1}{Re} = \varepsilon \rightarrow 0$  приведен в гл. 1.

### Пример предельного перехода ( $M^2 = \varepsilon \rightarrow 0$ )

Рассмотрим установившееся изэнтропическое течение газа. Уравнение Бернулли для этого течения имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{\gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho_0},$$

где индекс "0" соответствует условиям торможения ( $v=0$ ). При этом

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = C.$$

Скорость звука  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$  (по определению). Величина  $a^2 = \gamma C \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho}$

при изэнтропическом течении. Тогда для уравнения Бернулли

$$\frac{v^2}{2} \frac{\gamma p}{\rho} (\gamma - 1) + 1 = \frac{p_0}{p} \frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \varepsilon \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon = M^2$ . Раскладывая (2.5) в ряд по  $\varepsilon$ , получим

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{\gamma \varepsilon^2}{8} + O(\varepsilon^3).$$

Следовательно, в потоке газа с точностью до  $M^2$ ,  $\rho_0 = \rho$ .

Аналогично

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma = \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right)^\gamma \approx 1 + \frac{\gamma}{2} \varepsilon + \frac{\gamma}{8} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

А так как  $\gamma p \frac{M^2}{2} = \rho \frac{v^2}{2}$ , то

$$p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2} (1 + (\gamma - 1) \varepsilon + O(\varepsilon^2)). \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что соотношение (2.6) с точностью до  $\varepsilon$  также согласуется с уравнением Бернулли для несжимаемого газа. На основании этого определим поправку на сжимаемость при замерах скорости с помощью трубки Пито - Прандтля, в которой, как известно, для определения скорости используются уравнения Бернулли для несжимаемого газа. Действительно, из (2.6)

$$v^2 = \frac{p_0 - p}{\rho} \cdot \frac{2}{(1 + (\gamma - 1) \varepsilon)}.$$

По данным трубки Пито-Прандтля определим

$$v_H^2 = 2 \frac{p_0 - p}{\rho}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{v_H}{\sqrt{1 + (\gamma - 1) \varepsilon}} = \frac{v_H}{\sqrt{1 + (\gamma - 1) M^2}}.$$

Итак, течение газа при  $M^2 = \varepsilon \rightarrow 0$  с точностью до величины  $M^2$  можно считать несжимаемым. Тогда в уравнении неразрывности в установившемся течении

$$\nabla(\rho \bar{v}) = \bar{v} \nabla \rho + \rho \nabla \bar{v} = 0$$

и как следствие

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (2.7)$$

Этот результат значительно упрощает решение многих задач газодинамики.

### 2.3 Обтекание тонких тел потенциальным потоком

Рассмотрим установившееся баротропное безвихревое течение газа в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . Из баротропности следует, что

$$\nabla p = \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho = a^2 \nabla \rho, \quad (2.8)$$

где  $a^2$  - квадрат скорости звука. Течение безвихревое:  $\bar{\Omega} = 0$ , т.е.  $\operatorname{rot} v = 0$  или

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0,$$

следовательно, существует дважды непрерывно дифференцируемая функция - потенциал скорости  $\varphi$  такой, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z. \quad (2.9)$$

Выразим уравнения сохранения массы и количества движения через потенциал скорости. С этой целью умножим уравнение количества движения (в векторной форме) скалярно на вектор  $\bar{v}$ , воспользуемся условием баротропности и исключим  $\nabla \rho$  из уравнения неразрывности. Введем вектор, модуль которого равен числу Маха  $M$  с координатами

$$M_x = \frac{v_x}{a}, \quad M_y = \frac{v_y}{a}; \quad M_z = \frac{v_z}{a}.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}
& (1 - M_x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2M_x M_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (1 - M_y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2M_x M_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \\
& + (1 - M_z^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2M_y M_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

В случае, если число Маха мало то, с точностью до  $\varepsilon = M^2$ , уравнение (2.10) переходит в уравнение Лапласа, для которого хорошо разработана теория уравнений математической физики [14].

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0. \tag{2.11}$$

Пусть необходимо рассмотреть обтекание тонкого тела дозвуковым потоком, т.е. пусть  $0 < M_x < 1, M_y, M_z = 0$ . Тогда  $M_x^2 \approx M_\infty^2$ , где  $M_\infty$  - число Маха набегающего потока, а уравнение (2.10) приближенно запишется:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0. \tag{2.12}$$

Введем новую переменную  $X = \frac{x}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ , тогда уравнение (2.15) приведет к виду (2.11).

Для тонкого тела линеаризуем уравнение Бернулли. Уравнение Бернулли

$$\frac{v_x^2 - u^2}{2} + \left( \frac{p}{\rho} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) \frac{\gamma}{\gamma - 1} = 0,$$

где  $u, p$  - соответственно скорость и давление в набегающем потоке.

Полагая, что  $p = p_\infty + \delta p$  и  $\rho = \rho_\infty + \delta \rho$ , причем  $\delta p$  и  $\delta \rho$  малы и по условию баротропности  $\delta p = a^2 \delta \rho = \gamma \frac{p}{\rho} \delta \rho$  можем записать с точностью до малых второго порядка

$$\left( \frac{p + \delta p}{\rho + \delta \rho} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{\delta p}{\rho_\infty}.$$

Отсюда получим линеаризованное уравнение Бернулли

$$\rho \frac{v_x^2 - u^2}{2} + (p - p_\infty) = 0. \quad (2.13)$$

Для тонкого тела  $v_x = u + v$ , где  $v$  - малое отклонение по скорости, причем  $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ .

Отсюда  $v_x^2 \approx u^2 + 2uv + O(v^2)$ .

Подставляя  $v_x^2$  в (2.13), получим

$$C_{pH} = \frac{p - p_\infty}{\rho u^2} = -2 \frac{v}{u} = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sqrt{1 - M_\infty^2} = C_p \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$

Здесь  $C_p$  - коэффициент давления для сжимаемого газа. Таким образом, распределение давления, полученное для несжимаемого газа, может быть пересчитано на случай сжимаемого газа по формуле:

$$C_p = \frac{C_{pH}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (2.14)$$

Это формула Прандтля - Глауэрта.

При изучении обтекания тонкого тела сверхзвуковым потоком ( $M_x > 1$ ), рассуждая

аналогично предыдущему и вводя переменную  $X = \frac{x}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$ ,

получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = 0,$$

которое также хорошо изучено [14]. Найдя из решения волнового уравнения  $C_{pb}$

по аналогии с (2.14), можем записать

$$C_p = \frac{C_{pb}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad (2.15)$$

это формула Аккерета.

### Литература

1. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. -М.: Мир, 1980.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. -М.: ФМЛ, 1963.-Т. 1,2.
3. Черный Г.Г. Газовая динамика. -М.: Наука, 1988г.
4. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидрогазодинамика. -М.: Энергоиздат, 1984.
5. Аржанников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. -М.: Оборонгиз, 1956.
6. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. -М.: Наука, 1969.
7. Швец А.И. Аэродинамика сверхзвуковых форм. -М.: Изд. МГУ, 1987.
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. -М.: ТТЛ, 1957.
9. Трофимов В.М. Гидродинамика турбулентности, включающей крупномасштабную ее часть. Препринт 13 - 91, ИТПМ СО РАН, -Новосибирск, 1991.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. -М.: Наука, 1983.-Т. 1,2.

11. Колесников Г.А. Аэродинамика летательных аппаратов. -М.: Машиностроение, 1993.
12. Бондарев Е.Н., Дубов В.Г., Рыжов Ю.А. и др. Аэрогидромеханика. -М.: Машиностроение, 1993.
13. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.-М.: Мир, 1985.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.-М.: Наука, 1973.

### Глава 3. РАЗРЫВЫ В СОВЕРШЕННОМ ГАЗЕ.

#### 3.1 Поверхности разрыва.

Уравнения газовой динамики нелинейные и допускают существование разрывных решений. В природе, действительно, существуют поверхности на границе двух различных сред, так называемые контактные разрывы и ударные волны, возникшие как следствие накопления малых возмущений. На самом деле толщина разрывов конечна и для обычных условий движения газа составляет 1 - 2 свободных пробега молекул, где происходит сложный неравновесный процесс. Однако, часто эта толщина ничтожно мала по отношению к характерному размеру задачи и может разрыв быть моделирован линией. Существующую связь между параметрами потока по разные стороны разрыва удобно пояснить на примере одномерного течения в прямоугольном канале, по которому равномерно движется разрыв. Для удобства рассмотрим течение в системе координат, связанной с движущимся разрывом. Течение считаем установившимся и невязким. Пусть по одну сторону раз-

рыва скорость ( $v$ ), плотность ( $\rho$ ), давление ( $p$ ) обозначены индексом "1", по другую - индексом "2". Разность значений какой - либо величины с обеих сторон поверхности разрыва будем обозначать посредством квадратных скобок. Тогда, из законов сохранения в интегральной форме на разрыве для уравнения сохранения массы, сохранения количества движения и энергии имеем:

$$[\rho v] = \rho_1 v_1 - \rho_2 v_2 = 0,$$

$$[p + \rho v^2] = 0, \tag{3.1}$$

$$[\rho v (\frac{v^2}{2} + h)] = 0,$$

где  $h$ - энтальпия в потоке газа.

В случае контактного разрыва отсутствует перетекание через границу  $[v]$ . Тогда первое и последнее уравнения в (3.1) удовлетворяется автоматически, второе уравнение удовлетворяется при  $[p] = 0$ . При этом  $[\rho]$  и  $[h]$  произвольны.

В более общей форме условия на *контактном разрыве* имеют вид:

$$[v]=0, [p]=0. \tag{3.2}$$

Справедливость этой формы проверяется прямой подстановкой в (3.1).

При  $[v] \neq 0$  на границе имеем разрыв с рядом газодинамических свойств, которые позволяют определить его как *скачок уплотнения* или *ударная волна*. Разрыв, перпендикулярный к направлению потока, называется *прямым скачком*.

### 3.2 Прямой скачок уплотнения.

Рассмотрим течение через элемент границы прямого скачка (рис.3.1).

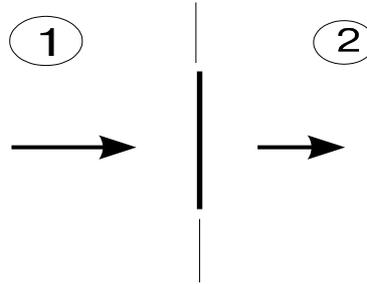


Рис.3.1

В окрестности границы на основании (3.1) справедливы уравнения

$$a) \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2,$$

$$b) p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2,$$

$$c) \frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

**Соотношение Рэнкина - Гюгонио.** Оно устанавливает связь перепада давления и плотности на скачке. Исключим из уравнений скорость. Для этого из уравнения b) с учетом a)  $[p] = -\rho_1 v_1 [v]$ . Умножим левую и правую части на вспомогательное выражение:

$$\frac{v_2 + v_1}{\rho_1 v_1} = \frac{v_2}{\rho_1 v_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}. \text{ Отсюда } [p] \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = -[v^2]. \text{ Величину } [v^2] \text{ ис-}$$

ключим с помощью уравнения c). Окончательно имеем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) \frac{p_2}{p_1}}. \quad (3.3).$$

Эти соотношения называются соотношениями *Рэнкина - Гюгонио*. К соотношениям Рэнкина - Гюгонио относят также

$$\frac{[p]}{[\rho]} = \gamma \frac{\mu p}{\mu \rho}, \text{ где } \mu f = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (3.4)$$

Соотношения (3.3) , (3.4) называют еще *ударной адиабатой*. Она отличается от *адиабаты Пуассона*,

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)_п = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma. \quad (3.5)$$

имеющей место при изэнтропическом течении Сравнение этих кривых показано на рис.3.2. Из соотношений (3.3) и рис.3.2 видно, что ударная адиабата имеет

асимптоту при  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ , идет круче адиабаты Пуассона, и совпадает с послед-

ней при  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$ .

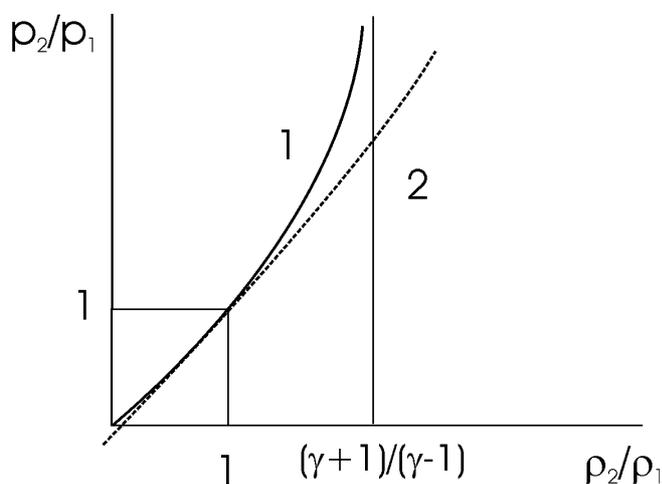


Рис.3.2

Как следует из рисунка, при  $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$  ударная адиабата проходит ниже адиабаты

Пуассона и пересекает ось ординат в точке  $\left(0, -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)$ , это означает существование скачка разрежения.

Из уравнений термодинамики на скачке  $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma e^{\frac{S_2-S_1}{C_v}}$ , откуда

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left\{ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right\}, \quad (3.6),$$

или, если воспользоваться соотношением (2.3)

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left( \frac{p_2}{p_1} / \left( \frac{p_2}{p_1} \right)_n \right).$$

Из последнего соотношения и рис.3.2 непосредственно следует, что при  $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$

$[S] > 0$ , а при  $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$   $[S] < 0$ . Но последнее противоречит второму закону термодинамики, следовательно, скачки разрежения считаются невозможными. Т.е. при переходе через ударную волну

следовательно, скачки разрежения считаются невозможными. Т.е. при переходе через ударную волну

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \geq 1. \quad \dots\dots\dots(3.7).$$

Определим *изменение скорости* при переходе через скачок. Из уравнения сохранения массы (а) и (3.7) получим

$$v_2 \leq v_1. \quad (3.8).$$

Из уравнения сохранения количества движения (b)) и а) имеем

$$[v] = - \left[ \frac{p}{\rho v} \right]. \quad (3.9).$$

Выразим величину

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2 - \frac{v^2}{2}, \quad (3.10)$$

где  $a_*$  - критическая скорость звука, определяемая из уравнения Бернулли при условии, когда скорость потока совпадает со скоростью звука. С помощью (3.10) исключим из (3.9) величину  $\frac{p}{\rho}$  и учитывая, что на скачке  $[v] \neq 0$ , имеем очень важное

соотношение

$$\frac{v_1 v_2}{a_*^2} = 1 \text{ или } \lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad (3.11)$$

где  $\lambda = \frac{v}{a_*}$ . Отсюда, если  $\lambda_1 > 1$ , то  $\lambda_2 < 1$ .

Из уравнения Бернулли, получим связь относительной скорости  $\lambda$  и числа Маха  $M$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \frac{M}{\sqrt{\tau(M)}}, \quad (3.12)$$

где использовано обозначение  $\tau(M) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$ . Согласно (3.11) и (3.12)

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1}{\sqrt{\tau(M_1)}} \frac{M_2}{\sqrt{\tau(M_2)}} = 1,$$

откуда число Маха за скачком определяется как

$$M_2 = \sqrt{\frac{\tau(M_1)}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}}. \quad (3.13)$$

При переходе через скачок число Маха убывает. Причем, как следует из (3.13), при

$$M_1 \rightarrow 1 \quad M_2 \rightarrow 1; \quad \text{при } M_1 \rightarrow \infty \quad M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}.$$

*Изменение плотности* при переходе через скачок определим, используя формулы а), (3.6), (3.12)

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} - 1 = \frac{v_1^2}{a_*^2} - 1 = \lambda_1^2 - 1 = \frac{M_1^2 - 1}{\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma-1}{2}(M_1^2 - 1)}. \quad (3.14)$$

*Изменение давления* при переходе через скачок определим используя формулы а), б), (3.11), (3.12)

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2}{p_1} = \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1). \quad (3.15)$$

*Изменение температуры* при переходе через скачок определяется из уравнения Клапейрона, (3.14) и (3.15)

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} - 1 = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} - 1 = \frac{\frac{\Delta p}{\rho_1} + 1}{\frac{\Delta p}{\rho_1} + 1} - 1 = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 M_1^2} (M_1^2 - 1)(1 + \gamma M_1^2). \quad (3.16)$$

*Изменение скорости* звука на скачке определяется соотношением

$$\frac{\Delta a}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} - 1 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 = \sqrt{\frac{\Delta T}{T_1} + 1} - 1. \quad (3.17)$$

Для определения *потери напора* (изменение давления торможения) на скачке можно получить

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \frac{M_1^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}}{\tau(M_1)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left( \gamma M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}}. \quad (3.18)$$

*Изменение энтропии* на скачке определится соотношением (3.6).

### 3.3 Косой скачок уплотнения.

Рассмотрим некоторую произвольно ориентированную поверхность скачка в декартовой системе координат. Система такова, что разрыв в ней неподвижен. Схема течения с таким скачком показана на рис.3.3а.

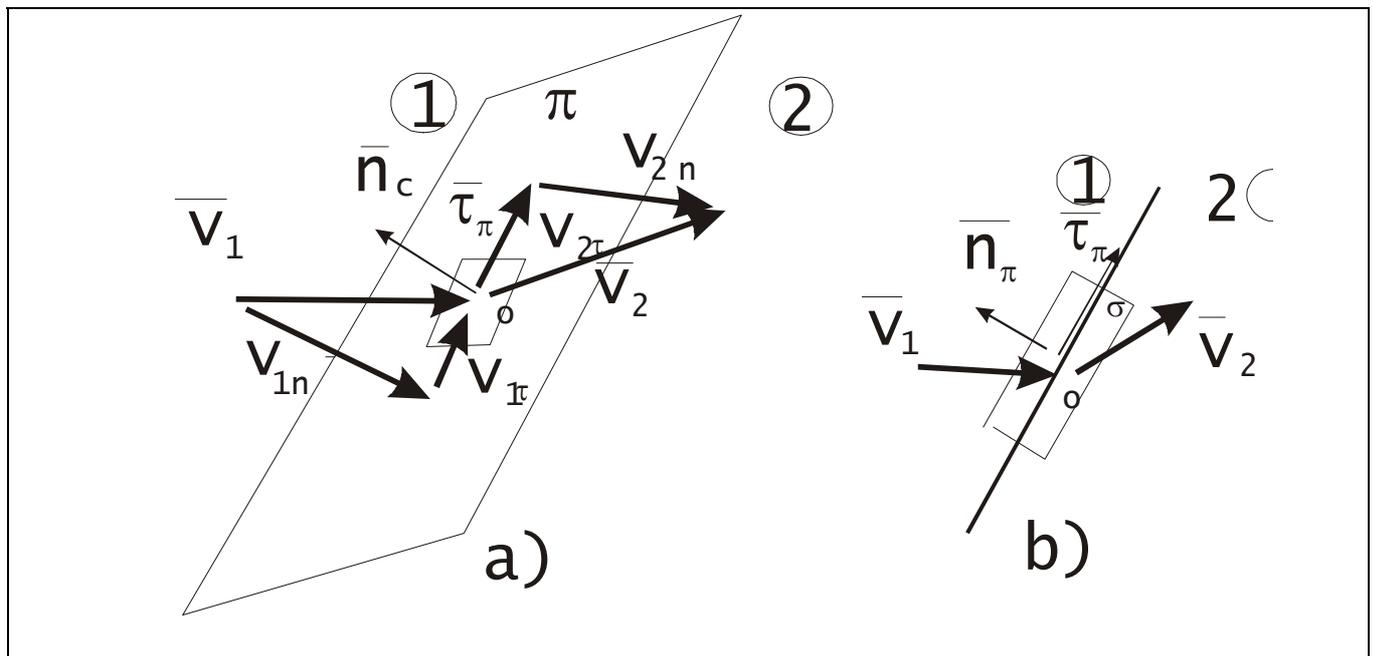


Рис 3.3

На рисунке  $\pi$  - поверхность разрыва,  $\bar{v}_1$  - вектор скорости в набегающем потоке,  $\bar{v}_2$  - вектор скорости в потоке за скачком,  $n_\pi$  - единичный вектор нормали к по-

верхности  $\pi$  в точке "O",  $\bar{\tau}_\pi$  - единичный вектор касательной на поверхности  $\pi$ , направленный вдоль проекции вектора  $\bar{v}_1$  на  $\pi$ .  $v_{1n}$  и  $v_{2n}$  - соответственно, нормальные составляющие  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$ :  $v_{1n} = (\bar{v}_1, \bar{n}_\pi)$ ,  $v_{2n} = (\bar{v}_2, \bar{n}_\pi)$ . Аналогично, касательные составляющие  $v_{1\tau} = (\bar{v}_1, \bar{\tau}_\pi)$ ,  $v_{2\tau} = (\bar{v}_2, \bar{\tau}_\pi)$ .

На рисунке 3.3 б) показана схема течения 3.3 а) в плоскости  $\bar{\tau}_\pi \bar{n}_\pi$ . Здесь же показан некоторый объем  $\sigma$ , охватывающий элемент поверхности разрыва в точке "O", у которого толщина  $\delta \rightarrow 0$  и площадь на  $\pi$ -S. Течение считаем нетеплопроводным и невязким, что является адекватной моделью в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса в набегающем потоке. Рассмотрим законы сохранения массы, количества движения и энергии для объема  $\sigma$ . В случае  $\delta \rightarrow 0$  можно записать законы: сохранения массы

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}, \quad (3.19)$$

- сохранения количества движения в направлении  $\bar{n}_\pi$

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2, \quad (3.20)$$

и в направлении  $\bar{\tau}_\pi$ , так как  $(\bar{n}, \bar{\tau}) = 0$ ,

$$\rho_1 v_{1\tau} v_{1n} = \rho_2 v_{2\tau} v_{2n}, \quad (3.21)$$

- сохранения энергии в форме уравнения Бернулли

$$\frac{v_{1n}^2}{2} + \frac{v_{1\tau}^2}{2} + \frac{\gamma p_1^2}{(\gamma - 1)\rho_1} = \frac{v_m^2}{2} = \frac{(\gamma + 1)a_*^2}{2(\gamma - 1)} = \frac{v_{2n}^2}{2} + \frac{v_{2\tau}^2}{2} + \frac{\gamma p_2^2}{(\gamma - 1)\rho_2}. \quad (3.22)$$

Из уравнения (3.20) с учетом (3.19) непосредственно следует, что

$$v_{1\tau} = v_{2\tau} \quad (3.23).$$

Т.е., при любой ориентации поверхности разрыва по отношению к набегающему потоку касательная составляющая скорости к этой поверхности непрерывна. Для нее, зная только  $\bar{n}_\pi$  в точке "O" можем записать  $\bar{v}_\tau = \bar{v}_1 - (\bar{v}_1 \bar{n}_\pi) \bar{n}_\pi$ .

Введем обозначение

$$\tilde{a}_*^2 = a_*^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_\tau^2. \quad (3.24)$$

Тогда можем записать

$$\frac{v_n^2}{2} + \frac{\gamma p^2}{(\gamma-1)\rho} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \tilde{a}_*^2. \quad (3.25)$$

Теперь остается сравнить соотношения для косо́го скачка (3.19-3.22) с соответствующими формулами для прямого (п.3.2). Они имеют одинаковый вид. Отсюда следует, что все рассуждения и формулы для прямого скачка остаются в силе, если провести формальную замену

$$v_1 \rightarrow v_{1n}, \quad v_2 \rightarrow v_{2n}, \quad a_* \rightarrow \tilde{a}_*, \quad M_1 \rightarrow M_{1n} = \left( \frac{\bar{v}_1}{a_1}, \bar{n}_\pi \right),$$

$$M_2 \rightarrow M_{2n} = \left( \frac{\bar{v}_2}{a_2}, \bar{n}_\pi \right), \quad C \rightarrow C_n.$$

Выпишем наиболее часто встречающиеся на практике формулы.

$$v_{1n} v_{2n} = a_*^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_{1\tau}^2, \quad M_{2n} = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{1n}^2\right)}{\gamma M_{1n}^2 - \frac{\gamma-1}{2}}},$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{M_{1n}^2 - 1}{\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma-1}{2} M_{1n}^2}, \quad \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{1n}^2 - 1), \quad (3.26)$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} (M_{1n}^2 - 1)(1 + \gamma M_{1n}^2), \quad \frac{\Delta a}{a_1} = \sqrt{\frac{\Delta T}{T_1} + 1},$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{M_{1n}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{1n}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\gamma M_{1n}^2 - \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}.$$

Число Маха за скачком определится из соотношения

$$M_2 = \sqrt{M_{2n}^2 + M_{2\tau}^2},$$

где

$$M_{2\tau} = \frac{v_{2\tau}}{a_2} = \frac{v_{1\tau}}{a_2} = \frac{v_{1\tau}}{a_1} \frac{a_1}{a_2}.$$

Вектор скорости за скачком  $\bar{v}_2$  можно записать:

$$\bar{v}_2 = v_{2n} \bar{n}_\pi + v_{2\tau} \bar{\tau}_\pi = v_{2n} \bar{n}_\pi + \bar{v}_1 - v_{1n} \bar{n}_\pi = \bar{v}_1 - v_{1n} \frac{M_{1n}^2 - 1}{\frac{\gamma+1}{2} M_{1n}^2} \bar{n}_\pi. \quad (3.27)$$

### 3.4 Поворот потока на скачке уплотнения.

Рассмотрим картину течения в плоскости, определяемой вектором скорости набегающего потока и вектором нормали к скачку.

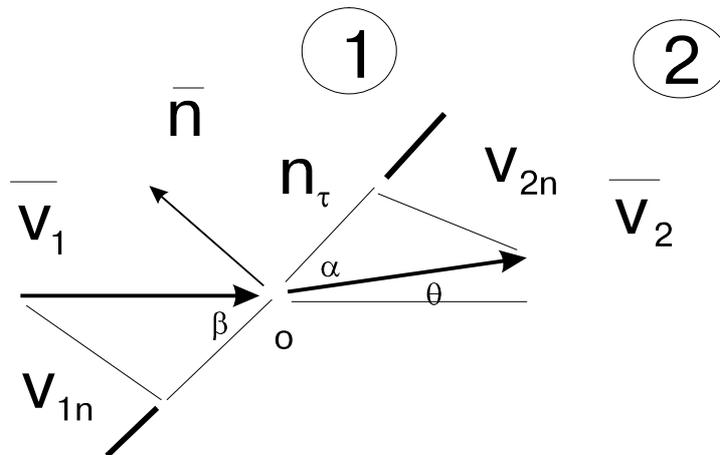


Рис.3.4

В этой плоскости угол  $\beta$  – угол наклона скачка к вектору скорости набегающего потока,  $\theta$  – угол поворота скорости за скачком (Рис.3.4). Очевидно, что  $\alpha = \beta - \theta$ ,  $(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = v_2 v_1 \cos \theta$ ,  $v_{1\tau} = v_1 \cos \beta = v_2 \cos \alpha$ ,  $(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = v_{2n} v_{1n} + v_{1\tau}^2$ . Отсюда, с учетом первого уравнения (3.26)

$$\frac{M^2 \cos \beta \cos \theta}{\cos(\beta - \theta)} = \frac{2}{\gamma + 1} M^2 \cos^2 \beta + \frac{a_*^2}{a^2}.$$

Используя уравнение Бернулли, формулы тригонометрии и, обозначая  $M_n = M \sin \beta$ , окончательно запишем

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \beta \frac{M_{1n}^2 - 1}{\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 - (M_{1n}^2 - 1)}. \quad (3.28).$$

Из последнего уравнения непосредственно следует, что угол поворота потока отсутствует ( $\theta = 0$ ) при  $M_{1n} = 1$  и  $\beta = \frac{\pi}{2}$  или  $\operatorname{ctg} \beta = 0$ .

Зависимость угла поворота потока от наклона скачка и числа Маха схематически показана на рис.3.5.

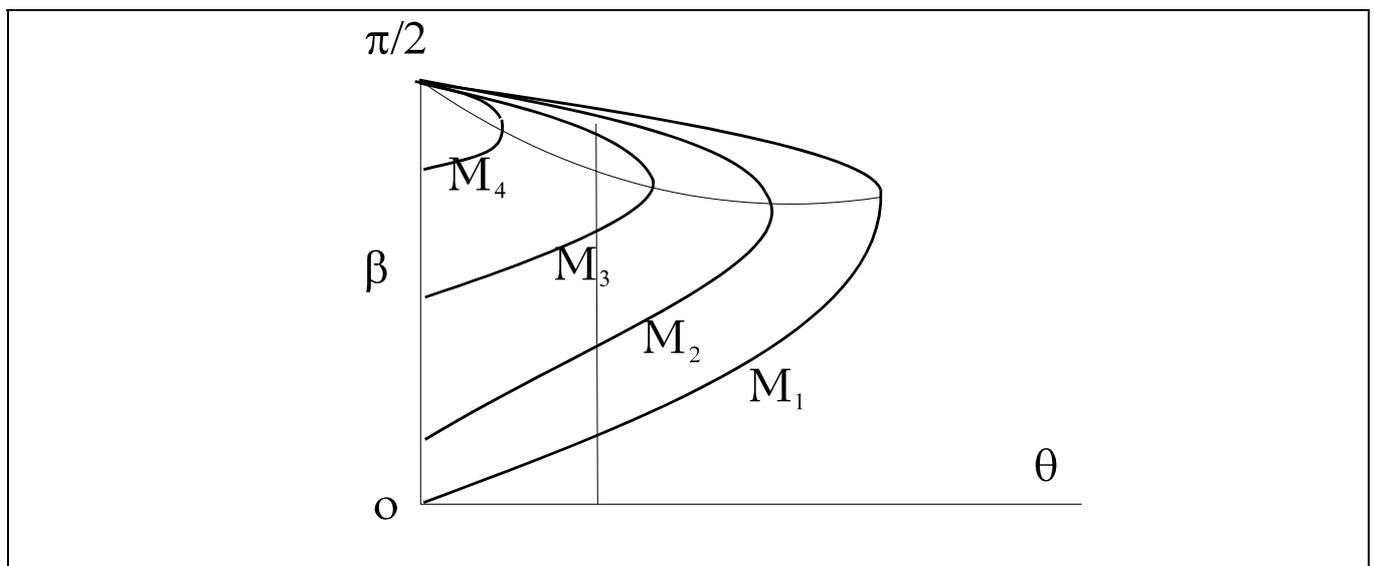


Рис.3.5

Здесь  $M_4 < M_3 < M_2 < M_1$ . Отсюда видно, что каждому значению угла поворота  $\theta$  и числу Маха набегающего потока соответствуют два значения угла наклона скачка, для "*слабого*" скачка (нижняя ветвь) и *сильного* скачка (верхняя ветвь).

При этом, для каждого числа Маха существует одно значение наклона скачка  $\beta$ , при котором достигается максимально возможное значение поворота потока  $\theta_{\max}$ . В реальных процессах отмеченная неоднозначность может существовать только в области  $\theta_{\max}$  (за счет релаксационных явлений в газе при нестационарных процессах). В природе наиболее вероятны процессы с минимальным изменением энтропии. Т.е. согласно принципу о минимальном производстве энтропии, в случае, когда  $\theta < \theta_{\max}$ , формируется сначала состояние, соответствующее *слабому* скачку. И если требуемый поворот потока  $\theta > \theta_{\max}$ , то формируется поток с *сильным* скачком с дозвуковым течением за ним и затем происходит недостающий доворот.

### **Определение потока на плоском\_многоступенчатом воздухозаборнике.**

Пусть имеется многоступенчатый плоский воздухозаборник (рис.3.6) с изломами образующей в точках  $B, C, D$ .

Набегающий поток принимаем сверхзвуковым с числом Маха  $M = M_0$ . Набегая на клин, поток газа образует скачок уплотнения. При достижении нового поворота возникает очередной скачок, который идет круче первого и т.д. Пусть течение расчетное, т.е. все скачки сходятся на начале обечайки  $E$ , а отраженный скачок  $ED$  поворачивается снова горизонтально, хотя он может быть и прямым.

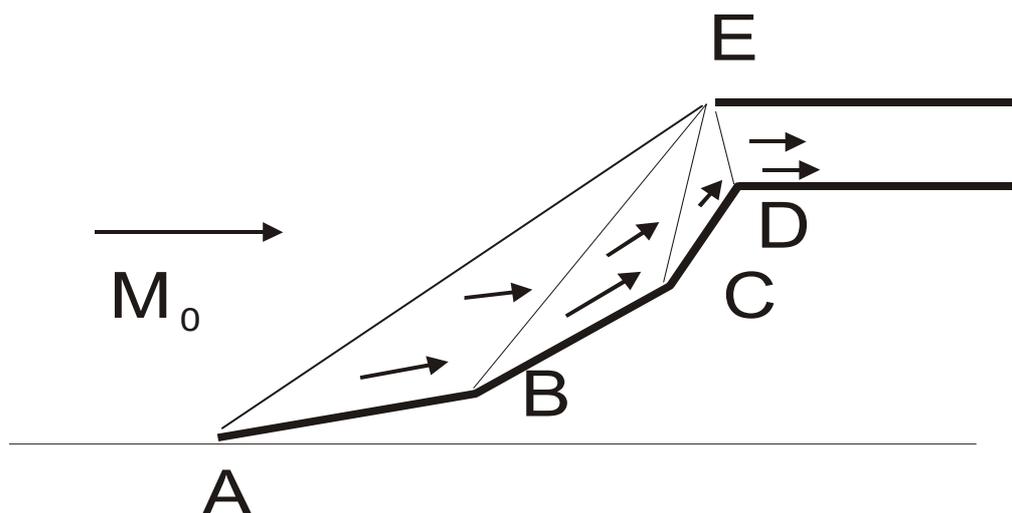


Рис. 3.6

Для определения параметров потока перед воздухозаборником, достаточно знать связь между углом поворота потока и углом скачка. Далее, зная число Маха перед скачком и угол наклона скачка, легко определяем все параметры потока за скачком.

### Литература

1. Н.Е. Кибель, И.А. Кочин, Н.В. Розе "теоретическая гидродинамика", Наука, 1963г.
2. Р. Мизес "Математическая теория сжимаемой жидкости", ИЛ, М, 1961г.
3. Л.В. Овсянников "Лекции по основам газовой динамики", Наука, 1981г.
4. Р. Курант, К. Фридрихс "Сверхзвуковое течение и ударные волны", ИИЛ, 1950г.
5. Р. Зауэр "Нестационарные задачи газодинамики", Мир, 1969г.

## Глава 4. ОДНОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

### 4.1 Уравнения течения газа в одномерных каналах

В практических приложениях много задач, в которых основное изменение происходит в одном направлении (течение в каналах, вдоль трубки тока и т.д.). В таких случаях течение газа можно рассматривать как одномерное, зависящее только от одной координаты. При этом необходимо учесть влияние на течение в канале потери количества движения за счет трения о стенки и возможного частичного загромождения потока. Из теории размерностей [4] это влияние можно учесть с помощью формулы Дарси - Вейбаха, которая может быть записана для единицы объема в виде:  $d\ell = \lambda \frac{\rho v^2}{2D}$ , где  $d\ell$  - приращение потерь количества движения,  $\lambda$  - коэффициент для конкретного вида потерь,  $D$  - характерный размер ( для трубопроводов обычно характерный диаметр трубы),  $\rho$  и  $v$  - соответственно плотность и скорость в потоке.

Рассмотрим два близких сечения в канале. Тогда закон сохранения массы запишется  $d(\rho v F) = dG$ , где  $F$  - площадь сечения,  $G$  - расход через стенки канала. Принимаем, что при втекании  $dG > 0$ . Из этой формулы получим важное рабочее соотношение

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dF}{F} = \frac{dG}{G}. \quad (4.1).$$

Сохранение количества движения в канале запишем в виде

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{\rho} d\ell_{Tp} - \frac{1}{\rho} d\ell_{Tex}. \quad (4.2)$$

Здесь предпоследний и последний члены означают, соответственно, потери количества движения за счет трения и других технических причин.

В качестве уравнения сохранения энергии будем использовать уравнение Бернулли в различных его вариантах.

Формулу (4.2) приводится к более удобному виду. Подставим сюда формулу Дарси - Вейбаха, условие баротропности ( $p(\rho)$ ), умножим на  $dx$ , разделим на  $a^2$  и подставим значение  $\frac{d\rho}{\rho}$ . В результате получим.

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = -\frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} - \lambda_{Tp} \frac{M^2}{2D} dx - \lambda_{Tex} \frac{M^2}{2D} dx. \quad (4.3).$$

#### 4.2 Основные формулы изоэнтропического течения.

При выводе основных соотношений используем:

скорость звука  $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ , изоэнтропичность  $\frac{p}{\rho^\gamma} = const$ , уравнение Клапейрона

$p = R\rho T$  и из термодинамики идеального газа  $C_p - C_v = R$ , где  $R$  - газовая

постоянная. Используем также понятие числа Маха  $M = \frac{v}{a}$  и коэффициента ско-

рости  $\lambda = \frac{v}{a_*}$ , где  $a_*$  - скорость, определяемая по параметрам потока, в котором

скорость газа, равна скорости звука. В этих обозначениях уравнение Бернулли, за-

писанное в форме  $\frac{v^2}{2} + C_p T = C_p T_0$ , примет вид:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2C_p T} = 1 + \frac{v^2}{2 \frac{C_p}{\gamma R} \gamma R T} = 1 + \frac{v^2 (\gamma - 1)}{2a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad (4.4).$$

Здесь индексом "0" обозначены параметры торможения при  $v = 0$ . Обозначим далее,

$$\tau(M) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad (4.5)$$

Из уравнения Бернулли в виде  $\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2$  получим

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \frac{M}{\tau(M)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.6)$$

Наоборот

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2}}. \quad (4.7)$$

Обозначим  $\tau(\lambda) = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2$ . Тогда, подставляя в (4.5) значение чисел Маха

через  $\lambda$ , имеем  $\tau(M) = \frac{1}{\tau(\lambda)}$ . Отношения температур (4.4) запишется

$$\frac{T_0}{T} = \tau(M) = \tau(\lambda)^{-1}.$$

Для скорости звука

$$\frac{a_0}{a} = \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \tau(M)^{\frac{1}{2}} = \tau(\lambda)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для плотности и давления из уравнения Клапейрона с учетом условия изоэнтропичности

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \tau(M)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \tau(\lambda)^{-\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{p_0}{p} = \tau(M)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \tau(\lambda)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

На основании приведенных соотношений для изоэнтропического течения запишем основные формулы, связывающие параметры потока газа в двух сечениях, в которых известны либо числа Маха (M), либо коэффициенты скорости ( $\lambda$ ).

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{\tau(M_2)}{\tau(M_1)} = \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_2)} \\ \frac{a_1}{a_2} &= \left( \frac{\tau(M_2)}{\tau(M_1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} &= \left( \frac{\tau(M_2)}{\tau(M_1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_2)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \frac{p_1}{p_2} &= \left( \frac{\tau(M_2)}{\tau(M_1)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_2)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{\tau(M_2)}{\tau(M_1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.3 Поток в канале переменного сечения.

Рассмотрим влияние изменения формы сечения на поток газа в канале. Для этого в уравнении (1.3) оставим только фактор изменения площади

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = - \frac{dF}{F} \quad (4.9).$$

Из этого уравнения видно, что при  $M < 1$  изменение скорости  $\frac{dv}{v} > 0$  если  $\frac{dF}{F} < 0$ .

Т.е. ускорение потока здесь достигается только сужением канала. При  $M > 1$  рост

скорости  $\frac{dv}{v} > 0$  будет достигаться, если площадь канала  $\frac{dF}{F} > 0$  расширяется.

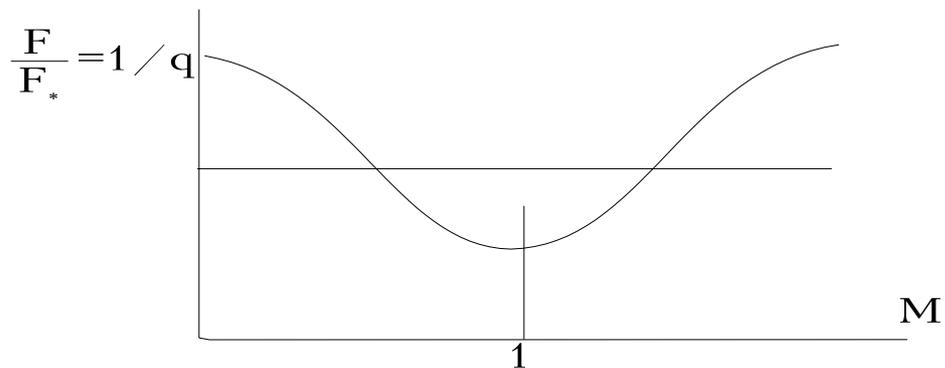
При  $M=1$  и  $dF=0$ . Таким образом, для разгона потока из состояния при  $M < 1$  до состояния при  $M > 1$  необходимо сначала сужать канал до значения  $M=1$ , а затем расширять его при  $M > 1$ .

Закон изменения площади следует из сохранения расхода  $\rho_1 v_1 F_1 = \rho v F$ . Отсюда, обозначив через  $F_*$  - площадь, где  $M=1$ , получим[3]

$$\frac{F_*}{F} = q(M) = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} M \cdot \tau(M)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) связывает форму канала с числом Маха потока.

Вместе с набором соотношений (4.8) она дает полную информацию о потоке в канале. Зависимость (4.10) показана на рис.4.1. Она определяет канал, который может обеспечить разгон потока до сверхзвуковых скоростей. Сопло такой формы называют *соплом Лавала*. Левая ветвь на рисунке соответствует дозвуковому течению, правая - сверхзвуковому.



нию, правая - сверхзвуковому.

Рис.4.1

Из рисунка видно, что одной и той же площади сечения канала может соответствовать два значения чисел Маха. Это означает, что при сужении канала поток, достигнув скорости звука, может снова иметь решение, соответствующее левой

ветви, если не будут выполнены дополнительные условия. Для пояснения сказанного рассмотрим поведение давления вдоль оси канала, у которого площадь меняется как показано на рис.4.1. Пусть течение из канала происходит в затопленное пространство с давлением  $p'$ . Обозначим давление на выходе из канала при движении по левой ветви (рис.4.1) через  $p_2$ , по правой - через  $p'_2$  (рис.4.2).

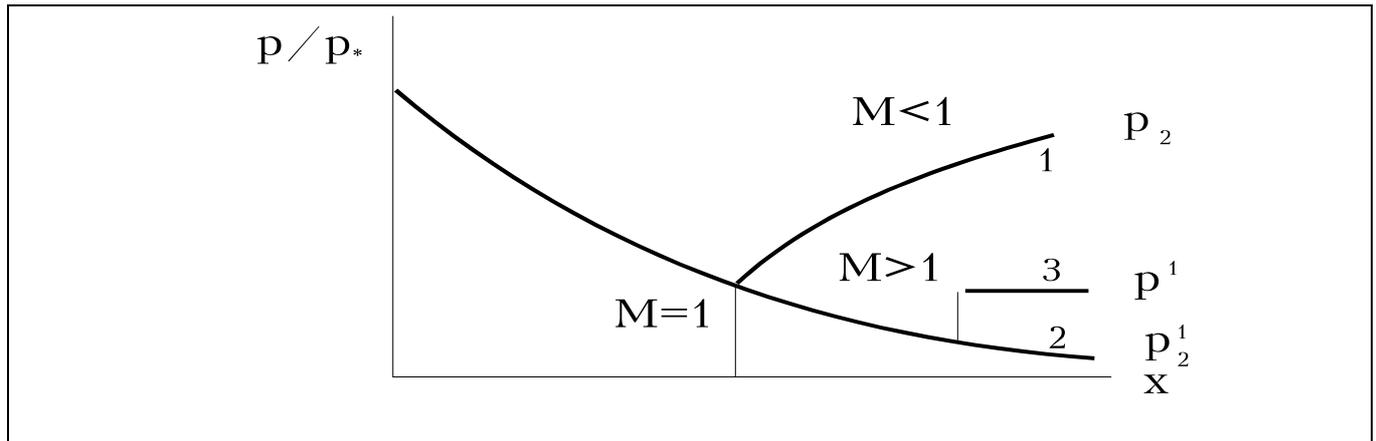


Рис.4.2

Очевидно, что при разгоне потока до стационарного состояния, решение бу-

дет всюду дозвуковым, если  $\frac{p'}{p_*} \geq \frac{p_2}{p_*}$ . Течение станет сверхзвуковым при  $\frac{p'}{p_*} \leq \frac{p_2}{p_*}$  и

появится внутренний скачок при  $\frac{p_2}{p_*} > \frac{p'}{p_*} > \frac{p_2^1}{p_*}$ .

#### 4.4 Движение с подогревом газа.

Предположим, что адиабатичность одномерного стационарного потока идеального газа нарушается тем, что в некотором тонком по ширине слое к газу подводится извне тепло. Это изменяет температуру газа  $(T_1)$  и температуру торможения газа  $(T_{01})$  в потоке на величину,

соответственно,  $\Delta T = T_2 - T_1$  и  $\Delta T_0 = T_{02} - T_{01}$  (рис.4.3)

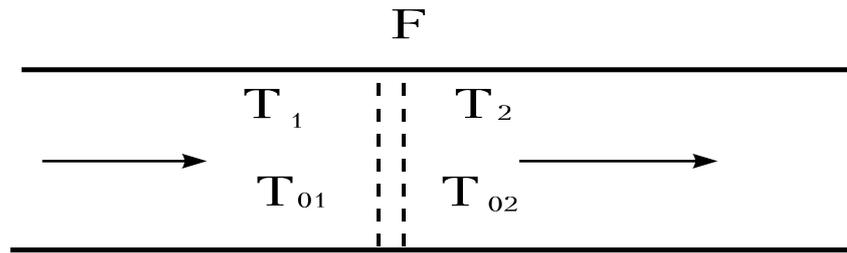


Рис.4.3

На участке за сечением подогрева устанавливается адиабатическое течение.

Рассмотрим изменение параметров потока газа при переходе через слой подогрева.

В этом слое можно принять: площадь  $F = \text{const}$ , выполняются законы сохранения массы и количества движения. В этом случае, так как

$$\rho v = \frac{\gamma p v}{\gamma p / \rho} = \gamma p \frac{M}{a} = \frac{\gamma p M}{\sqrt{RT}}$$

из закона сохранения массы

$$\frac{\gamma p M}{\sqrt{RT}} = \text{const} . \quad (4.11)$$

Из закона сохранения количества движения

$$p + \rho v^2 = p \left( 1 + \gamma \frac{\rho v^2}{\gamma p} \right) = p(1 + \gamma M^2) = \text{const} . \quad (4.12)$$

Деля (4.12) на (4.11) получим

$$\frac{1 + \gamma M_1^2}{M_1} \sqrt{T_1} = \text{const} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{M_2} \sqrt{T_2} . \quad (4.13)$$

С помощью  $\Delta T$  из (4.13) имеем уравнение для определения  $M_2$

$$\gamma M_2^2 - \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{M_1^2} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T_1}}} \right) M_2 + 1 = 0. \quad (4.14)$$

Здесь  $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$ . Определив значение  $M_2$  из уравнения (4.12) находим  $p_2$ :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}. \quad (4.15)$$

Скорость звука  $a_2 = \text{const} \sqrt{T_2}$ , отсюда

$$v_2 = M_2 a_2. \quad (4.16)$$

Значение  $\rho_2$  определяется из уравнения Клапейрона  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}$ . Далее расчет

параметров потока проводится по известным соотношениям адиабатического изоэнтропического течения в канале. Оценим влияние нагрева на число Маха. Обозна-

чим в (4.3)  $\Phi(M) = \frac{M}{1 + \gamma M^2}$ , тогда  $\Phi(M_2) = \Phi(M_1) \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ ,

$$\frac{d\Phi(M)}{dM} dM = \frac{(1 - M^2) dM}{(1 + \gamma M^2)} = \frac{\Phi(M_1)}{2\sqrt{T_1 T_2}} dT_2. \quad (4.17)$$

Из (4.17) видно, что при  $dT_2 > 0$  и  $M < 1$  приращение  $dM > 0$  и, соответственно, при  $M > 1$  -  $dM < 0$ . Т.е. при дозвуковых скоростях потока подвод тепла приводит к увеличению числа Маха, при сверхзвуковых скоростях - к уменьшению числа  $M$ .

### Теория идеального прямого реактивного двигателя (ВРД).

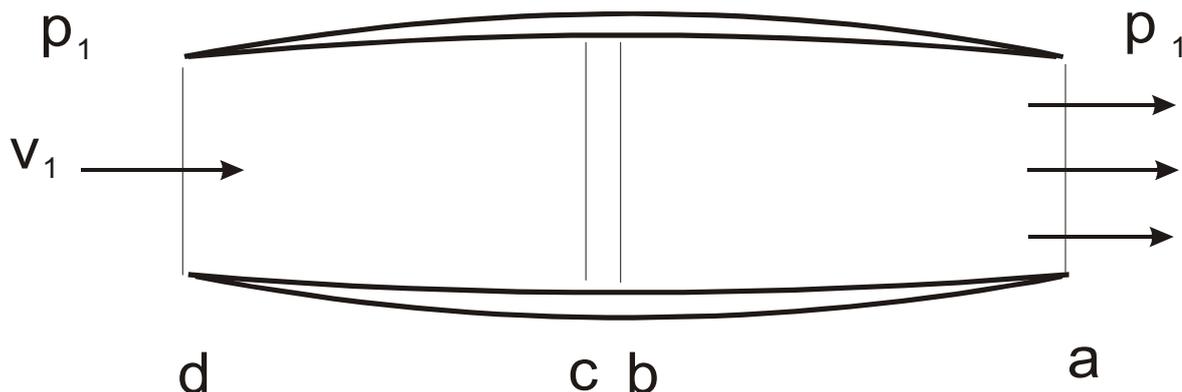


Рис.4.4

В идеальном прямооточном ВРД воздух перед подводом тепла адиабатически тормозится, затем к нему подводится тепло так, что  $C_p T_{ob} = C_p T_{oc} + q$ ,  $p_{ob} = p_{oc}$ . После этого газ разгоняется до  $p = p_a = p_d$ . В двигателе в сечении "с" температура торможения

$$T_0 = T_{0d}, \quad p_0 = p_{0d} = \frac{P_d}{(1 - \Lambda_d^2)^{\gamma/\gamma-1}}$$

$$, \text{ где } \Lambda_d = \frac{v_d}{v_{\max}} = \sqrt{\frac{v_d^2}{2 C_p T_{0d}}}, \text{ так как } v_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2 C_p T_{0d}}}.$$

В сечении "b" и на выходе из двигателя

$$T_0 = T_{0b}, \quad p_{0b} = \frac{P_d}{(1 - \Lambda^2)^{\gamma/\gamma-1}},$$

$$\text{где } \Lambda = \frac{v_a}{v_{\max}}.$$

А так как  $p_{0b} = p_{0c} = p_{0d}$ , то

$$\frac{P_d}{(1 - \Lambda_d^2)^{\gamma/\gamma-1}} = \frac{P_d}{(1 - \Lambda^2)^{\gamma/\gamma-1}} \text{ или } \Lambda = \Lambda_d.$$

Значит  $\frac{v_d}{\sqrt{C_p T_{od}}} = \frac{v_a}{\sqrt{C_p T_{ob}}}$  или  $v_a = v_d \sqrt{\frac{T_{ob}}{T_{oc}}} = v_d \sqrt{1 + \frac{q}{2C_p T_{od}}}$ .

Тяга двигателя  $T = \Delta Q$ , где  $Q = Gv$  - количество движения,  $G$  - расход. Таким образом,

$$T = Gv_d \left( \sqrt{1 + \frac{q}{2C_p T_{od}}} - 1 \right). \quad (4.8)$$

Из (4.8) видно, что прямоточный ВРД может развивать тягу только в полете.

При  $v_d = 0$  тяга  $T=0$ .

Аналогичную теорию идеального турбокомпрессорного реактивного двигателя можно найти в книге [1]

### Литература

1. Г.Г. Черный "Газовая динамика", Наука, 1988г.
2. Г.Н. Абрамович "Прикладная газовая динамика", Наука, 1969г.
3. Л.Г. Лойцянский, "Механика жидкости и газа", Наука, 1987г.
4. Л.И. Седов "Методы подобия и размерности в механике", ТТЛ, М., 1957г.
- У.Г. Пирумов, Г.С. Росляков "Газовая динамика сопел", Наука, 1990г.

## Глава 5. ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

### 5.1 Уравнения движения

В практических приложениях нестационарные течения газа - самые распространенные. При этом, многие из них целиком или фрагментарно могут быть аппроксимированы движением, зависящим от времени и одной геометрической ве-

личины, например, радиусов при сферической или цилиндрической симметрии или одной из осей в декартовой системе координат. В этом случае могут быть получены простые, приближенные решения уравнений газовой динамики и получены многие свойства нестационарных течений. В дальнейшем будем рассматривать газодинамические параметры: скорость  $v$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$ , энтропию  $S$ , как функции двух независимых переменных: координаты  $x$  и времени  $t$ . В плоскости  $x, t$  легко показать любые перемещения, которые здесь представляются в виде кривых с наклоном касательной, зависящим от скорости. Течение будем рассматривать в канале постоянного сечения. Течение будем считать невязким и обратимым, кроме отдельных линий (линий разрыва), на которых энтропия вдоль линии тока может меняться. Уравнения движения газа (сохранения массы, количества движения и энергии) в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

## 5.2 Инварианты Римана. Волны в газе

Уравнения (5.1) могут быть еще упрощены приведением их к характеристической форме. Попытаемся найти такое направление  $q$  на плоскости  $x, t$  вдоль которого система (5.1) может быть сведена к решению от одной переменной. Допустим, что такое направление существует и течение баротропно. Если при выводе придем к противоречию, то "направление  $q$ " не существует. Итак, из баротропности следует:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2; \quad P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{a^2} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (5.2)$$

где  $a$  - скорость звука. Введем также функцию  $\bar{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{a\rho}$ .

Для этой функции

$$d\bar{P} = \frac{1}{a} dP = \frac{1}{a} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = a \frac{d\rho}{\rho}.$$

А так как  $\frac{da}{a} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{d\rho}{\rho}$ , то  $d\bar{P} = \frac{2}{\gamma-1} da$  или  $\bar{P} = \frac{2}{\gamma-1}(a - a_0)$ , где  $a_0$  - некоторая

константа.

Используя соотношения (5.2) в системе (5.1) для уравнений неразрывности и сохранения количества движения получим [5], что в области решения существуют такие направления, вдоль которых выполняются условия

$$\frac{dx}{dt} = (v \pm a) \text{ и } \partial(\bar{P} \pm v) = 0. \quad (5.3)$$

Причем таких направлений два. Назовем их характеристиками соответственно первого (для верхнего знака) и второго (для нижнего знака) семейств, т.е. имеем

$\bar{P} + v = r$  вдоль кривой  $\frac{dx}{dt} = v + a$  и  $\bar{P} - v = s$  вдоль кривой  $\frac{dx}{dt} = v - a$ . Константы

$r$  и  $s$  называют *инвариантами Римана*. Для них после подстановки  $\bar{P}$  окончательно запишем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma-1}(a - a_0) + v = r \text{ при } \frac{dx}{dt} = v + a; \\ \frac{2}{\gamma-1}(a - a_0) - v = s \text{ при } \frac{dx}{dt} = v - a. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Уравнения (5.4) показывают, что скорость распространения возмущений равна скорости звука в покоящемся газе. Из (5.4) следует также, что скорость распространения возмущения по покоящемуся газу  $a = a_0 - \frac{\gamma - 1}{2} v$ . А так как  $a > 0$ , скорость газа в потоке

$$v \leq a_0 \frac{2}{\gamma - 1}. \quad (5.5)$$

Группы характеристических кривых одного семейства образуют так называемые "волны". Если поток газа при пересечении волны сжимается ( $\frac{\partial \rho}{\partial v} > 0$ ), то такая волна называется *волной сжатия* и наоборот ( $\frac{\partial \rho}{\partial v} < 0$ ) - *волной разрежения*. Если возможно указать такую точку, которая может быть условным центром веера волн, то такая волна называется *центрированной*. Вид характеристических кривых, вообще говоря, произвольный. Пример поведения центрированных волн на плоскости  $x, t$  показан на рис.5.1.

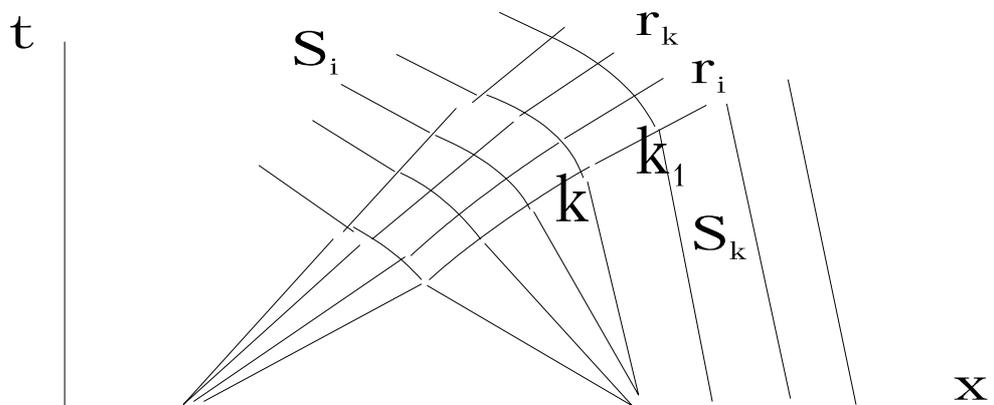


Рис.5.1

Если волна примыкает к области с равномерным потоком, то она называется *простой*. Простая волна обладает важным свойством, которое получим из анализа рис.5.1. Действительно, пусть волна первого семейства с инвариантами  $r_i$  примыкает к равномерному потоку справа. Параметры в точке на пересечении характеристик  $r_k$  и  $s_k$  определяются из решения системы (5.7), в которой  $r_k$  определяется по параметрам потока слева,  $s_k$  - по параметрам потока, примыкающего к волне справа. Аналогично определим параметры потока в точке  $K_1$ . Но вдоль кривой первого семейства  $r_k = const$  и  $s_k = const$ , так как во всех точках примыкающей области параметры одинаковы. Значит, в системе (5.4)  $r_k$  и  $s_k$  одинаковы как для точки  $K$ , так и для точки  $K_1$ . Отсюда  $v_k = v_{k1}$ ,  $a_k = a_{k1}$  и как следствие  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_k = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{k1}$ .

Этот вывод справедлив для всех характеристик волны. Таким образом, *вдоль простой волны* параметры потока постоянны и наклон каждой характеристики в волне не меняется (веер прямолинейных характеристик).

Сопоставим теперь значения максимальных скоростей в нестационарном и стационарном течении. Из (5.5) для нестационарного течения  $U_{\max} = a_0 \frac{2}{\gamma - 1}$ ,

где  $a_0$  - скорость звука при  $v=0$ . Для стационарного течения из уравнения Бер-

нулли  $\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{\max}^2}{2}$ . Отсюда,  $v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \cdot a_0$ . Таким образом,

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \cdot v_{\max}, \text{ т.е. } U_{\max} > v_{\max}.$$

### 5.3 Элементарная теория ударной трубы

Среди задач нестационарной газовой динамики важную роль играют так называемые *произвольные разрывы*. Это такие разрывы, на которых не соблюдены законы сохранения по разные стороны разрыва. Например, в канале по разные стороны перегородки расположены разные газы с различными параметрами. Задача состоит в определении нестационарного процесса после начала взаимодействия потоков (перегородка убрана).

В качестве примера рассмотрим *элементарную теорию ударной трубы*. Ударная труба представляет собой канал, в одной части которого содержит газ под высоким давлением, в другой части, за мембраной, давление остается малым. После разрушения мембраны процесс развивается по сценарию (рис.5.2), в котором волна разрежения образуется характеристиками второго семейства

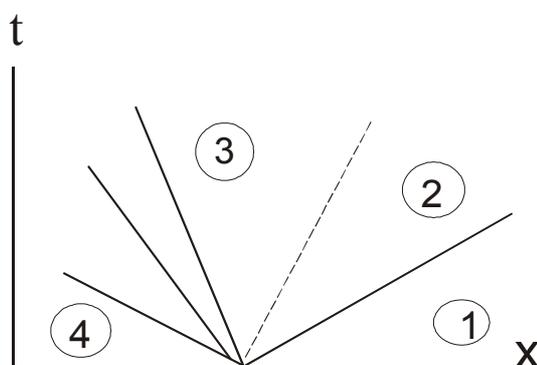


Рис. 5.2

В этом случае параметры в области 1 и 4 известны. Исследуемая модель помещается в зону 3. Искомые параметры в трубе:  $f=(v,p,\rho,a)$ , где  $v$  - скорость;  $p$  - давление;  $\rho$  - плотность;  $a$  - скорость звука во всех областях. Для решения задачи,

обозначая через  $C$  - скорость скачка и через  $M$  - число Маха скачка, имеем соотношения:

$$1) \frac{p_3}{\rho_3^\gamma} = \frac{p_4}{\rho_4^\gamma} \text{ из условия сохранения энтропии вдоль линии тока при пересечении ею волны разрежения;}$$

2)  $v_3 + \frac{2}{\gamma - 1} a_3 = r = v_4 + \frac{2}{\gamma - 1} a_4$  из сохранения инварианта Римана вдоль

характеристики первого семейства в области "1" и "3";

$$3) a_3^2 = \frac{\mathcal{P}_3}{\rho_3} \text{ по определению скорости звука;}$$

$$4,5) p_3 = p_2, v_3 = v_2 \text{ условия на контактном разрыве;}$$

$$6) a_2^2 = \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2};$$

$$7) \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \text{ условие на скачке;}$$

$$8) \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{M^2 - 1}{\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{\gamma - 1}{2} (M^2 - 1)} \text{ условие на скачке;}$$

$$9) \frac{v_2 - v_1}{a_1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left( M - \frac{1}{M} \right) \text{ условие на скачке, которое следует из формулы}$$

$$(C - v_1)(C - v_2) = a_*^2.$$

Таким образом, имеется девять уравнений для определения девяти неизвестных:  $f_2, f_3$ , где  $f_i(v_i, p_i, \rho_i, a_i)$  и  $M$ . Для решения системы принимаем переменную  $M$  за известный параметр и исключаем в системе все неизвестные функции. В результате, для определения величины  $M$  получим нелинейное алгебраическое урав-

нение, корень которого может быть найден или графически или численно методом последовательных приближений. Остальные параметры вычисляются прямой подстановкой.

### 5.4 Метод характеристик

Присутствие характеристик в потоке и инвариантов Римана на них позволяет легко получить приближенное решение многих задач нестационарной газодинамики с помощью метода характеристик. Поясним метод на примере элементарной ячейки (рис.5.3).

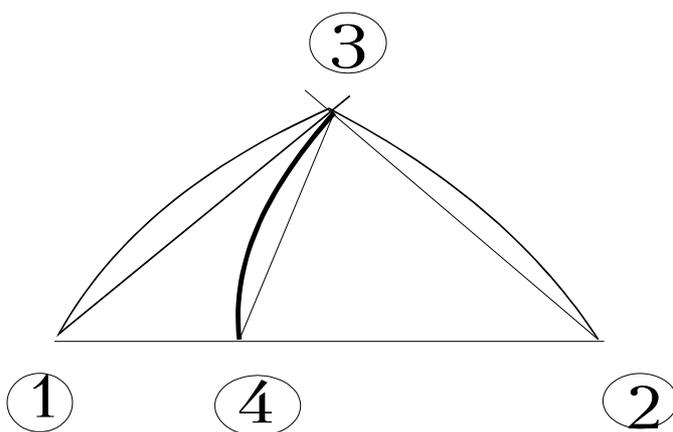


Рис.5.3

Пусть в точках 1 и 2 известны координаты и все параметры потока.

Через каждую из них можно провести характеристики трех семейств: характеристики двух семейств согласно формулам (5.7). В качестве третьего семейства служит линия тока, вдоль которой сохраняется энтропия

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C \text{ и } \frac{dx}{dt} = v. \quad (5.6)$$

Вдоль характеристики первого семейства, проходящей через точку 1, справедливы соотношения

$$v + \frac{2}{\gamma - 1} a = r_1; \quad \frac{dx}{dt} = v + a, \quad (5.7)$$

где  $r_1$  определяется по данным в точке 1. Вдоль характеристики второго семейства, проходящей через точку 2 справедливо

$$v - \frac{2}{\gamma - 1} a = S_2; \quad \frac{dx}{dt} = v - a. \quad (5.8)$$

Тогда в точке 3, лежащей на пересечении этих характеристик, получим

$$v_3 = \frac{r_1 + S_2}{2}; \quad a_3 = \frac{\gamma - 1}{4} (r_1 - S_2). \quad (5.9).$$

Пусть на начальной линии 1 - 2 есть точка 4, которая подобрана так, что линия тока, проходящая через точку 4 с известными параметрами, проходит также через точку 3, т.е.

$$\frac{p_3}{\rho_3^\gamma} = C_4, \quad (5.10)$$

Из этого соотношения, используя (5.9), получим

$$\rho_3 = \left( \frac{a_3^2}{\gamma_{,,4}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad p_3 = \gamma^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} a_3^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} C_4^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} \quad (5.11)$$

Для определения координат точек 3 и 4 используем приближенное конечно - разностное представление дифференциальных уравнений в (5.6), (5.7), (5.8)

$$\left. \begin{aligned} x_3 - (v + a)_1 t_3 &= x_1 - (v + a)_1 t_1 \\ x_3 - (v - a)_2 t_3 &= x_2 - (v - a)_2 t_2 \end{aligned} \right\}; \quad (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} x_4 - v_3 t_4 &= x_3 - v_3 t_3 \\ x_4 - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} t_4 &= x_1 - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} t_1 \end{aligned} \right\}. \quad (5.13)$$

Система двух линейных уравнений (5.12) однозначно определяет координаты  $x_3, t_3$ .

Затем из системы (5.13) находим  $x_4, t_4$ . Параметры потока, и, следовательно,  $C_4$  можно получить интерполированием по линии 1 - 2.

Изложенная процедура решения газодинамической задачи для ячейки лежит в основе решения этой задачи во всем потоке.

**Задача Коши.** Пусть на плоскости  $x, t$  вдоль некоторой кривой, не совпадающей ни с одной характеристикой, известны начальные значения потока (рис.5.4)

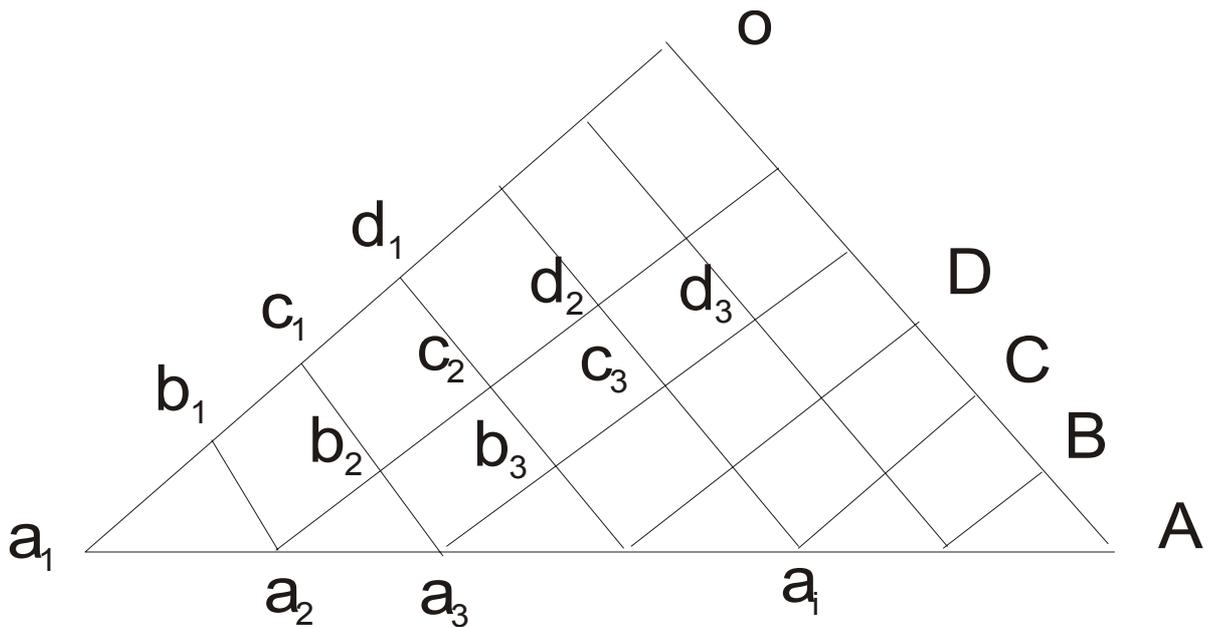


Рис.5.4

Из каждой точки  $a_i$  выпускаем характеристики до пересечения в точках  $b_i$ . Координаты точек и параметры потока в них находим как показано выше. Затем процесс повторяется для точек  $c_i$  и т.д. Так можем получить решение в треугольной области  $a_1OA$ . Если линия  $a_1A$  лежит на одной из характеристик, изложенную

процедуру применить не удастся. Задача может быть решена, если начальные данные заданы и на характеристике другого семейства (рис.5.5).

**Задача Гурса.** Пусть на линии  $OA$ , которая является характеристикой одного из семейств, заданы точки  $a_1, a_2, \dots$  и параметры потока в них. Пусть на линии  $O \div O_1$ , которая является характеристикой другого семейства, также заданы точки  $O, O_1, O_2, \dots$  и параметры потока в них. Выпуская из точки  $a_1$  характеристику второго семейства до пересечения с характеристикой первого семейства, выпущенной из точки  $O_1$ , получим характеристический треугольник  $O_1 b_1 a_1$ . Параметры потока и координаты точки  $b_1$  найдем уже известным способом. Далее процесс повторяется для треугольника  $b_1 b_2 a_2$  и т.д. Точно так же строим ряд точек  $c_1, c_2, \dots$  и т.д. (рис. 5.5).

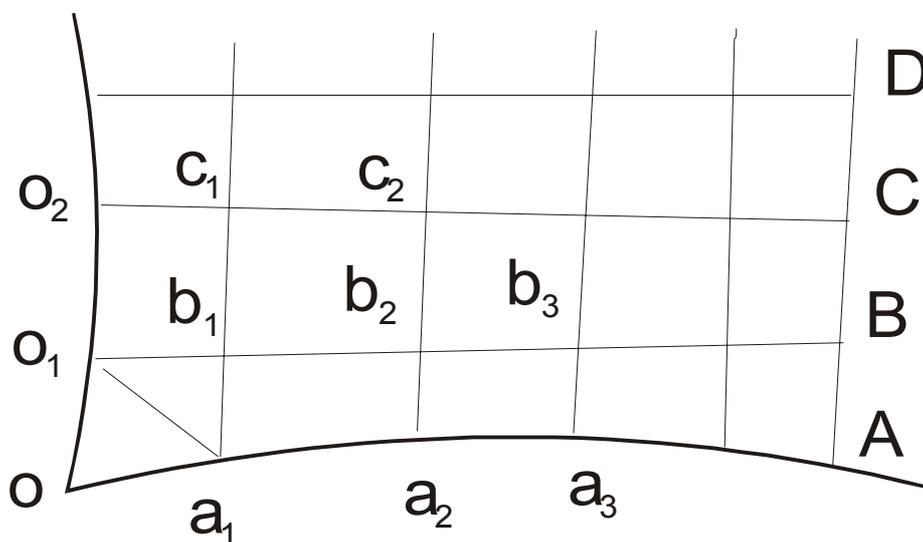


Рис.5.5

**Граничные условия.** Для решения газодинамических задач в некоторой геометрической области необходимо учитывать не только начальные данные, но и условия на ее границах. Очевидно, что если точка  $z$  в элементарной ячейке лежит

на границе, исключая влияние точек 1 либо 2, то решение задачи в смысле (5.6)÷(5.13) невозможно. В этом случае необходимо задать другие (граничные) условия, компенсирующие выпавшие характеристические соотношения. При этом число граничных условий должно быть равно числу характеристик, выходящих из граничной точки.

### Пример. Расчет вблизи движущейся стенки (поршня)

Процесс вычисления проследим на примере элементарной ячейки (рис.5.6).

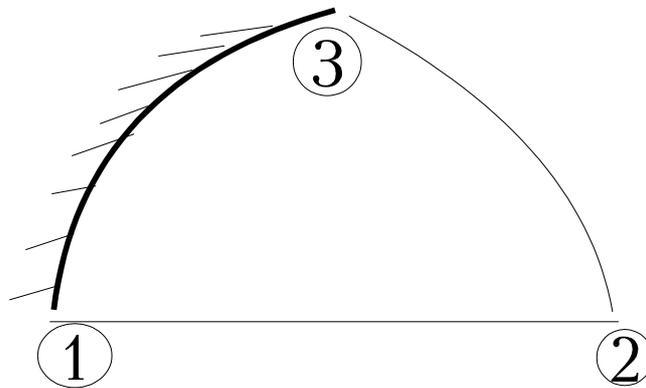


Рис.5.6

Пусть уравнение движения стенки  $x_3 = \varphi(t_3)$ , откуда

$$v_3 = \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t_3}. \quad (5.14)$$

Пусть на стенку приходит характеристика только второго семейства из точки 2 и поток на линии 4 - 2 известен. Точка 1 (рис.5.3) и соответствующая ей характеристика отсутствуют. Однако имеется одно дополнительное условие (5.14). Кривая  $x = \varphi(t)$  - есть уравнение линии тока. Таким образом, в решении задачи в соответ-

ствии с (5.7)÷(5.13)  $x_4, t_4, c_4, x_3, t_3, v_3$  известны. Следовательно, из (5.9) известно  $a_3$ , а из (5.11) определим плотность  $\rho_3$  и давление  $p_3$ .

### Литература

1. Зауэр Р. Нестационарные задачи газодинамики. -М: Мир, 1969.
2. Черный Г.Г. Газовая динамика. -М: Наука, 1988.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М-: Наука, 1987.
4. Станюкович К.П. Нестационарные движения сплошной среды. -М: Гостехиздат, 1955.

## Глава 6. ПЛОСКИЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Среди течений, имеющих большое прикладное значение в авиации и в то же время допускающих простые решения, плоские сверхзвуковые течения занимают одно из главных мест.

### 6.1 Характеристики в плоском сверхзвуковом течении

Как было показано в гл.5, применение характеристических соотношений приводит к существенному упрощению решения многих задач. Для потенциальных течений в [5] показано, что уравнения газовой динамики могут быть сведены к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка относительно потенциала

$$(v_x^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (v_y^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (6.1)$$

где  $v_x, v_y, a$ - соответственно составляющие скорости потока в декартовой системе координат  $X, Y$  и скорость звука. А функция  $\varphi$  - потенциал скорости, который сле-

дует из условия отсутствия вихря  $\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$  и определяет скорость как

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Наклон вектора скорости к оси  $X$  обозначим через  $\theta$ . Как и в гл 5 под характеристическим направлением будем понимать такое направление, при котором параметры потока - функции одного аргумента. Из теории дифференциальных уравнений характеристическое направление ( $\frac{dy}{dx} = m$ ) для уравнения (6.1) удовлетворяет

соотношению

$$m^2 - 2 \frac{v_x v_y}{v_x^2 - a^2} m + \frac{v_y^2 - a^2}{v_x^2 - a^2} = 0. \quad (6.2)$$

Это квадратное алгебраическое уравнение, решение которого можно записать

$$m_{1,2} = \frac{v_x v_y \pm a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}. \quad (6.3)$$

Причем, если решение уравнения (6.2) существует, то по теореме Виетта

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{v_x v_y}{v_x^2 - a^2}, \quad m_1 \cdot m_2 = \frac{v_y^2 - a^2}{v_x^2 - a^2}. \quad (6.4)$$

Из уравнения (6.3) следует, что в случае дозвуковых скоростей ( $v < a$ ) существуют только мнимые корни. При  $v > a$  корни действительные. Определим наклон характеристики к линии тока.

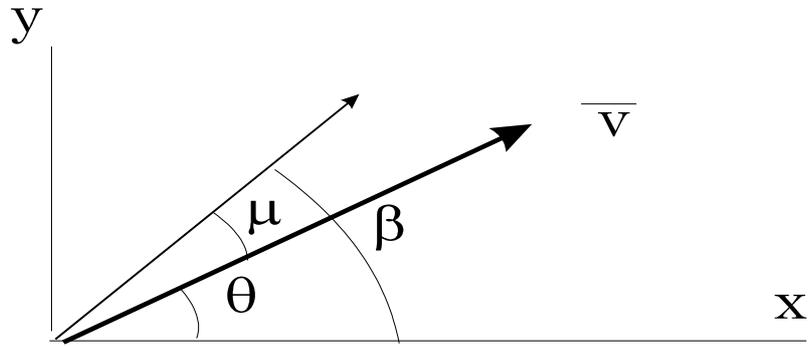


Рис. 6.1

Из рис. (6.1) видно, что если  $\beta$  наклон характеристики,  $\theta$  наклон вектора скорости, то угол между характеристикой и вектором скорости  $\mu = \beta - \theta$ . Отсюда, так как

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x},$$

$$\operatorname{tg}(\mu) = \left( m - \frac{v_y}{v_x} \right) / \left( 1 + m \frac{v_y}{v_x} \right) = \pm \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \pm \frac{1/M}{\sqrt{1 - 1/M^2}},$$

т.е.  $\sin(\mu) = \pm 1/M$  и  $m_{1,2} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu)$ . (6.5)

Область, ограниченная линиями под углом  $\pm \mu$  к вектору скорости называется *конусом Маха*.

Соотношения вдоль характеристики в плоскости годографа [2] принимает вид

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\operatorname{ctg}(\theta \mp \mu). \quad (6.6)$$

Или выражая полученное соотношение через угол наклона вектора скорости и число Маха ( $M$ ) получим [2]

$$d\theta = \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\tau(M)} \cdot \frac{dM}{M}.$$

После интегрирования последнего выражения, окончательно имеем соотношения вдоль характеристик

$$\begin{aligned} 1.) \theta + H(M) &= C_r, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu), \\ 2.) \theta - H(M) &= C_s, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$H(M) = - \left[ \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right) - \operatorname{arctg} \left( \sqrt{M^2 - 1} \right) \right].$$

Функция  $H(M)$  называется *эпциклоидой*, она табулирована и играет определяющую роль в методе характеристик. Проведя сопоставление соотношений (6.7) с соотношениями (5.4) гл 5, видим, что константы  $C_r$  и  $C_s$  имеют смысл аналогичный инвариантам Римана. К характеристическим инвариантам (6.7) следует добавить еще соотношение вдоль линии тока, которое при постоянной энтропии запишем

$$3.) p/\rho^\gamma = C, \quad dy/dx = \operatorname{tg}(\theta). \quad (6.8)$$

## 6.2 Метод характеристик

Рассмотрим применение метода характеристик.

По аналогии с гл 5 рассмотрим малый характеристический треугольник (рис 6.2), в котором точки 1 и 2 лежат на нехарактеристической линии с известными параметрами.

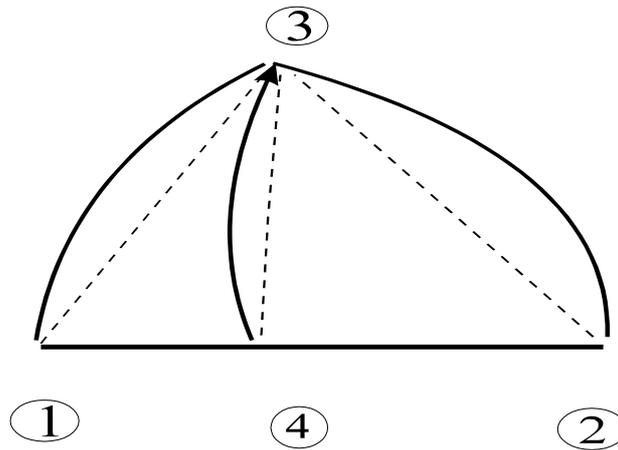


рис. 6.2

Из точки 1 направляем характеристику первого семейства

$$\theta + H(M) = C_r, \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu). \quad (6.9)$$

Из точки 2 направляем характеристику второго семейства

$$\theta - H(M) = C_s, \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu). \quad (6.10)$$

Из точки 4 - линию тока

$$p / \rho^{\gamma} = C_4, \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta). \quad (6.11)$$

Точка 3 есть точка пересечения линий 1 - 3, 2 - 3 и 4 - 3. Дальнейшие действия для расчета методом характеристик полностью аналогичны приемам, изложенным в главе 6 для нестационарных одномерных уравнений.

Получив уравнения, сходные с соответствующими уравнениями гл 5, действуем по описанному там алгоритму. При этом можем утверждать, что решение в точке 3 существует, что в рассматриваемой области течения могут быть решены задачи Коши и Гурса. Для граничной задачи, когда точка 3 лежит на границе, также необходимы граничные условия, число которых равно числу выходящих из точки

характеристик. При этом необходимо действовать с поправкой на различие соотношений для плоского и одномерного нестационарного течений. Замеченное сходство между характеристическими соотношениями в плоском сверхзвуковом течении и в одномерном нестационарном течении позволяет использовать введенные ранее понятия. А именно: волны сжатия и разрежения, простая волна, центрированная волна и т.д.

### 6.3 Обтекание сверхзвуковым равномерным потоком выпуклого угла (течение Прандтля - Майера)

Использование характеристических соотношений позволяет без труда определять течение около тупого угла, показанного на рис 6.3

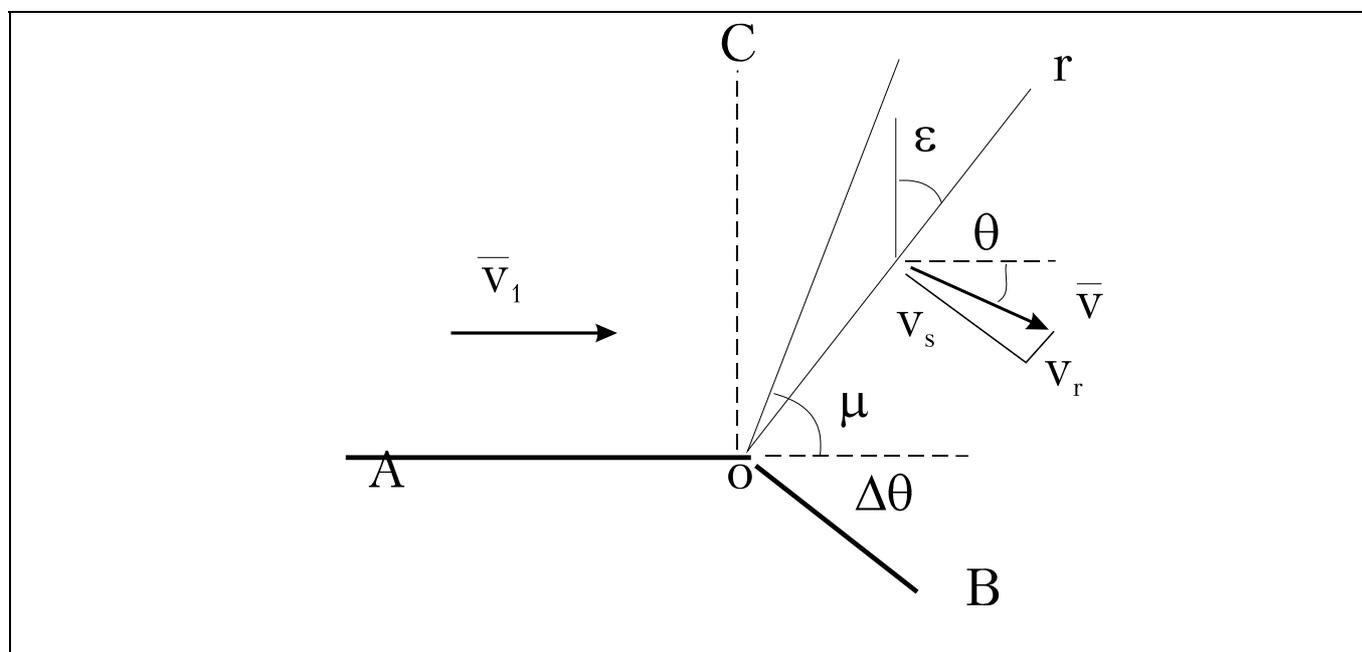


рис.6.3

Однако в ряде случаев широко используется решение этой задачи, полученное другим способом. Рассмотрим обтекание угла  $AOB$  в полярной системе координат

$(r, \varepsilon)$  с центром в точке "O". Угол  $\varepsilon$  - между характеристикой и прямой  $OC$ , вектор  $r$  направлен по характеристике, выходящей из точки "O". В этой системе для потенциала  $\varphi$  можно записать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r(\varepsilon), \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \varepsilon} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = v_s(\varepsilon) \quad (6.12)$$

На характеристике (вдоль  $r$ ), так как образуется простая волна, параметры потока постоянны. Кроме того, скорость по нормали к характеристике равна скорости звука. Поэтому с учетом (6.12) можем записать:  $v_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon \partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (r v_s) = v_s, \quad (6.13)$$

отсюда  $\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{dv_r}{d\varepsilon} \right)^2$ . Подставляя полученные выражения в уравнение Бернулли

$$\frac{v_r^2 + v_s^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{v_{\max}^2}{2} \text{ получим } \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( \frac{dv_r}{d\varepsilon} \right)^2 + v_r^2 = v_{\max}^2.$$

После интегрирования это уравнение дает решение

$$v_r = v_{\max} \sin \left( \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cdot \varepsilon_* \right), \quad (6.14)$$

где  $\varepsilon_* = \varepsilon + \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  - постоянная интегрирования. Остальные параметры согласно (6.22) и из условия изоэнтропийности запишутся в виде

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cdot v_{\max} \cos \left( \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cdot \varepsilon_* \right) \quad (6.15)$$

$$p = p_0 \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \cos^2 \left( \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cdot \varepsilon_* \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\rho = \rho_0 \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \cos^2 \left( \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cdot \varepsilon_* \right) \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$
(6.16)

где  $p_0, \rho_0$  - соответственно давление и плотность торможения.

Получим уравнение линии тока. Расход  $Q = \rho v_s r = const$ . Подставим сюда  $v_s$  и  $\rho$ . В результате для линии тока

$$r = \frac{const}{\left[ \cos \left( \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cdot \varepsilon_* \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}$$
(6.17)

Описанный подход применим для построения несимметричного сопла гиперзвукового летательного аппарата. Пусть на входе в сопло имеем сверхзвуковой поток с числом Маха  $M_0$  (рис.6.4). Требуется разогнать поток до скорости  $M_1$  при сохранении направления скорости.

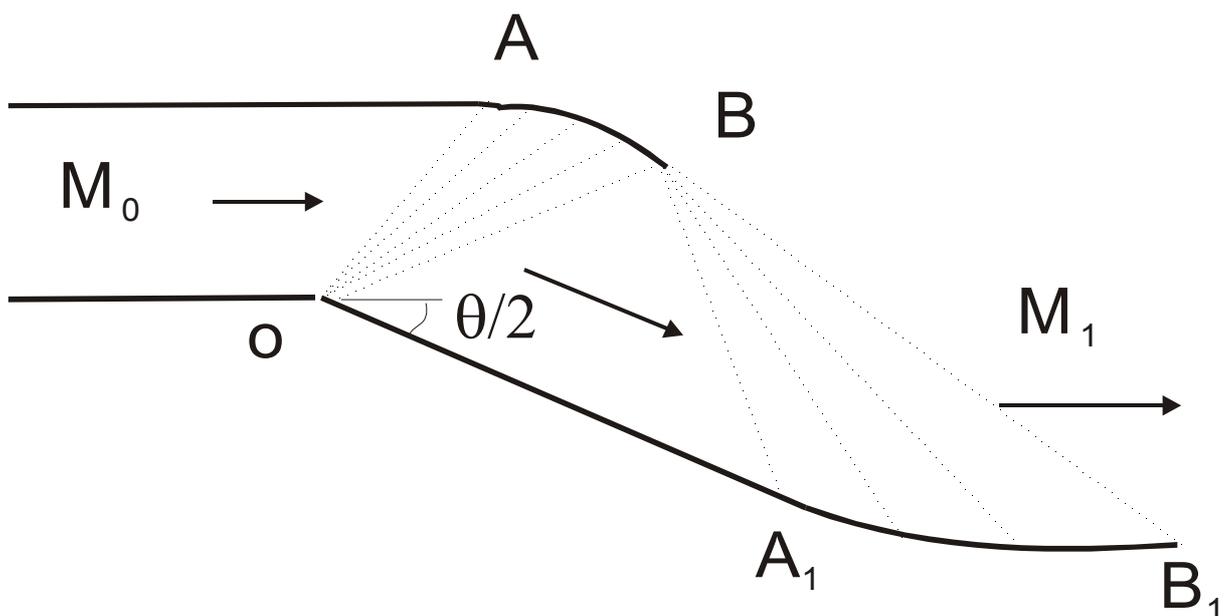


Рис. 6.4

Из (6.9) с очевидностью следует, что для разгона потока от числа  $M = M_0$  до числа  $M = M_1$  можно развернуть поток в течении Прандтля - Майера на некоторый угол  $\theta$ . Но, учитывая, что результирующий поток должен сохранить направление начального, естественно сначала расширить течение разворотом на угол  $\theta/2$ , около точки "O" и затем расширить разворотом на угол  $\theta/2$  вокруг точки "B" уже в обратную сторону. При этом, уравнение дуги  $AB$  определим по формуле (6.17). Форма дуги  $A_1B_1$  определяется аналогично.

### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. -М.: Наука, 1986.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика - М.: ФМЛ, 1963, -Т. 1, 2,
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды -М.: Наука, 1983.
4. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. -М.: Наука, 1969.
5. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн - М.: Наука, 1977.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики -М.: Наука, 1973.

### Глава 7 ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Теория гиперзвуковых течений, получившая развитие в шестидесятые годы в связи с созданием ракетной техники, испытывает в настоящее время новый подъем в связи с ростом интереса к разработкам воздушно - космических летательных аппаратов.

Течение газа называют *гиперзвуковым*, если в большей части рассматриваемой области течения скорость потока значительно превышает скорость звука:  $M^2 \gg 1$ . Особенность этого течения состоит в том, что здесь поток необходимо рассматривать в двух аспектах: в кинематическом и термодинамическом. Так как скорость звука в газе отражает скорость теплового движения молекул, то условие  $M^2 \gg 1$  означает, что кинетическая энергия элементарного объема выше тепловой. Значит, динамические свойства газа при гиперзвуковых скоростях не должны сильно отличаться от их свойств при движении с обычными сверхзвуковыми скоростями. Это позволяет применить асимптотические методы, которые позволят упростить решение ряда задач прикладного характера. С другой стороны, в гиперзвуковом течении начинают проявляться многие нелинейные эффекты термодинамического свойства [1]. Действительно, если оценить температуру торможения в совершенном газе при гиперзвуковой скорости  $T_0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$ , то получим значение в сотни раз превышающие нормальную температуру. Это приведет уже к важным структурным изменениям в газе: возбуждению степеней свободы молекул, диссоциации, ионизации, излучению и другим процессам. Пренебрежение этими процессами может привести к большим ошибкам при определении термодинамических параметров.

## 7.1 Предельные формулы совершенного газа при $M \rightarrow \infty$ .

### Изоэнтропические формулы.

При больших значениях чисел Маха ( $M \rightarrow \infty$ ) можем записать:

$$\tau(M) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \Rightarrow \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad (7.1)$$

Отсюда, как следствие

$$\begin{aligned} p/p_1 &= \left( \frac{\tau(M_1)}{\tau(M)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow (M_1/M)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}; \quad \rho/\rho_1 = (p/p_1)^{1/\gamma} \Rightarrow (M_1/M)^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ a/a_1 &= \left( \frac{\tau(M_1)}{\tau(M)} \right)^{1/2} \Rightarrow M_1/M; \quad T/T_1 = a^2/a_1^2 \Rightarrow M_1^2/M^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Формулу для скорости получим из уравнения Бернулли:

$$\text{Откуда} \quad vdv = -\frac{2}{\gamma-1} ada. \quad (7.3)$$

А так как  $Ma = v$ , то  $dM/M + da/a = dv/v$ . После подстановки  $da/a$  из последнего соотношения в (7.3) и интегрирования придем к выражению

$$\frac{v}{v_1} = \exp\left(-\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{1}{M^2} - \frac{1}{M_1^2} \right)\right).$$

Учитывая, что существует ряд:  $\exp(-x) = 1 - x + x^2/2 + O(x^3)$ , окончательно запишем

$$\frac{v}{v_1} = 1 + \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{1}{M^2} - \frac{1}{M_1^2} \right) + O\left(\frac{1}{M^4}\right) \quad (7.4)$$

### Течение около выпуклого угла.

Рассмотрим предельный переход в формулах (6.7) главы 6. Для любых  $t$  ( $1 < t \leq \infty$ ) можем записать ряд  $\text{arctg}(t) = \pi/2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right)$ . Подставляя этот ряд в формулу для  $H(M)$  получим

$$\theta = -\frac{1}{M} \frac{2}{\gamma-1} + C.$$

Отсюда

$$\Delta\theta = \theta - \theta_1 = \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M} \right),$$

или

$$\frac{M_1}{M} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \Delta\theta \cdot M_1. \quad (7.5)$$

Соотношение (7.5) вместе с (7.2) и (7.4) определит все параметры потока после разворота.

### Течение за косым скачком уплотнения.

При определении течения за скачком в совершенном газе обратимся к формулам главы 3. Полагая, что при гиперзвуковом обтекании тел конечной толщины  $M_n^2 = M^2 \sin^2 \beta \gg 1$ , где  $\beta$  - угол скачка к набегающему потоку, получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\rho}{\rho_1} &= \frac{2}{\gamma-1} \left( 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{M_n^2} \right), & \frac{\Delta p}{p_1} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_n^2, \\ \frac{\Delta T}{T_1} &= \frac{2(\gamma-1)\gamma}{(\gamma+1)^2} M_n^2, & \frac{\Delta a}{a_1} &= \frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1} \cdot M_n, \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{(\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left( \frac{2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(\gamma-1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \frac{1}{M_n^{\frac{2}{\gamma-1}}}.$$

Из последних соотношений можно сделать еще один важный вывод. Если наблюдаем обтекание двух тонких тел, у которых  $M_n \approx M \cdot \tau$ , где  $\tau$  толщина тела, то их обтекание будет подобным при  $M_1 \tau_1 = M_2 \tau_2$ .

## 7.2 Метод Ньютона.

Как отмечалось во вводной части курса по теории “Ньютонова торможения”, частицы достигают поверхности, не испытывая возмущения. Вследствие удара о поверхность происходит потеря количества движения по нормали к площадке на ней. При этом возникает избыточное давление

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}} = 2 \cos^2(\bar{v}_\infty, \bar{n}) \quad (7.7)$$

Установлено, что при малых и умеренных скоростях формула (7.7) дает ошибочный результат. Однако, при гиперзвуковых скоростях,  $C_p \rightarrow \frac{4}{\gamma + 1} \sin^2 \theta_T$ . В случае развитых физико - химических процессов при  $M \rightarrow \infty$ , когда  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $C_p \rightarrow 2 \sin^2 \theta_T$ . Из сказанного следует большая практическая ценность формулы (7.7). На ее основании были проведены многочисленные исследования и конструкторские разработки по выбору формы ракетных и космических аппаратов.

К настоящему времени накоплено большое количество экспериментальных и расчетных данных, которые позволили уточнить формулу (7.7). Сегодня уже можно говорить лишь о формулах типа “формулы Ньютона”. В частности, распределение давления будет точнее, если в формуле (7.7) вместо коэффициента “2” принять

коэффициент  $C_p^* = \frac{C_{p0}}{\cos^2(\bar{v}_\infty, \bar{n})}$ , где индекс “0” означает параметры в носовой части

для рассматриваемого тела. К этой же категории формул можно отнести формулы так называемых методов “местных конусов” и “местных клиньев”. Здесь коэффи-

циенты  $C_p^*$  выбираются так, что  $C_p^* = \frac{C_{p0}}{\cos^2(\bar{v}_\infty, \bar{n})}$  на теле равен коэффициенту давления на конусе такого же угла (для тел, близких к телам вращения) или клине (для тел, близких к плоским).

Расчет по методу Ньютона, основанный на локальной теории, не позволяет дать высокоточное распределение давления по летательному аппарату, но, как показывают многочисленные опыты, могут дать вполне приемлемые для практики результаты при определении суммарных аэродинамических характеристик.

Продолжая уточнение метода Ньютона на базе обработки имеющихся многочисленных данных по обтеканию тел различной формы, можно ввести поправки на число Маха, учет кривизны затупления, учет донного сопротивления. Для тел фюзеляжеобразной формы может быть предложена, например, схема определения аэродинамических характеристик на основе локальной теории, изложенная в работе [12]. В целом, метод Ньютона подробно изложен в монографиях [2,3,6,7].

### Литература

1. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер "Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений", Наука, 1999г.
2. Н.Ф. Краснов "Аэродинамика тел вращения", М, Машиностроение, 1964г.
3. Ж. Гиро "Основные вопросы теории гиперзвуковых течений", Мир, 1965г.
4. Г.Н. Абрамович "Прикладная газовая динамика", Наука, 1969г.
5. Р.Н. Мирошин, И.А. Холидов "Теория локального взаимодействия", Изд. ЛУ, 1991г.

6. Г.Г. Черный "Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью", ФМЛ, 1959г.
7. У.Д. Хейз, Р.Ф. Пробстин "Теория гиперзвукового течения", ИИЛ, 1962г.
8. Н.Е.Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе "Теоретическая гидродинамика", I,II, ФМЛб 1963г.
9. М.Д. Ладыженский "Пространственные гиперзвуковые течения газа", Машиностроение, М, 1968г.
10. О.М. Белоцерковский (ред.) "Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретические и экспериментальные исследования"//ТрудыВЦ АН СССР, М, 1966г.
11. Дж. Мартин "Вход в атмосферу", Мир, 1969г.
12. В.Я. Киселев, В.И. Корнилов, Т.А.Коротаева и др."Определение аэродинамических характеристик тел при полете в плотных слоях атмосферы с гиперзвуковой скоростью"//Теплофизика и Аэромеханика, 1, Новосибирск, 1995г.