

Глава 4. ОСНОВНЫЕ УПРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДИЛАТАЦИИ

В предыдущих главах мы рассмотрели распространение волн в пружинах и струнах. Этот подход позволил нам дать простое описание волнового процесса и таких важных явлений, как прохождение и отражение волн, а также формирование собственных колебаний.

Конечно, нашей основной целью является изучение волновых процессов в упругих средах, где, в общем случае, существует три типа волн. Первый тип – это волны дилатации, распространение которых связано с изменениями объема среды, при этом его форма может изменяться только определенным образом. Второй тип волн (волны сдвига) сопровождается поворотом произвольного объема среды и изменением его формы. Наконец, третий тип волн характеризуется всеми тремя эффектами сразу. Классическим примером последнего служат поверхностные волны, например волны Рэлея и волны Стоули. Все три типа волн играют важную роль в прикладной и глобальной сейсмологии. Важно также заметить, что в неоднородной среде волны различных типов взаимосвязаны. Так, в результате отражения волны дилатации могут образоваться волны дилатации и сдвига.

Подобное взаимодействие определенным образом затрудняет изучение полного волнового поля. Поэтому естественно вначале рассмотреть различные типы волн отдельно друг от друга. Мы начнем с изучения волн дилатации, которые называются также продольными волнами или Р-волнами.

В этой и последующих главах вместо упругой среды мы будем рассматривать газ или жидкость. В этом случае нет никаких других волн, кроме волн дилатации, и анализ волнового поля сильно упрощается. Это дает нам возможность рассмотреть основные характеристики этих волн, проявляющиеся также и в упругих средах. Обычно, волны в газах и жидкостях называются звуковыми или акустическими волнами. Они мало чем отличаются от волн дилатации в упругих средах.

В этой главе мы опишем физические законы, которые управляют поведением волн дилатации. В отличие от колебаний пружины, мы будем рассматривать здесь трехмерную среду. Основываясь на этих законах, мы получим систему уравнений, описывающую смещения и скорости частиц, а также давление в среде. Мы сформулируем также задачу с граничными и начальными условиями и, кроме того, обсудим такие вопросы, как плотность и поток энергии, вектор Пойнтинга, и дадим объяснение теореме единственности.

4.1. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГАЗЕ И ЖИДКОСТИ

Как известно, взаимодействие между атомами в жидкостях и, особенно, в газах чрезвычайно слабое. В состоянии равновесия атомы можно рассматривать как отдельные частицы, движущиеся независимо друг от друга. Распределение атомов характеризуется плотностью ρ , которая определяется как количество жидкости или газа в единице объема:

$$\rho = \Delta m / \Delta V, \text{ если } \Delta V \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

где Δm – масса вещества, заключенного в объеме ΔV .

При таком подходе подразумевается, что размеры объема ΔV значительно превосходят среднюю длину пробега атомов, которая, например, для газов составляет около 10^{-7} м при атмосферном давлении. Другими словами, объемом ΔV содержит очень большое число атомов. В соответствии с этим приближением газы и жидкости рассматриваются как непрерывные среды с плотностью ρ . В то же время элементарный объем ΔV , который мы будем иногда называть элементом или частицей, должен быть значительно меньше таких характерных расстояний, как длина волны или расстояние между источником и точкой наблюдения.

ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И ДАВЛЕНИЕ

Теперь представим себе элементарную площадку внутри, например, газа (рис. 4.1, а). Очевидно, что, когда газ или жидкость находится в состоянии равновесия, атомы двигаются случайным образом одинаково во всех направлениях. Соответственно количество атомов, сталкивающихся с элементарной площадкой, не зависит от направления и прямо пропорционально плотности газа ρ .

Переходя к непрерывному представлению, можно сказать, что действие этих частиц приводит к появлению силы $\mathbf{F}(p)$, приложенной к элементарной площадке dS . Поскольку площадь элемента dS мала, можно предположить, что распределение атомов по поверхности равномерное, и, следовательно, силу $\mathbf{F}(p)$ можно представить как

$$\mathbf{F}(p) = P(p)dS. \quad (4.2)$$

Скалярная функция $P(p)$, характеризующая эту силу, называется давлением. В системе СИ давление измеряется в ньютонах, деленных на квадратный метр:

$$[P] = \text{Н/м}^2.$$

Единица измерения давления, равная 1 Н/м^2 , называется паскалем (Па):

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$$

или

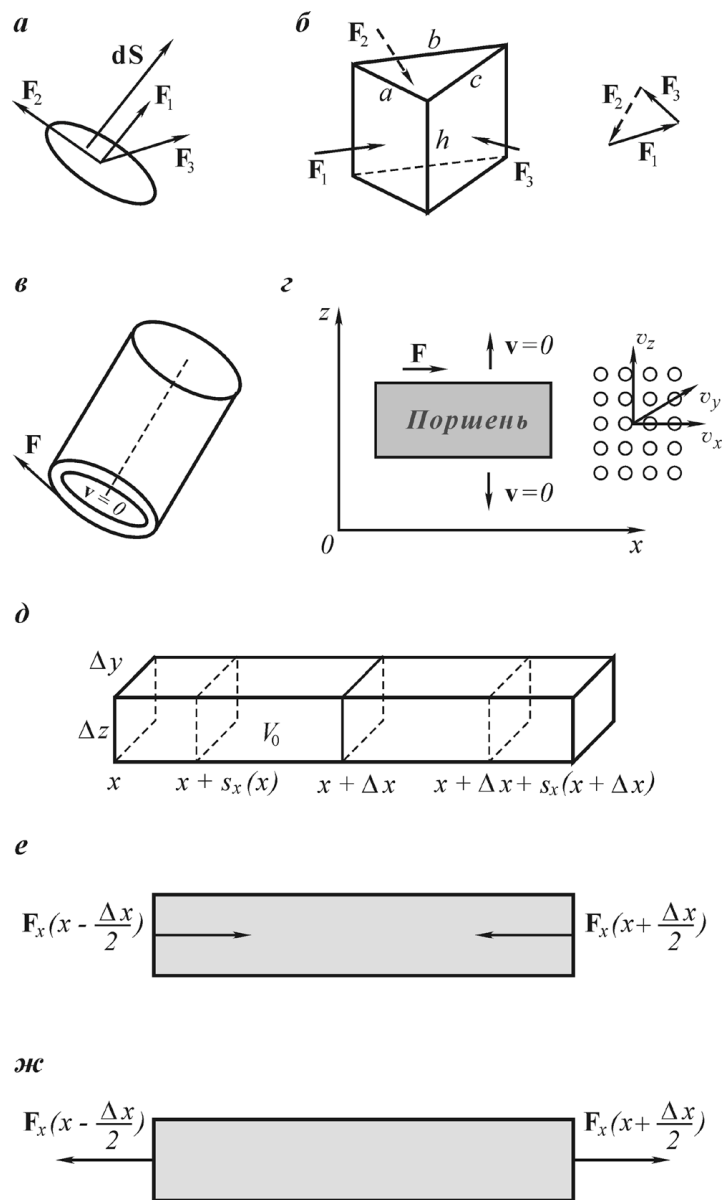


Рис. 4.1. Иллюстрация поведения давления. Распределение сил

$$1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} = 10 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2} = 10 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}.$$

Часто используется также другая единица измерения, которая называется **бар**:

$$1 \text{ бар} = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 10^5 \text{ Па}.$$

Так, например, атмосферное давление на уровне моря приблизительно равно **1 бару**:

$$1 \text{ атм} \approx 1,013 \text{ бар} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

В то же время плотность воздуха при таком давлении равняется

$$\rho = 1,22 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1,22 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Чтобы проиллюстрировать давление, равное **1 атмосфере** (атм.), представим себе вертикальный столб воздуха с площадью сечения S , равной 1 м^2 , и высотой $h = 0,8 \cdot 10^4 \text{ м}$.

Вес W этого воздушного столба равняется

$$W = mg = \rho h S g,$$

где g – это вертикальная компонента гравитационного поля:

$$g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом, предполагая для простоты, что плотность воздуха остается постоянной, получим

$$W = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} 1,22 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} 0,8 \cdot 10^4 \text{ м}^3 \approx 10^5 \text{ Н} = 1 \text{ бар} \cdot \text{м}^2.$$

Соответственно, давление

$$P \approx 10^5 \text{ Па} \approx 1,0 \text{ атм}.$$

Несмотря на “прозрачность” воздуха, на нас действует очень большой вес.

Рассмотрим теперь силы, ориентированные различным образом по отношению к площадке $d\mathbf{S}$ (см. рис. 4.1, *a*). Прежде всего, рассмотрим силу \mathbf{F}_1 , направленную параллельно $d\mathbf{S}$. Здесь $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к площадке. Под действием силы \mathbf{F}_1 атомы движутся, сталкиваются с элементарной площадкой dS и оказываются на ее противоположной стороне. Другими словами, действие силы \mathbf{F}_1 передается через элементарную площадку. Если теперь приложить силу \mathbf{F}_2 , ортогональную вектору $d\mathbf{S}$, то атомы будут двигаться в направлении силы \mathbf{F}_2 , и число частиц, пересекающих поверхность dS , останется прежним. Это означает, что сила \mathbf{F}_2 не оказывает никакого влияния на движение молекул, расположенных по другую сторону от площадки.

Поэтому в общем случае, когда сила \mathbf{F}_3 направлена произвольным образом, необходимо учитывать только ее нормальную компоненту. Это позволяет переписать равенство (4.2) как

$$\mathbf{F}(p) = P(p)d\mathbf{S}. \quad (4.3)$$

Из выражения (4.3) видно, что, если сила \mathbf{F} ортогональна вектору $d\mathbf{S}$, то она не оказывает никакого действия на элементарную площадку. Это объясняет тот факт, что в газах и жидкостях существуют только волны дилатации.

Перед тем, как приступить к выводу основных уравнений движения, рассмотрим распределение внутренних сил жидкости для случая, когда жидкость находится в состоянии равновесия, а влияние вязкости пренебрежимо мало. Как известно, расстояние между атомами в газе значительно превышает радиус действия сил, вызванных каждым отдельным атомом. В соответствии с этим, взаимодействие атомов с хорошей точностью можно описать как столкновение частиц. В отличие от газов, атомы в жидкости располагаются гораздо ближе друг к другу. Так, например, плотность жидкости на три порядка больше плотности газа. Поэтому расстояния между атомами в жидкости таковы, что атомы взаимодействуют друг с другом и силы межатомного взаимодействия играют фундаментальную роль в распространении волн. Тем не менее, по сравнению с твердыми телами, межатомные расстояния в жидкостях по-прежнему относительно велики, и при изучении распространения волн жидкости можно рассматривать как газы, обладающие большой плотностью.

Предположим, что в некоторой точке происходит увеличение плотности. Давление в этой точке также увеличится. Поскольку давление будет постепенно уменьшаться с расстоянием от этой точки, атомы начнут двигаться в сторону областей с меньшим давлением. Появление в этих областях новых частиц приводит к увеличению плотности, и это снова приводит к выталкиванию частиц. Очевидно, что по прошествии некоторого времени этот волновой процесс проявится и на еще большем расстоянии от того места, где он был возбужден.

Как было упомянуто ранее, молекулярные силы переносят энергию волн в направлении приложенной силы. Аналогия с системой пружин и грузов состоит в том, что груз играет роль атома, а пружина представляет силу взаимодействия между атомами. Таким образом, с увеличением массы атома скорость распространения волны становится меньше. Такая же тенденция наблюдается при уменьшении межатомного взаимодействия.

Ранее, основываясь на физических соображениях, мы пришли к выводу о том, что давление жидкости, находящейся в равновесии, не зависит от ориентации элементарной площадки, т. е. давление является скалярной функцией от координат точки наблюдения и плотности:

$$P = P(p, \rho).$$

Теперь, принимая во внимание тот факт, что сила направлена перпендикулярно площадке dS , мы докажем это замечательное свойство давления.

Рассмотрим очень маленькую треугольную призму с центром в некоторой точке p (рис. 4.1, б). Поскольку призма находится в равновесии, силы, действующие на ее верхнее и нижнее основания, равны по величине и противоположны по направлению. Силы F_1 , F_2 и F_3 , приложенные к боковым граням призмы, перпендикулярны этим граням и лежат в плоскости, параллельной основаниям призмы. Поскольку призма находится в равновесии, сумма этих сил равняется нулю, т.е. эти силы образуют треугольник в горизонтальной плоскости. Учитывая, что стороны этого треугольника перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника, лежащего в основании призмы, можно заключить, что эти треугольники подобны. Следовательно, силы F_1 , F_2 и F_3 пропорциональны длинам соответствующих сторон призмы:

$$F_1/a = F_2/b = F_3/c$$

или

$$F_1/ah = F_2/bh = F_3/ch = P,$$

где h – это высота призмы; ah , bh и ch – площади боковых граней.

Таким образом, если жидкость находится в состоянии равновесия, давление в произвольной точке жидкости одинаково во всех направлениях и не зависит от ориентации элементарной площадки.

Поскольку силы межатомного взаимодействия очень слабы, а расстояния между атомами относительно велики даже в жидкостях, упорядоченное движение атомов не оказывает заметного влияния в направлении, перпендикулярном направлению приложенной силы. Это фундаментальное свойство идеальной жидкости можно сформулировать следующим образом: жидкость не может поддерживать тангенциальные силы, независимо от того, как долго эти силы действуют. Проиллюстрируем это на двух примерах. В первом примере (рис. 4.1, в) цилиндрическая емкость, заполненная идеальной жидкостью, вращается вокруг своей оси с постоянной скоростью v . В этом случае на все точки цилиндра действует тангенциальная сила, направленная по касательной к поверхности жидкости. Эта поверхность, тем не менее, остается в состоянии покоя, поскольку расстояния между молекулами в радиальном направлении достаточно велики.

Второй пример иллюстрирует действие поршня (рис. 4.1, г), движущегося со скоростью v , например, вдоль оси x . Как и в предыдущем примере, силы, приложенные к боковым поверхностям поршня, не оказывают никакого действия в направлении, перпендикулярном движению. В то же время плотность жидкости перед поршнем изменяется. Соответственно и давление перед поршнем начинает отличаться от того, которое наблюдается в соседних областях. По этой причине можно ожидать появления волн, распространяющихся во всех направлениях.

Теперь мы можем приступить к описанию распространения волн. Это явление сопровождается следующими тремя эффектами:

- 1) упорядоченным движением молекул;
- 2) изменением плотности;
- 3) изменением давления.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ДВИЖЕНИЕМ ЧАСТИЦ И ПЛОТНОСТЬЮ

Чтобы описать распространение волн, необходимо, прежде всего, установить связь между изменениями плотности и смещением частиц. Для этого рассмотрим элементарный объем V_0 с плотностью ρ_0 , имеющий форму параллелепипеда (рис. 4.1, д):

$$V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Предположим также, что смещения частиц внутри и вне объема имеют только компоненту x :

$$\mathbf{s} = s_x(x, y, z, t) \mathbf{i},$$

и что смещение каждой частицы изменяется линейно от задней к передней стороне элементарного объема.

В результате такого движения задняя сторона объема переместится в новое положение с координатами

$$x + s_x, y, z,$$

где $s_x(x, y, z, t)$ – обозначает смещение этой стороны. В то же время передняя сторона переместится на расстояние

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t)$$

и займет положение с координатами

$$x + \Delta x + s_x(x + \Delta x, y, z, t).$$

Таким образом, то же самое количество газа (жидкости) будет теперь занимать новый объем, равный

$$V = \Delta y \Delta z [x + \Delta x + s_x(x + \Delta x, y, z, t) - x - s_x(x, y, z, t)]. \quad (4.4)$$

Мы предположили, что объем настолько мал, что функция s_x изменяется линейно между сторонами элементарного объема. Это позволяет переписать разность, стоящую в правой части уравнения (4.4), в виде

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t) - s_x(x, y, z, t) = \frac{\partial s_x}{\partial x} \Delta x, \quad (4.5)$$

где $\partial s_x / \partial x$ характеризует относительное изменение смещения частицы внутри объема.

Таким образом, вместо уравнения (4.4) можно записать

$$V = \Delta y \Delta z (\Delta x + s'_x \Delta x) = V_0 [1 + s'_x(p, t)]. \quad (4.6)$$

Здесь p – произвольная точка внутри элементарного объема.

Последнее уравнение дает

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\partial s_x(p, t)}{\partial x} = s'_x, \quad (4.7)$$

т.е. производная смещения по x характеризует относительное изменение объема V_0 .

Очевидно, что если

$$\partial s_x / \partial x = 0,$$

то задняя и передняя стенки объема смещаются одинаково, и объем не меняется.

Предположим, что

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t) > s_x(x, y, z, t).$$

Это означает, что объем увеличивается, и, по определению,

$$\partial s_x / \partial x > 0.$$

Наоборот, если

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t) < s_x(x, y, z, t),$$

то элементарный объем уменьшается и

$$\partial s_x / \partial x < 0.$$

Стоит заметить, что уравнение (4.6) остается справедливым только при малых изменениях объема V_0 .

Теперь мы готовы к тому, чтобы установить соотношение между изменениями объема и плотностью. Поскольку в объемах V_0 и ΔV заключена одна и та же масса вещества, имеем

$$\rho_0 V_0 = (\rho_0 + \rho_a)(V_0 + \Delta V)$$

или

$$0 = \rho_0 \Delta V + \rho_a V_0 + \rho_a \Delta V, \quad (4.8)$$

где ρ_a – приращение плотности, появляющееся из-за движения частиц. Она зависит от точки пространства и от времени.

Полная плотность равняется

$$\rho(p, t) = \rho_0(p, t) + \rho_a(p, t). \quad (4.9)$$

Учитывая, что при распространении звука объем и плотность меняются очень мало, т.е.

$$\rho_a \ll \rho_0 \text{ и } \Delta V \ll V_0, \quad (4.10)$$

слагаемым $\rho_a \Delta V$ в уравнении (4.8) можно пренебречь. Уравнение (4.8) в этом приближении дает

$$\Delta V / V_0 = - \rho_a / \rho_0.$$

Отсюда, используя выражение (4.7), получим

$$\rho_a / \rho_0 = - \partial s_x / \partial x. \quad (4.11)$$

Наша первая задача, таким образом, выполнена, поскольку мы установи-

ли соотношение между приращением плотности и смещением частиц. Наличие знака минус в правой части равенства (4.11) можно легко объяснить. Действительно, если происходит сжатие объема, то $\partial s_x / \partial x < 0$, но объемная плотность увеличивается, и, следовательно, $\rho_a > 0$. И наоборот, если происходит расширение объема, то производная $\partial s_x / \partial x$ является положительной, но плотность уменьшается, и $\rho_a < 0$.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ДАВЛЕНИЕМ И ПЛОТНОСТЬЮ

Как уже отмечалось, изменение плотности должно приводить также к изменению давления. Представим функцию давления $P(\rho)$ следующим образом:

$$P(\rho) = P(\rho_0 + \rho_a) = P(\rho_0) + P_a. \quad (4.12)$$

Здесь $P(\rho_0)$ – это начальное давление, соответствующее состоянию равновесия, а P_a – приращение давления, вызванное движением вещества вдоль оси x . Разлагая функцию $P(\rho)$ в ряд Тейлора и принимая во внимание, что

$$\rho_a \ll \rho_0,$$

можно пренебречь всеми членами разложения, кроме первого. Тогда

$$P(\rho_0 + \rho_a) = P(\rho_0) + \frac{\partial P}{\partial \rho} \rho_a. \quad (4.13)$$

Здесь производная

$$\partial P / \partial \rho = P'(\rho_0)$$

характеризует скорость изменения давления как функцию плотности при условии, что

$$\rho = \rho_0.$$

Из выражений (4.12) и (4.13) следует, что

$$P_a = \alpha \rho_a$$

и

$$\alpha = \partial P / \partial \rho, \text{ если } \rho = \rho_0. \quad (4.15)$$

Параметр α зависит от нескольких факторов, таких, например, как температура и давление, влияющих на состояние газа или жидкости. Как будет показано ниже, этот параметр определяет скорость распространения звуковых волн.

Таким образом, мы предположили, что приращение давления прямо пропорционально приращению плотности вещества. В связи с этим целесообразно отметить следующее. Поскольку приращение давления, вызванное распространением звуковой волны, очень мало:

$$\rho_a \ll P(\rho_0), \quad (4.16)$$

амплитуда этого давления часто измеряется в децибелах, которые определяются как

$$I = 20 \log \frac{P_a}{P_r} \text{ дБ}, \quad (4.17)$$

где

$$P_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ бар} \text{ или } P_r = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}.$$

Так, например, если приращение давления

$$P_a = 2 \cdot 10^{-7} \text{ бар},$$

то величина I равна 60 дБ, что соответствует достаточно громкому звуку. Это давление, однако, чрезвычайно мало по сравнению с начальным давлением $P(\rho_0) \approx 1$ бар. Это обстоятельство учитывалось при выводе двух важных формул, а именно (4.11) и (4.14):

$$\rho_a = -\rho_0 \frac{\partial s_x}{\partial x} \text{ и } P_a = \alpha \rho_a.$$

Используя обе эти формулы, получим следующее соотношение между смещением s_x и приращением давления P_a :

$$P_a(p, t) = -\alpha \rho_0 \frac{\partial s_x}{\partial x}. \quad (4.18)$$

Из последнего выражения хорошо видно, что при расширении, когда $\partial s_x / \partial x > 0$, давление падает, и это происходит именно благодаря уменьшению плотности. И, наоборот, при сжатии вещества, когда $\partial s_x / \partial x < 0$, давление увеличивается. Аналогия между уравнением (4.18) и законом Гука в случае системы пружин очевидна. Так, например, величина $\partial s_x / \partial x$ характеризует деформацию элементарного объема.

Уравнение (4.18) содержит две неизвестные функции: $P_a(p, t)$ и $s_a(p, t)$. Чтобы найти эти функции, необходимо задать, по крайней мере, еще одно соотношение между ними. Для этого рассмотрим силы, действующие на элементарный объем V . Прежде всего, необходимо отметить следующее. До сих пор мы рассматривали элементарный объем, в котором смещение $s_a(p, t)$ было линейной функцией координаты x . Это означает, что деформация $\partial s_x / \partial x$, плотность ρ_a и давление P_0 постоянны внутри данного объема:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} = C_1, \quad \rho_a = C_2, \quad P_a = C_3.$$

Другими словами, мы предположили, что объем находится в равновесии, когда на его переднюю и заднюю поверхности действует одинаковое давление.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Изучим теперь движение элементарного объема и предположим, что внутри него функции $\partial s_x / \partial x$, ρ_a , P_a и s_x зависят от x . Предположим сначала,

что данный объем находится в состоянии сжатия и движется вдоль оси x (рис. 4.1, δ). Соответственно, плотность этого объема увеличивается, и

$$P_a > 0.$$

Сила, действующая на заднюю поверхность объема, имеет только одну ненулевую положительную компоненту F_x :

$$F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = P_a\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) dS, \quad (4.19)$$

где P_a – давление; $dS = dydz$; x – координата центра масс.

В результате движения элементарного объема возникает направленная вдоль оси x сила, действующая на расположенную перед ним среду. В свою очередь, как следует из третьего закона Ньютона, со стороны среды на переднюю поверхность объема также действует сила, которая отличается от предыдущей силы только знаком. Следовательно, ее скалярная компонента

$$F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = -P_a\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) dS. \quad (4.20)$$

Для результирующей силы имеем

$$F_x = F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) + F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)$$

или

$$F_x = \left[P_a\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) - P_a\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) \right] dS. \quad (4.21)$$

Предположим теперь, что элементарный объем расширяется и, соответственно, приращение давления P_a является отрицательным (рис. 4.1, e). Поскольку сила, приложенная к задней поверхности объема, направлена к началу координат, имеем

$$F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = P_a\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) dS < 0.$$

В то же время, снова применяя третий закон Ньютона, замечаем, что скалярная компонента этой силы на передней поверхности объема является положительной, и, следовательно, ее можно записать как

$$F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = -P_a\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) dS > 0,$$

поскольку

$$P_a < 0.$$

Таким образом, результирующая сила в этом случае равняется

$$F_x = \left[P_a \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) - P_a \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) \right] dS. \quad (4.22)$$

Сравнивая выражения (4.21) и (4.22), приходим к выводу, что сумма внешних сил, приложенных к элементарному объему, не зависит от типа деформации.

Поскольку расстояние dx очень мало, можно предположить, что сила F_x изменяется линейно в промежутке между сторонами объема. Соответственно, и деформация $\partial s_x / \partial x$ меняется в пределах объема таким же образом. Поэтому смещение s_x определяется следующим выражением:

$$s_x(x, y, z, t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (4.23)$$

и

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} = a_1 + 2a_2 x.$$

Как следует из соотношений (4.11) и (4.14), плотность ρ_a и давление P_a ведут себя так же, как и деформация.

Запишем теперь второй закон Ньютона для нашего случая:

$$m \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = F_x, \quad (4.24)$$

где

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z = \rho_0 dS \Delta x$$

и F_x обозначает результирующую силу, действующую на элементарный объем V .

Подстановка соотношения (4.21) в уравнение (4.24) приводит к

$$\Delta x \rho_0 \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \left[-P_a \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) + P_a \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) \right]. \quad (4.25)$$

При выводе последнего уравнения, мы предполагали, что приращение плотности очень мало, $\rho_a \ll \rho_0$, и что только силы, приложенные к поверхностям объема, влияют на его движение. Так, например, мы не рассматривали влияние гравитационных сил.

Поскольку давление является линейной функцией координаты x , разложение в ряд Тейлора функции приращения давления дает

$$P_a \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) = P_a(x, y, z, t) + \frac{\partial P_a}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (4.26)$$

и

$$P_a \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) = P_a(x, y, z, t) - \frac{\partial P_a}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}.$$

Здесь $P_a(x, y, z, t)$ – давление в окрестности центра элементарного объе-

ма, а производная $\partial P_a / \partial x$ определяет величину изменения давления с расстоянием.

Подставляя выражения (4.26) в уравнение (4.25), получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = - \frac{\partial P_a}{\partial x}. \quad (4.27)$$

Таким образом, используя принцип сохранения массы (4.11), соотношение (4.14) между давлением P_a и плотностью ρ_a , а также второй и третий законы Ньютона, мы получили следующую систему из двух уравнений относительно смещения и избыточного давления:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} = - \frac{1}{\alpha \rho_0} P_a \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial x}. \quad (4.28)$$

Дифференцируя по координате x первое уравнение и используя второе уравнение, исключим член, содержащий давление. В результате получим следующее уравнение относительно смещения:

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}, \quad (4.29)$$

где

$$\alpha = c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad \text{если } \rho = \rho_0. \quad (4.30)$$

Уравнение (4.29) представляет собой хорошо известное волновое уравнение для одномерного случая, описывающее распространение звуковой волны вдоль оси x со скоростью c . Дифференцируя это уравнение по координате x и, затем, используя формулу (4.18), получим волновое уравнение для давления P_0 :

$$\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_a}{\partial t^2}. \quad (4.31)$$

Как следует из равенства (4.14), приращение плотности $\rho_a(p, t)$ также удовлетворяет волновому уравнению.

Таким образом, функции

$$\rho_a, P_a, x_s \quad \text{и} \quad \partial x_s / \partial x,$$

описывающие распространение звука, являются решениями волнового уравнения, т.е. их поведение во времени и пространстве является волновым.

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

В качестве иллюстрации рассмотрим волну, в которой смещения определяются следующим выражением:

$$s_x(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (4.32)$$

и

$$c = 347 \text{ м/с.}$$

Известно, что слышимый звуковой диапазон ограничивается пределами

$$20 \text{ Гц} < f < 20 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

Соответственно, длина звуковой волны

$$\lambda = cT = c/f = 2\pi c/\omega$$

меняется в пределах

$$1,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} < \lambda < 17,4 \text{ м.}$$

Например, если частота $f = 10^3$ Гц, то длина волны

$$\lambda = 0,35 \text{ м.}$$

По определению, размеры элементарного объема должны быть значительно меньше таких характерных параметров, как длина волны. В нашем случае ($\lambda = 0,35$ м) минимальное растяжение Δx , которое соответствует лишь незначительной деформации, равняется примерно одному-двум сантиметрам. Эти величины, безусловно, на много порядков больше, чем средняя длина свободного пробега молекул (10^{-7} м). Благодаря этому, при изучении распространения звука газы и жидкости можно рассматривать как непрерывные среды.

Для того чтобы оценить амплитуду смещения и скорость, вернемся к формуле (4.18). Это уравнение, используя равенство (4.32), можно переписать в следующем виде:

$$P_a = -\alpha \rho_0 \frac{\omega A}{c} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (4.33)$$

Таким образом, амплитуда давления B равняется

$$B = c \rho_0 \omega A, \quad (4.34)$$

поскольку

$$\alpha = c^2.$$

Предположим вначале, что звук очень сильный. Полагая $B = 120$ дБ, имеем

$$120 = 20 \log \frac{P_a}{2 \cdot 10^{-10} \text{ Б}} \quad \text{или} \quad P_a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Б} = 20 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

и при частоте $f = 10^3$ Гц амплитуда смещения равняется

$$A = \frac{B}{c \rho_0 \omega} = \frac{20}{347 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^3} \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Таким образом, даже в случае очень громкого звука, максимальное смещение чрезвычайно мало.

В противоположном случае, когда звук такой тихий, что его с трудом можно услышать, давление равняется

$$P_a = 20 \text{ дБ} \text{ или } P_a = 2 \cdot 10^{-9} \text{ бар.}$$

Как следует из равенства (4.34), амплитуда смещения в этом случае при той же частоте $f = 10^3$ Гц равняется

$$A \approx 10^{-10} \text{ м.}$$

Следует заметить, что размеры атомов имеют порядок как раз 10^{-10} м, что наглядно демонстрирует удивительную чувствительность нашего слуха.

В состоянии равновесия движение молекул является хаотичным, однако при появлении волны они также приобретают небольшую компоненту скорости или в направлении оси x , или в противоположном направлении. Это приводит к небольшим колебаниям элементарного объема, который движется как одна частица. Таким образом, движение объема в некотором направлении сопровождается хаотичным движением его молекул, при котором скорости частиц не имеют выделенного направления.

В отличие от твердых тел и жидкостей, молекулы газа находятся в среднем достаточно далеко друг от друга. Как уже отмечалось, перенос усилия, момента и смещения происходит в основном за счет столкновения молекул. По этой причине разница между средней скоростью молекулы v_m и скоростью звука c оказывается не такой уж большой. Более того, всегда выполняется следующее неравенство:

$$v_m > c.$$

Как следует из выражения (4.32), скорость элементарного объема (частицы)

$$v_x(x, t) = -A\omega \sin\omega(t - x/c). \quad (4.35)$$

Сравнение с равенством (4.33) показывает, что

$$v/c = P_a/\alpha\rho_0 \text{ или } v = P_a/c\rho_0. \quad (4.36)$$

Похожее выражение было получено ранее для волн, распространяющихся в пружине.

Если, как и раньше, принять, что давление имеет очень большую амплитуду:

$$P_a = 120 \text{ дБ} \text{ или } P_a = 20 \text{ Н/м}^2,$$

то амплитуда скорости v будет иметь величину

$$v = \frac{20}{347 \cdot 1,22} \approx 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

В случае слабого сигнала, например, при

$$P_a = 20 \text{ дБ} \text{ или } P_a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}^2,$$

имеем

$$v = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ м/с.}$$

Таким образом, движение элементарного объема, вызванное распространением звуковой волны, характеризуется чрезвычайно малыми скоростями, которые значительно меньше фазовой скорости волны:

$$v_m > c \gg v. \quad (4.37)$$

В то же время средняя скорость молекул сравнима по величине со скоростью c :

$$v_m \approx 1,7 c. \quad (4.38)$$

При распространении звука в газе в последнем возникают зоны растяжения и сжатия, в которых наблюдаются, соответственно, понижение и повышение температуры.

Поэтому естественно ожидать существование потока тепла от зон сжатия к зонам растяжения. Тем не менее, существуют по крайней мере две причины, в силу которых мы можем пренебречь обменом тепла между более нагретыми и охлажденными областями в газе. Во-первых, расстояние между этими областями значительно превышает среднюю длину свободного пробега (среднее расстояние, пробегаемое молекулами между столкновениями). И, во-вторых, учитывая скорость тепловой диффузии, можно сказать, что температура каждого элементарного объема изменяется довольно быстро, даже при частоте волны порядка 20 Гц. Таким образом, процесс сжатия и растяжения является не изотермическим, а скорее адиабатическим.

Имея это в виду, получим теперь оценку фазовой скорости волны. Согласно равенству (4.30), имеем

$$c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}, \text{ если } \rho = \rho_0. \quad (4.39)$$

В качестве начального приближения предположим, что сжатие и растяжение происходят так медленно, что температура в процессе деформации практически не меняется. Согласно закону Бойля – Мариотта,

$$\frac{P}{P_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{m}{\rho_0} \frac{\rho}{m} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

где m – масса рассматриваемого объема.

Последние равенства можно переписать как

$$\frac{P_0 + P_a}{P_0} = \frac{\rho_0 + \rho_a}{\rho_0}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{P_a}{P_0} = \frac{\rho_a}{\rho_0} \quad \text{или} \quad P_a = \frac{P_0}{\rho_0} \rho_a. \quad (4.40)$$

Сравнение этих соотношений с формулой (4.14) дает

$$\alpha = P_0 / \rho_0 \quad \text{и} \quad c = \sqrt{P_0 / \rho_0}. \quad (4.41)$$

Подставляя в эти соотношения значение давления на уровне моря $P_0 \approx 10^5$ Па и значение плотности $\rho_0 = 1,2$ кг/м³, получим

$$c \approx 290 \text{ м/с.}$$

Естественно, что это значение фазовой скорости значительно меньше того, которое наблюдается в эксперименте.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СКОРОСТЬ ВОЛНЫ

Несоответствие между рассмотренной выше теорией и экспериментом впервые обнаружил Лаплас. Он заметил, что быстрые деформации элементарного объема, возникающие при распространении звуковой волны, сопровождаются изменением температуры. Например, как уже упоминалось, если объем сжимается, то его температура растет. Соответственно, давление может возрастать по двум причинам. Первая причина связана с уменьшением элементарного объема. При этом плотность газа увеличивается и все больше столкновений молекул приходится на единицу площади элементарной поверхности. Вторая причина заключается в увеличении температуры и, следовательно, кинетической энергии молекул. Поскольку количество движения (импульс) молекул при этом увеличивается, давление также возрастает.

Равенства (4.41) были получены из закона Бойля – Мариотта, в котором учитывается только первая причина возрастания давления – увеличение плотности. Поведение давления описывается законом Бойля – Мариотта в том случае, если деформация происходит значительно медленнее процессов теплового обмена между элементарным объемом и окружающим газом. Конечно, этот закон можно применять и тогда, когда процесс деформации является изотермическим, т.е. когда температура вообще не меняется.

Тем не менее, в большинстве случаев распространения звуковых волн изменение плотности происходит настолько быстро, что тепло, вызванное деформацией, не успевает обмениваться. Именно поэтому в случае сжатия давление увеличивается до больших значений, чем это предсказывается законом Бойля – Мариотта. И наоборот, при растяжении из-за уменьшения кинетической энергии падение давления становится более заметным.

Такое поведение называется адиабатическим, и Лаплас предложил использовать вместо равенства (закона Бойля – Мариотта)

$$P/P_0 = \rho/\rho_0$$

следующее соотношение:

$$P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma, \quad (4.42)$$

где γ – параметр газа.

Последнее выражение можно переписать как

$$1 + \frac{P_a}{P_0} = \left(1 + \frac{\rho_a}{\rho_0}\right)^\gamma. \quad (4.43)$$

Поскольку $\rho_a/\rho_0 \ll 1$, правую часть равенства (4.43) можно разложить в ряд Тейлора. Тогда

$$\frac{P_a}{P_0} = \gamma \frac{\rho_a}{\rho_0} \quad \text{или} \quad P_a = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho_a.$$

Сравнивая эту формулу с выражением (4.14), получим новое выражение для параметра α :

$$\alpha = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}, \quad (4.44)$$

и новое выражение для фазовой скорости:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}. \quad (4.45)$$

Если положить

$$\gamma = 1,402,$$

то фазовая скорость волны будет равняться

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \approx 343 \text{ м/с},$$

что очень близко к результатам эксперимента.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

До сих пор мы предполагали, что у смещения частицы (элементарного объема) есть только одна компонента: s_x . Рассмотрим теперь более общий случай, когда вектор смещения \mathbf{s} произвольно ориентирован относительно координатных осей:

$$\mathbf{s}(p, t) = s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} + s_z \mathbf{k}. \quad (4.46)$$

Здесь \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} – единичные векторы, задающие направления координатных осей.

Согласно равенству (4.7) относительное изменение элементарного объема, вызванное движением вдоль оси x , определяется выражением

$$\Delta V_x/V_0 = \partial s_x / \partial x.$$

Аналогично, смещения вдоль других координатных осей приводят к следующим изменениям элементарного объема:

$$\Delta V_y/V_0 = \partial s_y / \partial y \quad \text{и} \quad \Delta V_z/V_0 = \partial s_z / \partial z.$$

Таким образом, полное изменение объема, нормализованное на его начальное значение, равняется

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta V_x + \Delta V_y + \Delta V_z}{V_0}$$

или

$$\Delta V/V_0 = \partial s_x/\partial x + \partial s_y/\partial y + \partial s_z/\partial z. \quad (4.47)$$

Как следует из векторного анализа (приложение 3), сумма производных в правой части этого соотношения определяет дивергенцию векторного поля \mathbf{s} :

$$\text{div } \mathbf{s} = \Delta V/V_0. \quad (4.48)$$

Отсюда видно, что $\text{div } \mathbf{s}$ характеризует относительное изменение объема, вызванное либо сжатием, либо растяжением.

В связи с этим полезно заметить следующее:

а) в $\text{div } \mathbf{s}$ содержатся производные смещений (4.47), и поэтому дивергенция имеет смысл только в регулярных точках, где эти производные существуют;

б) функция $\text{div } \mathbf{s}$ часто называется дилатацией (всесторонним расширением), хотя она описывает как растяжение $\Delta V/V_0 > 1$, так и сжатие $\Delta V/V_0 < 1$. Следуя этой терминологии, волны, которые вызывают изменение объема, называются волнами дилатации. Примером таких волн является звук;

в) уравнение (4.48) было получено в прямоугольной декартовой системе координат. Тем не менее, как показано в приложении 3, дивергенция векторного поля определяется его источниками и, следовательно, от системы координат не зависит. Другими словами, в любой системе координат $\text{div } \mathbf{s}$ описывает одни и те же относительные изменения объема.

Обобщим теперь соотношения, связывающие смещения, плотность и давление. Для этого снова используем принцип сохранения массы:

$$(V_0 + \Delta V)(\rho_0 + \rho_a) = \rho_0 V_0$$

или

$$\Delta V/V_0 = -\rho_a/\rho_0. \quad (4.49)$$

поскольку $\rho_a/\Delta V \ll 1$.

Отсюда, используя соотношение (4.48), получаем

$$\text{div } \mathbf{s} = -\rho_a/\rho_0, \quad (4.50)$$

где ρ_a – приращение плотности, вызванное изменениями объема.

Таким образом, наша первая задача оказывается выполненной, и равенство (4.11) можно заменить соотношением (4.50), которое справедливо и в трехмерном случае.

Поскольку мы продолжаем предполагать, что изменения плотности, вызванные распространением волны, очень малы, формула (4.14), связывающая давление и плотность, остается без изменений, т.е.

$$P_a = \alpha \rho_a \text{ и } \alpha = \partial P/\partial \rho,$$

$$\text{если } \rho = \rho_0. \quad (4.51)$$

Следующее уравнение следует из второго закона Ньютона (4.27):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = - \frac{\partial P_a}{\partial x}. \quad (4.52)$$

Аналогично, для двух других координат имеем

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} = - \frac{\partial P_a}{\partial y} \text{ и } \rho_0 \frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} = - \frac{\partial P_a}{\partial z}. \quad (4.53)$$

Умножая равенства (4.52) – (4.53) на, соответственно, единичные векторы **i**, **j** и **k**, получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\text{grad } P_a. \quad (4.54)$$

Это уравнение представляет собой второй закон Ньютона в векторной форме. Из него видно, что ускорение направлено туда, где наблюдается максимальное уменьшение давления.

При выводе этого уравнения предполагалось, что на элементарный объем действуют только силы, приложенные к его граням. Другими словами, принимались во внимание только поверхностные силы. Тем не менее, в общем случае существуют и другие силы, например гравитационные. Тогда вместо уравнения (4.54) будем иметь

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\text{grad } P_a + \rho_0 \mathbf{g}, \quad (4.55)$$

где вектор **g** обозначает гравитационное поле.

В дальнейшем мы будем предполагать, за исключением некоторых специальных случаев, что влияние гравитационного поля пренебрежимо мало. Тогда распространение звука описывается системой из трех уравнений:

$$\text{div } \mathbf{s} = -\rho_a / \rho_0, \quad P_a = \alpha \rho_a, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\text{grad } P_a, \quad (4.56)$$

которые описывают следующие физические законы:

- 1) принцип сохранения массы;
- 2) линейную зависимость давления от плотности, при условии, что относительные изменения плотности малы;
- 3) второй и третий законы Ньютона.

4.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВОЛН ДИЛАТАЦИИ

В предыдущем разделе мы пришли к уравнениям (4.56), которые связывают между собой приращение плотности ρ_a , смещение **s** и давление P_a . Поскольку приращение плотности ρ_a , вызванное распространением волны,

обычно не представляет интереса, естественно исключить эту величину из первых двух уравнений указанной системы. Тогда вместо (4.56) получим

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = -C P_a, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} P_a, \quad (4.57)$$

где множитель C называется сжимаемостью и характеризует относительное изменение объема при изменении давления на одну единицу. Для жидкостей значение этого параметра чрезвычайно мало. Свойством жидкостей является огромное сопротивление к изменениям объема. Тем не менее, жидкости не являются полностью несжимаемыми и могут претерпевать значительные изменения объема при высоком давлении. Так, например, если давление в воде достигает 1000 атм, ее объем уменьшается примерно на 5 %. И наоборот, распространение звука в жидкостях сопровождается чрезвычайно малой дилатацией.

Как следует из уравнений (4.56),

$$C = 1/\alpha \rho_0, \quad (4.58)$$

и значение этой величины в жидкостях составляет приблизительно

$$C \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Введем также величину, обратную сжимаемости:

$$K = 1/C = \alpha \rho_0, \quad (4.59)$$

которая называется модулем сжатия и является аналогом упругого параметра E^* пружины.

Соответственно, первое уравнение (4.57) можно переписать в виде

$$P_a = -K \operatorname{div} \mathbf{s}. \quad (4.60)$$

Это уравнение можно рассматривать как аналог закона Гука для газов и жидкостей.

Система уравнений (4.57) содержит два неизвестных: избыточное давление P_a и смещение \mathbf{s} . Как следует из определения дивергенции (см. приложение 3), давление P_a можно трактовать как плотность источников поля смещений \mathbf{s} .

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ И СМЕЩЕНИЯ

Теперь по аналогии с одномерным случаем получим волновое уравнение для каждой из этих функций. Беря дивергенцию от обеих частей второго уравнения (4.57), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{s} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \operatorname{grad} P_a. \quad (4.61)$$

Следует заметить, что вывод волнового уравнения основывается на предположении о том, что среда в окрестности регулярной точки является однородной, т.е.

$$\rho_0 = \text{const.}$$

По определению (см. приложение 3),

$$\text{div grad } P_a = \nabla^2 P_a,$$

и уравнение (4.61) переходит в

$$\nabla^2 P_a = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div } \mathbf{s}. \quad (4.62)$$

Используя первое из равенств (4.57), получаем волновое уравнение для давления в трехмерном случае:

$$\nabla^2 P_a = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 P_a}{\partial t^2}$$

или

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (4.63)$$

Здесь вместо P_a стоит P , поскольку давление P_0 постоянно и

$$c = \sqrt{K/\rho_0} \quad (4.64)$$

является скоростью волны.

Перед тем, как получить волновое уравнение для смещения \mathbf{s} , рассмотрим одно интересное свойство этого поля. Для этого запишем сначала второй закон Ньютона:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } P.$$

Беря ротор от обеих частей этого равенства, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{rot } \mathbf{s} = \text{rot grad } P,$$

поскольку плотность ρ_0 постоянна.

Из векторного анализа известно (см. приложение 3), что

$$\text{rot grad } P = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{rot } \mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad (4.65)$$

где \mathbf{v} – скорость частицы.

Отсюда

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{const.}$$

Принимая во внимание, что в начальный момент времени смещение и его

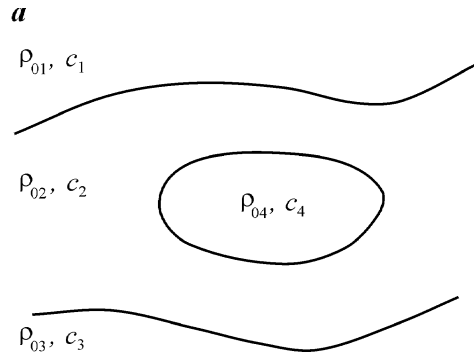
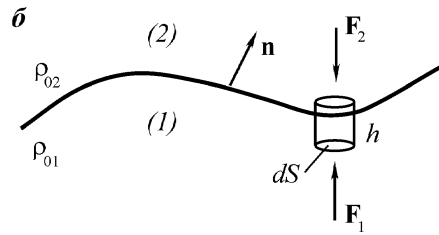


Рис. 4.2. Модель кусочно-однородной среды (а); граничные условия (б)



производные по времени равнялись нулю, заключаем, что в однородной среде в произвольный момент времени

$$\text{rot } \mathbf{s} = 0.$$

Геометрический смысл этого равенства будет обсуждаться позже.

Теперь, беря градиент от обеих частей первого уравнения (4.57), получим

$$\text{grad div } \mathbf{s} = -C \text{ grad } P_a.$$

Далее, второе из указанных уравнений (закон Ньютона) дает

$$\text{grad div } \mathbf{s} = \rho_0 C \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2}.$$

Из формулы (4.66) и равенства (см. приложение 3)

$$\text{rot rot } \mathbf{s} = \text{grad div } \mathbf{s} - \nabla^2 \mathbf{s},$$

следует, что

$$\text{grad div } \mathbf{s} = \nabla^2 \mathbf{s}.$$

Соответственно уравнение (4.67) переходит в

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \nabla^2 \mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2}. \quad (4.68)$$

Таким образом, давление и смещение удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению, причем фазовая скорость c определяется из уравнения (4.64).

В отличие от одномерного случая левая часть уравнений (4.63) и (4.68) содержит производные по всем трем координатам. Так, например, в декартовой прямоугольной системе координат

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (4.69)$$

Одним из наиболее замечательных свойств лапласиана $\nabla^2 P$ или $\nabla^2 s$ является то, что его значение не меняется при замене координат. Этот результат очевиден, поскольку правая часть уравнений движения от системы координат не зависит.

Поскольку волновое уравнение содержит вторые производные по координатам, оно справедливо только в регулярных точках, в окрестности которых плотность ρ_0 и фазовая скорость c постоянны.

Предположим, что среда является кусочно-однородной (рис. 4.2, а). Тогда одна из функций ρ_0 или c , или они обе терпят разрыв на внутренних границах раздела среды. Поэтому волновое уравнение в таких местах не выполняется и его необходимо заменить соответствующими граничными условиями.

УСЛОВИЯ НА ВНУТРЕННИХ ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗДЕЛА СРЕДЫ

Покажем, прежде всего, что давление на границах остается непрерывной функцией. Рассмотрим элементарный объем (рис. 4.2, б). Этот объем ограничен горизонтальной поверхностью S_L , а также поверхностями dS_1 и dS_2 :

$$dS_2 = dS \mathbf{n}, \quad dS_1 = -dS \mathbf{n}.$$

Здесь \mathbf{n} – единичная нормаль, направленная от задней к передней стороне границы.

Согласно второму закону Ньютона, ускорение такого объема определяется как

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

В направлении, перпендикулярном поверхности, имеем

$$\frac{h}{2} (\rho_{01} + \rho_{02}) \frac{\partial^2 s_n}{\partial t^2} = P_1 - P_2,$$

где $F_1 = P_1 dS$; $F_2 = P_2 dS$; ρ_{01} и ρ_{02} обозначают плотности среды по обе стороны границы.

В выражении (4.70) h – высота цилиндрического объема, а P_1 и P_2 обозначают давление на нижней и верхней поверхности цилиндра.

В пределе, когда высота цилиндра стремится к нулю, левая часть уравнения (4.70) также стремится к нулю, поскольку ускорение не может быть бесконечно большим. Отсюда делаем вывод, что

$$P_1 = P_2 \text{ на } S,$$

т.е. давление является непрерывной функцией на границе, разделяющей среды с различными параметрами.

Второе граничное условие следует из предположения, что распространение волн не приводит к возникновению пустот между средами или к их перекрытию. Это означает, что нормальная компонента смещений должна быть непрерывной функцией:

$$s_{1n} = s_{2n}. \quad (4.72)$$

Таким образом, на внутренних границах мы вместо волнового уравнения имеем следующие граничные условия

$$s_{1n} = s_{2n} \text{ и } P_1 = P_2.$$

В то же время тангенциальная компонента смещений может иметь различные значения по обе стороны границы.

СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Существует еще одно важное следствие из уравнений (4.66). Из векторного анализа (см. приложение 3) следует, что, если

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0,$$

то для векторного поля \mathbf{M} имеем

$$\mathbf{M} = \text{grad } \varphi.$$

Следовательно, смещения \mathbf{s} можно представить как

$$\mathbf{s} = \text{grad } \varphi, \quad (4.74)$$

где φ – произвольная скалярная функция, имеющая в регулярных точках первые и вторые производные по времени и координатам.

Очевидно, что существует бесконечное множество таких функций, определяющих одно и то же поле \mathbf{s} . Другими словами $\varphi(p, t)$ является вспомогательной функцией, которая вряд ли имеет какой-либо физический смысл, однако во многих случаях заметно упрощает изучение волн. Функцию φ обычно называют скалярным потенциалом векторного поля \mathbf{s} или, иначе, акустическим потенциалом. Эта функция используется также для изучения волн дилатации в упругой среде.

Подстановка равенства (4.74) в уравнение (4.68) даст

$$\text{grad} \left(\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0$$

или

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \text{const.}$$

Поскольку константа не зависит от положения точки, а волны отсутствуют на бесконечности, последнее выражение снова приводит к волновому уравнению:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4.75)$$

Существенно, что одно и то же волновое уравнение описывает распространение волн дилатации в газе, жидкости и упругой среде.

Мы ввели понятие скалярного потенциала $\varphi(p, t)$ и нашли, как он связан со смещением (4.74). Выразим теперь давление в терминах этой функции. Подстановка выражения (4.74) в первое уравнение (4.57) дает

$$P_a = -K \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -K \nabla^2 \varphi.$$

В соответствии с уравнением (4.75) имеем

$$P_a = -\frac{K}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad P_a = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (4.76)$$

поскольку

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}.$$

Граничные условия для скалярного потенциала следуют из равенств (4.73). По определению, нормальная компонента смещения

$$s_n = \partial \varphi / \partial n.$$

Следовательно, на границах выполняются следующие условия

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad \text{и} \quad \rho_{01} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \rho_{02} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.$$

Последнее равенство можно заметно упростить, поскольку произведение $\rho_0 \varphi$ обеспечивает непрерывность давления и, следовательно, само является непрерывной функцией. Отсюда граничные условия для потенциала имеют вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad \text{и} \quad \rho_{01} \varphi_1 = \rho_{02} \varphi_2. \quad (4.77)$$

Мы получили уравнения для смещений, давления и скалярного потенциала, которые являются произвольными функциями времени. Теперь рассмотрим специальный случай синусоидальных волн.

Известно (см. приложение 4), что рассматриваемые волновые поля можно представить как

$$\mathbf{s} = \operatorname{Re}(\mathbf{S} e^{-i\omega t}), \quad P_a = \operatorname{Re}(P_a e^{-i\omega t}) \quad (4.78)$$

и

$$\varphi = \text{Re}(\Phi e^{-i\omega t}), \quad (4.79)$$

где P_a и Φ обозначают комплексные амплитуды, а S – комплексный вектор, причем все эти функции не зависят от времени. По определению, они характеризуют амплитуду и фазу соответствующего волнового поля.

Подставляя выражение (4.79) в уравнение (4.75), получим следующее уравнение, которое называется уравнением Гельмгольца:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad (4.80)$$

поскольку

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \text{Re}(\Phi e^{-i\omega t}) \quad (4.81)$$

и

$$k = \omega/c.$$

Таким образом, вместо волнового уравнения для скалярного потенциала, мы получили уравнение для комплексной амплитуды Φ .

Из соотношений (4.74) и (4.76) следует, что комплексные амплитуды смещений и давления связаны с комплексной амплитудой потенциала следующим образом:

$$S = \text{grad} \Phi \quad \text{и} \quad P_a = \rho_0 \omega^2 \Phi. \quad (4.82)$$

Независимость комплексной амплитуды от времени заметно упрощает задачу определения волнового поля. В то же время, если предположить, что решения для синусоидальных волн известны, то решение для произвольной волны можно найти, применяя интеграл Фурье (см. приложение 7).

ДЕФОРМАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОБЪЕМА

Рассмотрим теперь одно важное свойство волн дилатации. Согласно формулам (4.57) и (4.66), поле смещений описывается в регулярных точках однородной среды следующей системой уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{s} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div } \mathbf{s} = -CP_a. \quad (4.83)$$

Из нее видно, что вихри в среде отсутствуют (см. приложение 3) и поле смещений \mathbf{s} , возникающее при распространении волны дилатации, является полем источников. Классификация векторных полей, основанная на соотношении между самим полем и генераторами этого поля (вихрями и источниками), является обычной при изучении гравитационных, электрических, магнитных и электромагнитных полей. Однако в случае акустических и упругих волн основное внимание уделяется не источникам и вихрям поля смещений \mathbf{s} или скорости \mathbf{v} , а тем типам деформации среды, которые возникают при распространении волны.

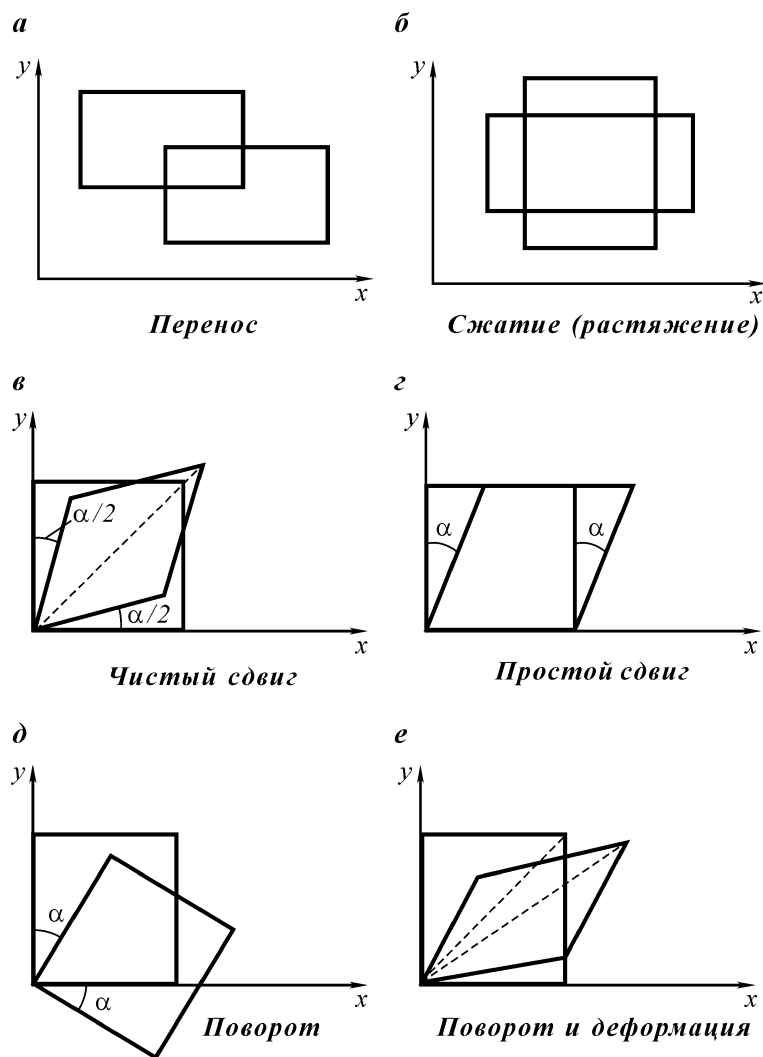


Рис. 4.3. Типы движения и деформации

В связи с этим рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих различные изменения элементарного объема. Для простоты предположим, что объем не изменяется вдоль оси z . В этом случае достаточно рассмотреть изменения его сечения (рис. 4.3). В действительности они чрезвычайно малы, и на рисунке увеличены только для наглядности.

Как известно, дивергенция (дилатация) характеризует относительное изменение объема:

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = \frac{\Delta V}{V_0} = -CP_a, \quad (4.84)$$

поскольку

$$\partial s_z / \partial z = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$s_x = 0 \text{ и } \partial s_x / \partial z = \partial s_y / \partial z = 0,$$

запишем компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{s}$ как

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{s} = \frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} = 0,$$

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{s} = \frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} = 0$$

и

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{s} = \frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y}. \quad (4.85)$$

Уравнения (4.84)–(4.85) позволяют определить те изменения объема или его положения, которые связаны с распространением волны дилатации.

Очевидно, что в случае перемещения объема как единого целого (трансляция) компоненты смещения s_x и s_y не зависят от обеих координат и, следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{s} = 0.$$

Сравнение с уравнениями (4.83) показывает, что трансляции могут происходить и происходят в тех точках, где давление P равняется нулю.

Рассмотрим теперь другой случай и предположим, что элементарный объем либо сжимается, либо растягивается, т.е.

$$\partial s_x / \partial x \neq 0 \text{ и } \partial s_y / \partial y \neq 0. \quad (4.86)$$

В то же время компоненты смещения s_x и s_y не зависят от координат y и x соответственно. Поэтому

$$\partial s_x / \partial y = \partial s_y / \partial x = 0. \quad (4.87)$$

Деформация, соответствующая этому равенству, показана на рис. 4.3, б.

Из последних двух соотношений следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \mathbf{s} = -CP_a.$$

В следующем примере (рис. 4.3, в) рассмотрим деформацию, при которой объем не меняется и соответственно

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = 0.$$

Как видно из рисунка, смещение \mathbf{s} характеризуется двумя компонентами s_x и s_y , которые прямо пропорциональны соответственно координатам y и x :

$$s_x = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) y, \quad s_y = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) x$$

или

$$s_x = \frac{\alpha}{2} y \quad \text{и} \quad s_y = \frac{\alpha}{2} x, \quad (4.88)$$

поскольку параметр α мал и

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}.$$

Здесь $\alpha/2$ обозначает угол между начальным и новым положением стороны ab .

Расстояние между частицами с различными координатами y (а также x) изменяется, и возникает новый тип деформации объема, который называется чистым сдвигом. В результате такой деформации прямоугольник трансформируется в ромб, диагонали которого одинаковым образом ориентированы относительно соответствующих координатных осей.

Из уравнения (4.88) следует, что

$$\partial s_x / \partial y = \alpha/2 \quad \text{и} \quad \partial s_y / \partial x = \alpha/2.$$

Это означает, что, как и в случае трансляции,

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{s} = 0.$$

Следующие два примера демонстрируют поведение векторного поля \mathbf{s} , которое не удовлетворяет системе уравнений (4.83). В первом из них (рис. 4.3, z) существует только одна ненулевая компонента s_x , и она прямо пропорциональна координате y . В этом случае

$$s_x = \alpha y \quad \text{или} \quad \partial s_x / \partial y = \alpha.$$

Поскольку

$$\partial s_y / \partial x = 0,$$

имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} \neq 0.$$

Этот пример иллюстрирует деформацию простого сдвига.

Другой пример приведен на рисунке 4.3, d . Он описывает вращение элементарного объема вокруг оси z . Поскольку при таком движении объем не меняется,

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = 0.$$

По аналогии с предыдущим случаем, имеем

$$s_x = \alpha y \quad \text{и} \quad s_y = -\alpha x$$

или

$$\partial s_x / \partial y = \alpha \text{ и } \partial s_y / \partial x = -\alpha. \quad (4.89)$$

Подстановка соотношений (4.89) в формулу (4.85) даст

$$\text{rot}_z \mathbf{s} = -2\alpha. \quad (4.90)$$

Последнее равенство показывает, что волны дилатации не могут приводить к вращению.

Таким образом, волны дилатации могут сопровождаться только следующими тремя типами деформаций: растяжением – сжатием, чистым сдвигом и трансляцией.

В то же время, если среда не является однородной, это заключение не верно. Действительно, как следует из второго закона Ньютона (4.57), обычно вблизи точек неоднородности $\text{rot } \mathbf{s} \neq 0$, и в таких точках могут реализовываться как поворот, так и простой сдвиг.

В заключение отметим, что на рис. 4.3, *e* представлен результат поворота и сдвиговой деформации.

4.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВОЛН. ПОТОК ЭНЕРГИИ. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

В этом разделе изучается распределение энергии при распространении в среде волн дилатации, вызывающих соответствующие смещения и деформации элементарного объема. Рассмотрим малый объем V длины l и поперечного сечения S (рис. 4.4, *a*). Предположим сначала, что объем ориентирован таким образом, что смещение частиц в нем происходит перпендикулярно поперечному сечению S . Выбирая ось x системы координат в направлении смещения \mathbf{s} , имеем

$$\mathbf{s} = s_x(p, t)\mathbf{i}. \quad (4.91)$$

Здесь \mathbf{i} – единичный вектор.

Предположим далее, что в некоторый момент времени t_0 волна, распространяющаяся в среде, достигает левой границы этого объема, находящегося в состоянии равновесия. В этот момент вызванное волной давление приводит

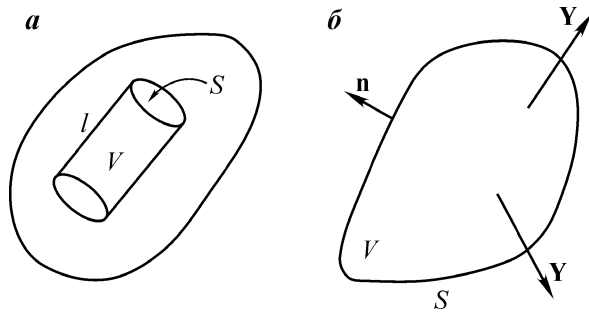


Рис. 4.4. Иллюстрация формул (4.93) и (4.103) (*a*); иллюстрация выражения (4.107) (*b*)

к смещению частиц вблизи границы объема, и по прошествии некоторого времени другие частицы объема также вовлекаются в это движение. В момент времени, когда волна достигает правой границы объема, все составляющие его частицы движутся с одинаковой скоростью. Причиной этого является то, что в среде, расположенной справа за малым объемом, возникает сила, которая имеет ту же величину, что и сила с левой стороны от объема, но противоположное направление.

Таким образом, в результате воздействия волны объем деформируется, причем его частицы движутся с одинаковыми скоростями вдоль оси x . Поэтому полная энергия объема состоит из кинетической (E) и потенциальной (U) энергии.

ПЛОТНОСТЬ КИНЕТИЧЕСКОЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Полагая скорость частиц равной v_x , для кинетической энергии объема имеем

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 \quad (4.92)$$

или

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 V, \quad (4.93)$$

поскольку

$$m = \rho_0 V \text{ и } v^2 = v_x^2 \mathbf{i}^2 = v_x^2.$$

Легко показать, что выражение (4.93) справедливо и в общем случае, когда смещение \mathbf{s} ориентировано произвольным образом относительно оси x и имеет все три ненулевые компоненты: s_x , s_y и s_z . Действительно, в этом случае кинетическая энергия

$$E = \frac{m v_x^2}{2} + \frac{m v_y^2}{2} + \frac{m v_z^2}{2},$$

где каждый член суммы описывает энергию движения вдоль соответствующей координатной оси. Последнее выражение можно заменить на соотношение

$$E = \frac{m v^2}{2} = \rho_0 \frac{v^2}{2} V, \quad (4.94)$$

которое совпадает с выражением (4.93).

Здесь \mathbf{v} обозначает вектор скорости

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

и

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Кинетическая энергия распределена в объеме равномерно, поскольку все частицы объема движутся с одинаковой скоростью, и плотность ρ_0 среды внутри объема постоянная.

Далее, в соответствии с равенством (4.94), имеем для плотности энергии

$$e_k = \frac{\rho_0}{2} \mathbf{v}^2 \quad \text{или} \quad e_k = \frac{\rho_0}{2} \cdot \dot{\mathbf{s}}^2. \quad (4.95)$$

Плотность e_k характеризует величину кинетической энергии единичного объема, которая равна половине произведения плотности среды на квадрат скорости. Функция e_k , конечно же, зависит от времени и координат точки наблюдения.

Как мы знаем, волна приводит не только к движению объема как единого целого, но и к его деформации. Другими словами, часть работы силы, возникающей при распространении волны, запасается в виде потенциальной энергии. В этом смысле аналогия между движениями элементарного объема и системы пружин и грузов очевидна.

Чтобы найти выражение для потенциальной энергии элементарного объема, имеющего поперечное сечение S и длину l , предположим, что деформация является однородной. Это означает, что во всех точках элементарного объема давление P_a и деформация $\partial s_x / \partial x$ имеют одни и те же значения:

$$P_a = \text{const}, \quad \partial s_x / \partial x = \text{const} \quad (4.96)$$

и связаны между собой как

$$P_a = -K \frac{\partial s_x}{\partial x} = -K e_{xx}. \quad (4.97)$$

В этом выражении предполагается, что смещение меняется линейно вдоль оси x . В частности, имеем

$$e_{xx} = x/l. \quad (4.98)$$

Здесь x – это смещение левой границы объема, на которую волна падает в начальный момент времени.

Как было показано в главе 1, соотношение между работой силы, приложенной к левой границе объема, и потенциальной энергией можно записать как

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = U(p_1) - U(p_2), \quad (4.99)$$

где точки p_1 и p_2 характеризуют положение этой границы.

Естественно теперь предположить, что до появления волны потенциальная энергия равнялась нулю. Тогда вместо (4.99) получим

$$U(s_x) = - \int_0^{s_x} F_x dx. \quad (4.100)$$

Поскольку

$$F_x = P_a S,$$

выражение (4.100) можно переписать как

$$U(s_x) = -S \int_0^{s_x} P_a dx. \quad (4.101)$$

Очевидно, что в течение процесса деформирования объема давление P_a и деформация e_{xx} не остаются постоянными.

Используя равенства (4.97) и (4.98), получим

$$U = KS \int_0^{s_x} e_{xx} dx \quad (4.102)$$

или

$$U = \frac{K}{l} S \int_0^{s_x} x dx = \frac{K s_x^2}{2l} S. \quad (4.103)$$

Таким образом,

$$U = \frac{K s_x^2}{2l^2} S l = \frac{K}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 V.$$

По определению, в одномерном случае ($\mathbf{s} = s_x \mathbf{i}$)

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \partial s_x / \partial x$$

и, следовательно, плотность потенциальной энергии имеет вид

$$e_p = \frac{K}{2} (\operatorname{div} \mathbf{s})^2. \quad (4.104)$$

Поскольку дивергенция векторного поля характеризует плотность его источников, она не зависит от ориентации координатных осей и от выбора системы координат (см. приложение 3). Таким образом, равенство (4.104) остается верным и в общем случае, когда вектор \mathbf{s} имеет все три ненулевые компоненты.

Из изложения видно, что полная энергия элементарного объема V равняется

$$W = U + E$$

или

$$W = \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + \frac{K}{2} \operatorname{div}^2 \mathbf{s} \right) V. \quad (4.105)$$

Соответственно, полная плотность энергии в окрестности некоторой точки дана следующим выражением:

$$e(p, t) = \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + \frac{K}{2} \operatorname{div}^2 \mathbf{s}. \quad (4.106)$$

Отсюда, например, можно представить такие точки, в которых плотности потенциальной и кинетической энергий в некоторый момент времени могут либо обращаться в ноль, либо достигать своих максимальных значений.

ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Как следует из выражения (4.106), полная энергия произвольного объема (рис 4.4, б) дается выражением

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_V [\rho_0 \mathbf{v}^2 + K \operatorname{div}^2 \mathbf{s}] dV. \quad (4.107)$$

Причиной изменения полной энергии могут служить следующие три фактора:

- 1) наличие внешних (первичных) источников волн внутри самого объема V ;
- 2) превращение этой энергии в тепло;
- 3) поток энергии через поверхность объема.

Тогда согласно принципу сохранения энергии имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L - Q - \oint_S \mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.108)$$

Здесь L – это количество кинетической и потенциальной энергии, созданной внешними источниками в единицу времени, Q – количество механической энергии, перешедшей в тепло (также в единицу времени).

Последний член в правой части равенства (4.108)

$$\oint_S \mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.109)$$

называется потоком энергии. Он определяет количество энергии, передающейся через поверхность S объема за одну секунду. Вектор \mathbf{Y} характеризует плотность потока энергии и играет ту же роль, что и плотность тока \mathbf{j} при изучении электрического тока.

Таким образом, поток равняется количеству энергии, переносимой через элементарную поверхность единичной площади за одну секунду. При этом важно, чтобы эта поверхность была перпендикулярна вектору \mathbf{Y} , который так же, как и в случае электромагнитных полей называется вектором Пойнтинга.

По определению, в системе единиц СИ

$$[Y] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Поскольку вектор \mathbf{dS} направлен в сторону от объема, положительное значение потока означает, что объем теряет энергию, и, наоборот, энергия внутри объема увеличивается, если поток энергии является отрицательным. В общем случае в разных точках поверхности S вектор Пойнтинга имеет различную амплитуду и направление. В частности, в некоторых точках он может быть направлен внутрь объема, а в других иметь направление в сторону от объема или параллельно его поверхности.

Выразим теперь вектор потока энергии \mathbf{Y} через давление и скорость частиц. Для упрощения выкладок предположим, что среда внутри объема однородная, а внешние источники энергии отсутствуют. Также пренебрежем эффектом перехода механической энергии объема в тепло, т.е.

$$L = Q = 0.$$

Тогда вместо (4.108) можно записать

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_S \mathbf{Y} \cdot \mathbf{dS}. \quad (4.110)$$

Очевидно, что в этом случае причиной любого изменения энергии W может быть только поток энергии.

Так, например, если поток через поверхность S является положительным, производная $\partial W / \partial t$ отрицательна, и, следовательно, количество энергии внутри объема уменьшается.

Сначала выразим смещения через скалярный потенциал и выполним некоторые другие довольно простые алгебраические действия. Принимая во внимание тот факт, что в однородной среде векторное поле смещений \mathbf{s} представляет собой поле источников (см. приложение 3), $\text{rot } \mathbf{s} = 0$, мы снова можем ввести потенциал φ :

$$\mathbf{s} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi.$$

Отсюда выражения для плотности кинетической и потенциальной энергий можно записать в виде

$$e_k = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 (\nabla \varphi)^2 \quad (4.111)$$

и

$$e_p = \frac{1}{2} K \text{div}^2 \mathbf{s} = \frac{K}{2} (\nabla^2 \varphi)^2,$$

поскольку

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi.$$

Подстановка формул (4.111) в равенство (4.107) дает следующее выражение для полной энергии объема V :

$$W = \int_V \left[\frac{\rho_0}{2} (\nabla \dot{\varphi})^2 + \frac{K}{2} (\nabla^2 \varphi)^2 \right] dV, \quad (4.112)$$

где

$$\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial t.$$

Дифференцируя равенство (4.112) по времени, получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V [\rho_0 \nabla \dot{\varphi} \cdot \nabla \ddot{\varphi} + \rho_0 c^2 \nabla^2 \varphi \nabla^2 \dot{\varphi}] dV, \quad (4.113)$$

поскольку

$$K = \rho_0 c^2$$

и c является фазовой скоростью волны, причем

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Поскольку скалярный потенциал удовлетворяет уравнению движения

$$\nabla^2 \varphi = \ddot{\varphi} / c^2,$$

формулу (4.113) можно переписать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \rho_0 \int_V [\nabla \dot{\varphi} \cdot \nabla \ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} \nabla^2 \dot{\varphi}] dV. \quad (4.114)$$

Стоящее здесь подынтегральное выражение можно упростить. Действительно, используя тождество

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = \nabla a \cdot \nabla b + a \nabla^2 b$$

и вводя обозначения

$$a = \ddot{\varphi} \text{ и } b = \dot{\varphi},$$

получим

$$\nabla \cdot (\ddot{\varphi} \nabla \dot{\varphi}) = \nabla \ddot{\varphi} \cdot \nabla \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} \nabla^2 \dot{\varphi}.$$

Таким образом, вместо равенства (4.113) получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \rho_0 \int_V [\operatorname{div}(\ddot{\varphi} \nabla \dot{\varphi})] dV. \quad (4.115)$$

Как было показано в предыдущем разделе,

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \dot{\varphi} \text{ и } P_a = -\rho_0 \ddot{\varphi}.$$

Соответственно, выражение (4.115) можно записать как

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \operatorname{div}(P_a \mathbf{v}) dV. \quad (4.116)$$

Теперь, применяя теорему Гаусса (см. приложение 3)

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \oint_S \mathbf{X} \cdot \mathbf{dS},$$

выразим скорость изменения энергии $\partial W/\partial t$ через поверхностный интеграл:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_S P_a \mathbf{v} d\mathbf{S}, \quad (4.117)$$

где S – поверхность объема V .

Наконец, из формул (4.110) и (4.117) получаем

$$\oint_S (Y - P_a \mathbf{v}) d\mathbf{S} = 0. \quad (4.118)$$

ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Мы удовлетворим уравнению (4.118), если положим

$$\mathbf{Y} = P_a \mathbf{v}. \quad (4.119)$$

Безусловно, можно представить себе бесконечное число векторных функций, описывающих вектор \mathbf{Y} , которые также будут являться решениями уравнения (4.118). Учитывая, что равенство (4.118) выполняется для произвольной поверхности S , приходим к выводу, что подынтегральное выражение в этой формуле равно нулю. Другими словами, вектор Пойнтинга равен произведению избыточного давления и скорости. Отсюда следует, что если давление P_a положительно, то векторы \mathbf{v} и \mathbf{Y} направлены в одну сторону. И наоборот, в окрестности тех точек, где давление P_a отрицательное, вектор Пойнтинга и вектор скорости имеют противоположные направления. Можно сказать, что вектор Пойнтинга позволяет наглядно представить распространение волны как перенос энергии.

Рассматривая поведение давления и смещения в окрестности границы раздела двух сред с разными параметрами, мы видели, что

$$P_1 = P_2 \quad \text{и} \quad s_{1n} = s_{2n}, \quad (4.120)$$

в то время как тангенциальная компонента смещения может иметь разрыв.

Вместо равенств (4.120) можно записать

$$P_1 = P_2 \quad \text{и} \quad v_{1n} = v_{2n}.$$

Таким образом, нормальная компонента вектора \mathbf{Y} является в окрестности границы непрерывной функцией, а тангенциальная компонента этого вектора обычно претерпевает разрыв:

$$Y_{1n} = Y_{2n} \quad \text{и} \quad Y_{1t} \neq Y_{2t}. \quad (4.121)$$

Последнее соотношение показывает, что по обе стороны границы вектор Пойнтинга имеет разные амплитуды и направления.

По определению (см. приложение 3), вектор Пойнтинга направлен по касательной к векторной линии (линии тока) поля (рис. 4.5, *a*), а семейство таких линий образует геометрическую модель этого поля. Представим себе произвольную замкнутую кривую l , не совпадающую с векторной линией ни

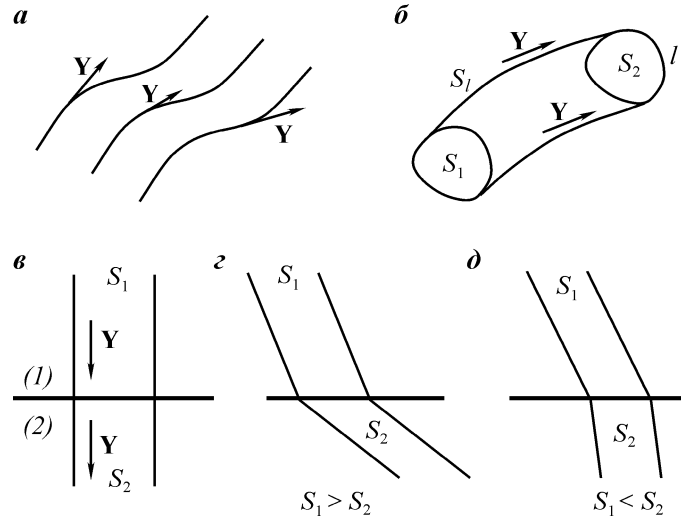


Рис. 4.5. Линии тока вектора Пойнтинга (а); векторные трубки вектора Пойнтинга (б); нормальное падение волны (в); поведение векторных трубок \mathbf{Y} на границе раздела (з, д)

в одной точке и проведем через каждую точку этой кривой векторную линию (рис. 4.5, б). Таким образом, мы получим векторную трубку поля \mathbf{Y} .

Поскольку горизонтальная поверхность S_1 образована векторными линиями, вектор Пойнтинга направлен по касательной к этой поверхности:

$$Y_n = 0 \text{ на } S_1. \quad (4.122)$$

Другими словами, поток энергии через поверхность S_1 равен нулю, и это означает, что поток энергии через любое поперечное сечение векторной трубки остается постоянным. В общем случае вектор Пойнтинга изменяется вдоль трубки, т.е. может иметь различные значения в разных точках сечений трубки. В то же время, поскольку амплитуда вектора Пойнтинга меняется вдоль сечений незначительно, этими различиями можно пренебречь.

Такая векторная трубка называется элементарной, поток энергии внутри трубки

$$Y(p_1)S(p_1) = Y(p_2)S(p_2) = \dots = \text{const}. \quad (4.123)$$

Здесь $Y(p)$ обозначает амплитуду вектора Пойнтинга.

Таким образом, величина \mathbf{Y} обратно пропорциональна площади сечения:

$$Y \sim 1/S. \quad (4.124)$$

Рассмотрим поведение такой трубки на границе раздела двух сред. Сначала предположим, что тангенциальная компонента скорости равняется нулю (рис. 4.5, в). Поскольку модуль вектора \mathbf{Y} остается неизменным, площадь поперечного сечения также не должна меняться:

$$S_1 = S_2.$$

Рассмотрим другой случай (рис. 4.5, з), при котором тангенциальная компонента смещений и, следовательно, тангенциальная компонента скорости удовлетворяет следующему условию:

$$v_{2t} > v_{1t}.$$

В соответствии с этим условием, амплитуда вектора Пойнтинга во второй среде увеличивается. Поскольку поток энергии в трубке остается постоянным, отсюда делаем вывод, что

$$S_2 < S_1.$$

Наконец, рассмотрим последний случай, при котором $v_{2t} < v_{1t}$ (рис. 4.5, д). В этом случае поперечное сечение элементарной трубки во второй среде увеличивается:

$$S_2 > S_1.$$

4.4. ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Как уже упоминалось ранее, исходя только из физических законов, управляющих поведением волн, или, что эквивалентно, основываясь только на волновом уравнении, нельзя однозначно определить давление P_a и скорости частиц \mathbf{v} , возникающие при распространении волн. Причина этого заключается в том, что волновое уравнение имеет бесконечно много решений. Учитывая это, необходимо сформулировать граничную задачу (см. приложение 3). Другими словами, необходимо задать такие условия, которые вместе с волновым уравнением определяли бы волновое поле единственным образом. Аналогичный подход используется для электрических, магнитных и электромагнитных полей. Чтобы решить эту проблему, мы докажем теорему единственности для случая распространения волны в кусочно-однородной среде.

Как было показано в разделе 4.2, в регулярных точках функции $P(p, t)$ и $\mathbf{v}(p, t)$ удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}, \quad (4.125)$$

а на границах сред давление и нормальная компонента скорости являются непрерывными функциями (рис. 4.6, а):

$$P_i = P_{i+1} \quad \text{и} \quad v_{n,i} = v_{n,i+1}. \quad (4.126)$$

В то же время тангенциальная компонента скорости v_t может на этих границах претерпевать разрыв. Здесь следует сделать два замечания:

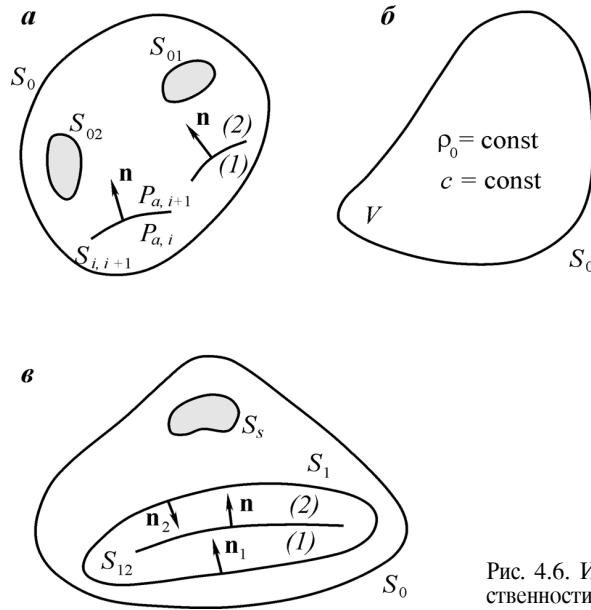


Рис. 4.6. Иллюстрация теоремы единственности

а) второе из уравнений (4.125) получено с помощью дифференцирования по времени волнового уравнения для смещения s ;

б) для упрощения формул мы везде опустили нижний индекс α :

$$P_\alpha = P. \quad (4.127)$$

Уравнения (4.125) и (4.126) описывают поведение волн дилатации в кусочно-однородной среде, за исключением тех точек, где располагаются первичные источники этих волн. Отсюда следует, что эти уравнения имеют бесконечно много решений, т.е. они не определяют волновое поле однозначно. Чтобы определить функции P и v , необходимо иметь о них дополнительную информацию, которую обычно можно получить исходя из конкретной задачи.

В этом смысле существует полная аналогия с формулировками граничных задач для других геофизических полей. Чтобы получить необходимую информацию, мы начнем с принципа сохранения энергии и рассмотрим несколько моделей среды и волновых полей.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ

1. Предположим, что среда, заключенная в объеме V (рис. 4.6, б), является однородной, и в ней отсутствует затухание. Кроме того, предположим также, что нет никаких внешних генераторов волнового поля. Тогда, как следует из уравнения (4.117),

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint_{S_0} P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (4.128)$$

где S_0 – это замкнутая поверхность объема V , а

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left(\rho_0 \mathbf{v}^2 + \frac{P^2}{K} \right) dV \quad (4.129)$$

– полная энергия, заключенная в данном объеме, которая является величиной неотрицательной.

Существенно, что уравнение (4.128) связывает волновые поля внутри объема и на его поверхности. Именно поэтому оно используется для доказательства теоремы единственности. Интуитивно понятно, что давление и скорость частицы в каждой точке объема V в некоторый момент времени t зависят от поведения волны внутри и вне объема в моменты времени, предшествующие t . Зафиксируем некоторый начальный момент времени t_0 и будем далее рассматривать поведение волн в моменты времени t :

$$t \geq t_0.$$

Для того чтобы однозначно определить параметры волны в момент времени t , необходимо иметь информацию о волновом поведении в интервале времени

$$t_0 < t_* < t.$$

Чтобы определить условия, необходимые для единственности, рассмотрим два произвольных решения волновых уравнений:

$$\mathbf{v}_1, P_1 \text{ и } \mathbf{v}_2, P_2.$$

Поскольку уравнения (4.125) являются линейными, разности

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \text{ и } P_3 = P_2 - P_1 \quad (4.130)$$

также являются решениями уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{v}_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_3}{\partial t^2} \text{ и } \nabla^2 P_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}, \quad (4.131)$$

и, следовательно, равенство (4.128) можно записать в виде

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + \oint_{S_0} P_3 \mathbf{v}_{3n} dS = 0. \quad (4.132)$$

Здесь W_3 – полная энергия разностного поля, а P_3 и \mathbf{v}_{3n} обозначают, соответственно, избыточное давление и нормальную компоненту скорости на поверхности S_0 .

Предположим теперь, что оба решения (4.130) имеют одинаковые значения избыточного давления во всех точках поверхности S_0 , т.е.

$$P_1(p, t_*) = P_2(p, t_*) = f_1(p, t_*) \text{ на } S_0. \quad (4.133)$$

В этом случае давление P_3 разностного поля на поверхности S_0 всюду равняется нулю:

$$P_3(p, t_*) = 0 \quad \text{на } S_0 \quad (4.134)$$

и, в соответствии с уравнением (4.132), поток вектора Пойнтинга через эту поверхность также имеет нулевое значение.

Таким образом,

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = 0, \quad (4.135)$$

и сумма кинетической и потенциальной энергий разностного поля в указанном интервале времени остается постоянной.

Пусть в дополнение к этому известно волновое поле в начальный момент времени t_0 :

$$P(p, t_0) = \psi(p, t_0) \text{ и } \mathbf{v}(p, t_0) = \mathbf{N}(p, t_0). \quad (4.136)$$

Если оба решения: P_1, \mathbf{v}_1 и P_2, \mathbf{v}_2 удовлетворяют условиям (4.136), то разностные поля P_3, \mathbf{v}_3 в этот момент времени равны нулю в каждой точке объема V :

$$P_3(p, t_0) = 0, \quad \mathbf{v}_3(p, t_0) = 0. \quad (4.137)$$

Таким образом, полная энергия E_3 также равняется нулю:

$$W_3(p, t_0) = 0. \quad (4.138)$$

Затем, учитывая выражение (4.135), мы делаем вывод, что функция W_3 остается равной нулю:

$$W_3(p, t_*) = 0, \quad (4.139)$$

при условии, что $t \geq t_0$.

Поскольку полная энергия является суммой двух положительных слагаемых, которые описывают кинетическую и потенциальную энергии (см. формулу 4.129), равенство (4.139) выполняется, если

$$P_3(p, t_*) = 0 \text{ и } \mathbf{v}_3(p, t_*) = 0.$$

По определению разностного поля (4.130) это означает, что

$$P_1(p, t_*) = P_2(p, t_*) \text{ и } \mathbf{v}_1(p, t_*) = \mathbf{v}_2(p, t_*). \quad (4.140)$$

Таким образом, два решения волновых уравнений, удовлетворяющие условиям (4.133) и (4.136), совпадают друг с другом, т.е. эти решения единственным образом определяют волновые поля внутри объема V . Другими словами, мы доказали теорему единственности, и граничную задачу теперь можно сформулировать следующим образом:

а) внутри объема V , где все точки являются регулярными, имеем

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2};$$

б) в каждой точке поверхности S_0 избыточное давление должно совпадать со следующей функцией:

$$P(p, t_*) = f_1(p, t_*) \text{ на } S_0; \quad (4.141)$$

в) в начальный момент времени t_0 давление P и скорость \mathbf{v} должны быть известны в каждой точке данного объема:

$$P(p, t_0) = \psi(p, t_0) \text{ и } \mathbf{v} = \mathbf{N}(p, t_0).$$

В соответствии с теоремой единственности эти три условия однозначно определяют волну в каждой точке объема, показанного на рис. 4.6, б.

Здесь необходимо сделать следующие замечания.

Условие (4.141) называется граничным условием, и для него требуется знать давление в каждой точке замкнутой поверхности на интервале времени

$$t_0 \leq t_* \leq t.$$

Это граничное условие позволяет учесть влияние источников, расположенных вне объема V .

В отличие от граничного условия, выражение (4.136) определяет начальные условия, означающие, что в начальный момент времени t_0 необходимо знать давление P и скорость \mathbf{v} в каждой точке объема. Информация, необходимая для задания граничных и начальных условий, определяется обычно из свойств конкретной задачи. Объем V может быть окружен несколькими поверхностями: $S_0, S_{01}, S_{02}, \dots, S_{0n}$ (см. рис. 4.6, а), и давление должно быть известно на каждой из этих поверхностей.

Предположим, что на поверхности S_0 вместо давления задана нормальная компонента скорости:

$$v_n(t_*) = f_2(t_*) \text{ на } S_0. \quad (4.142)$$

Если мы снова рассмотрим два решения волнового уравнения, удовлетворяющие условию (4.142), поверхностный интеграл в выражении (4.132) для разностного поля также обратится в нуль. Отсюда следует, что это граничное условие вместе с начальным условием также однозначно определяют волновое поле.

Исходя из теоремы единственности, мы получили два независимых граничных условия:

$$P(t_*) = f_1(t_*) \text{ или } v_n(t_*) = f_2(t_*) \text{ на } S_0.$$

Каждое из них можно использовать для формулировки граничной задачи.

2. Рассмотрим теперь более общий случай кусочно-однородной среды, заполняющей объем V . Для простоты предположим, что существует единственная внутренняя граница S_{12} (рис. 4.6, в), по обе стороны от которой физические свойства среды (ρ, c) могут различаться. Принимая это во внимание, нарисуете вокруг этой границы поверхность S_1 . Тогда для объема V^* , заключенного внутри поверхностей S_0 и S_1 , мы снова имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint_{S_0} P v_n dS + \oint_{S_1} P v_n dS = 0. \quad (4.143)$$

В пределе, когда поверхность S_1 стремится к поверхности S_{12} , объем V^* стремится к V , и следовательно, в последнем слагаемом (4.143) нужно интегрировать по обеим сторонам поверхности S_{12} .

Учитывая направления единичных векторов \mathbf{n} , \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 ,

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1, \text{ но } \mathbf{n} = -\mathbf{n}_2,$$

показанных на рисунке 4.6, в, получим

$$\oint_{S_1} P v_n dS = \int_{S_{12}} [P^{(1)} v_n^{(1)} - P^{(2)} v_n^{(2)}] dS, \quad (4.144)$$

где $P^{(1)}$, $v_n^{(1)}$ и $P^{(2)}$, $v_n^{(2)}$ обозначают давление и нормальную компоненту скорости соответственно на задней и лицевой поверхности.

Из законов физики следует, что обе эти функции являются непрерывными при переходе через поверхность раздела и, следовательно, решения волнового уравнения также должны удовлетворять равенствам (4.126). Поэтому интеграл (4.144) обращается в нуль, и мы снова приходим к уравнению (4.128). Таким образом, в соответствии с теоремой единственности, в формулировку граничной задачи необходимо включить еще одно условие, а именно условие непрерывности избыточного давления P и нормальной компоненты скорости v_n на внутренней границе. Очевидно, что точно так же будет формулироваться задача с граничными условиями при наличии нескольких границ раздела $S_{i, i+1}$ и поверхностей S_{oi} , окружающих объем V . Следует отметить, что граничные условия могут различаться на разных поверхностях S_{oi} , а также в различных точках одной и той же поверхности S_{oi} .

Сделаем еще одно замечание. То, что граничные и начальные условия определяют единственным образом волновое поле, означает, прежде всего, наличие определенных соотношений между этими условиями и волновым полем в каждой точке объема V . В дальнейшем этот вопрос будет обсуждаться более подробно, что приведет нас к известным формулам Гельмгольца и Кирхгофа.

3. До сих пор предполагалось, что первичные (внешние) источники волн внутри объема V отсутствуют. Рассмотрим теперь более общий случай, когда внутри указанного объема находится некоторый источник. Окружим этот источник замкнутой поверхностью S_s (рис. 4.6, в) и снова применим закон сохранения энергии к волновому полю, возникающему в объеме V^* , заключенному внутри поверхностей S_0 , S_{12} и S_s . В частности, для разностного поля имеем

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + \oint_{S_0} P v_{3n} dS + \oint_{S_{12}} P v_{3n} dS + \oint_{S_s} P v_{3n} dS = 0. \quad (4.145)$$

Очевидно, что в случае поверхности S_0 последний интеграл равняется нулю:

$$\oint_{S_s} P v_{3n} dS = 0, \quad (4.146)$$

если давление либо нормальная компонента скорости заданы на поверхности S_s . В этом случае уравнения (4.145) и (4.143) совпадают. Таким образом, решение граничной задачи, т.е. волновое поле, должно удовлетворять следующим условиям:

а) в регулярных точках кусочно-однородной среды:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2},$$

б) на поверхности S_s , окружающей источник:

$$P(t_*) = f_{1s}(t_*) \quad \text{или} \quad v_n(t_*) = f_{2s}(t_*) \quad \text{на } S_s;$$

в) на границе раздела $S_{i,i+1}$:

$$P_i = P_{i+1} \quad \text{и} \quad v_{n,i} = v_{n,i+1};$$

г) на границе S_0 , окружающей объем, должно быть известно давление P или нормальная компонента скорости v_n :

$$P(t_*) = f_1(t_*) \quad \text{или} \quad v_n(t_*) = f_2(t_*) \quad \text{на } S_0;$$

д) в начальный момент времени t_0 в каждой точке объема должны быть известными избыточное давление и скорость:

$$P(p, t_0) = \psi(p, t_0) \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(p, t_0) = \mathbf{NP}(p, t_0).$$

Как следует из теоремы единственности, все перечисленные условия определяют волновое поле единственным образом.

Очень часто оказывается возможным вместо реального источника использовать его подходящую модель, например точечный или линейный источник. Такая замена, как правило, не влияет на поведение волн на расстояниях, в несколько раз превышающих размеры источника. Однако такие модели значительно упрощают граничные условия вблизи него. Как будет показано в дальнейшем, давление и скорость частицы вблизи таких источников увеличиваются до бесконечности, и, следовательно, полное волновое поле определяется только самим источником:

$$P(p, t_*) \rightarrow P_p(p, t_*) \quad \text{или} \quad v_n(p, t_*) \rightarrow v_{np}(p, t_*), \quad \text{если } R \rightarrow 0, \quad (4.147)$$

где P_p и v_{np} описывают первичную волну от точечного или линейного источника, а R обозначает расстояние между источником и точкой наблюдения. Асимптотические соотношения (4.147) в дальнейшем будут часто использоваться в качестве граничных условий вблизи источника.

Полезно также отметить следующее. При изучении волнового поля во всем пространстве поверхность S_0 нужно устремить к бесконечности (рис.

4.6, в). В этом случае ее можно рассматривать как поверхность сферы бесконечного радиуса. Поскольку волны распространяются с конечной скоростью c , можно предположить, что волновое поле на этой поверхности отсутствует. Соответствующее граничное условие запишется в виде выражения

$$P(t_*) \rightarrow 0 \text{ и } v(t_*) \rightarrow 0, \text{ если } R \rightarrow \infty, \quad (4.148)$$

которое называется условием на бесконечности. В действительности начальные условия уже содержат эту информацию, и, следовательно, нет необходимости использовать асимптотические соотношения (4.148).

В регулярных точках кусочно-однородной среды скорости частиц и смещения являются полями источников. Поэтому естественно сформулировать граничные условия в терминах скалярного потенциала φ . Как мы уже знаем, скалярный потенциал удовлетворяет волновому уравнению и связан со смещением частиц и избыточным давлением следующими соотношениями:

$$s = \text{grad } \varphi \text{ и } P = -\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Учитывая эти равенства, граничную задачу для потенциала можно сформулировать следующим образом:

а) в регулярных точка среды:

$$\nabla^2 \varphi_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2};$$

б) в окрестности первичного источника:

$$\varphi(p, t_*) \rightarrow \varphi_p(p, t_*), \text{ если } R \rightarrow 0,$$

где φ_p – скалярный потенциал первичной волны от точечного или линейного источника;

в) на границе двух сред с различными физическими свойствами:

$$\rho_i \varphi_i(t_*) = \rho_{i+1} \varphi_{i+1}(t_*) \text{ и } \frac{\partial \varphi_i(t_*)}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{i+1}(t_*)}{\partial n};$$

г) на любой граничной поверхности должны быть известны скалярный потенциал или нормальная компонента скорости:

$$\varphi(t_*) = \alpha(t_*) \text{ или } \frac{\partial \varphi_i(t_*)}{\partial n} = \beta(t_*);$$

д) в начальный момент времени в каждой точке объема должны быть известны скалярный потенциал и его вторая производная по времени:

$$\varphi(p, t_0) = \alpha_0(p) \text{ и } \frac{\partial \varphi(p, t_0)}{\partial t^2} = \beta_0(p),$$

поскольку эти две величины определяют скорость и давление.

ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН

Из-за наличия начальных условий решение граничной задачи обычно оказывается довольно трудной задачей. Это одна из главных причин, из-за которой мы рассмотрим случай, когда волны являются синусоидальными функциями времени. Тогда скалярный потенциал можно представить как

$$\varphi(p, t) = \operatorname{Re}[\Phi(p, \omega)e^{-i\omega t}], \quad (4.149)$$

где $\Phi(p, \omega)$ – комплексная амплитуда потенциала, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \Phi(p, \omega) + k^2 \Phi(p, \omega) = 0.$$

Здесь $k = \omega/c$ – волновое число.

Перед тем, как сформулировать граничную задачу, заметим следующее:

а) по определению, комплексная амплитуда $\Phi(p, \omega)$ не зависит от времени и, следовательно, отпадает необходимость использовать начальные условия. По этой причине определение синусоидальных волн значительно легче, чем определение нестационарных (бегущих) волн;

б) очевидно, что из непрерывности давления и нормальной компоненты скорости следует непрерывность комплексных амплитуд.

В соответствии с этим, граничную задачу для комплексных амплитуд можно сформулировать следующим образом.

1. В регулярных точках

$$\nabla^2 \Phi_i + k_i^2 \Phi_i = 0.$$

2. Вблизи точечного или линейного источника

$$\Phi \rightarrow \Phi_p, \text{ если } R \rightarrow 0.$$

3. На внутренней границе

$$\rho_i \Phi_i = \rho_{i+1} \Phi_{i+1} \text{ и } \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial n}.$$

4. В случае бесконечного пространства функция $\Phi^*(p, \omega)$ стремится к нулю на бесконечности:

$$\Phi(p, \omega) \rightarrow 0, \text{ если } R \rightarrow \infty,$$

и ее поведение подчиняется определенному правилу (условию Зоммерфельда), которое мы рассмотрим позднее.

Как уже отмечалось, в результате решения данной граничной задачи и последующего использования интеграла Фурье мы можем также найти выражения для нестационарных волн.

4.5. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ

Ранее мы рассмотрели примеры продольных и поперечных волн, в которых вектор смещения s направлен либо параллельно, либо перпендикулярно вектору скорости волны c . В обоих случаях распространение волны сопровождалось определенными деформациями среды и, как следствие, появлением внутренних (восстанавливающих) сил.

Рассмотрим теперь абсолютно другой тип волн, которые возникают в жидкости в том случае, когда она граничит с воздухом (имеет свободную поверхность). При распространении такой волны форма элементарного объема среды изменяется, но это не приводит к появлению внутренних сил. В то же время сила гравитации играет в этом случае ту же роль, что и внутренняя сила при распространении волн дилатации. Изложенные здесь сведения могут быть полезны при изучении волн Рэлея и Стоули, так как эти волны имеют некоторые общие черты с гравитационными волнами.

Рассмотрим однородное полупространство, заполненное идеальной несжимаемой жидкостью (вязкость идеальной жидкости равняется нулю). Как это следует из рис. 4.7, *a*, в состоянии равновесия давление жидкости определяется следующим образом:

$$P(z + \Delta z) = P(z) + \rho_0 g \Delta z.$$

Здесь z – расстояние от свободной поверхности: $z = 0$, а слагаемое $\rho g \Delta z$ характеризует вес элементарного объема жидкости ΔV , имеющего высоту Δz и единичную площадь поперечного сечения.

Таким образом, в состоянии равновесия давление линейно зависит от глубины.

Предположим далее, что в окрестности некоторой точки на поверхности $z = 0$ образуется впадина, например, вследствие падения какого-нибудь тела. В результате этого частицы не могут двигаться только по вертикали или только по горизонтали, поскольку жидкость несжимаема и ее масса по обе стороны впадины является бесконечной. Вокруг впадины формируется гребень, и, в соответствии с принципом сохранения массы, в этом гребне содержится такое же количество жидкости, какое первоначально занимало объем впадины.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Очевидно, что теперь, в отличие от состояния равновесия, давление изменяется и вдоль горизонтального направления и зависимость давления по глубине уже не является линейной. Из-за этого движение частиц жидкости происходит с ускорением. В частности, под действием силы гравитации частицы гребня движутся вниз и в результате на его месте также образуется впадина. Как следствие, гребни и впадины образуются на более далеких расстояниях и таким образом возникает волна, распространяющаяся в сторону от точки своего зарождения.

Такая волна называется гравитационной из-за роли, которую в ней играет гравитационное поле.

В дальнейшем нам понадобятся следующие предположения:

- а) жидкость является идеальной, т.е. ее вязкость считается равной нулю;
- б) жидкость является несжимаемой: $K \rightarrow \infty$;
- в) амплитуды смещений \mathbf{s} малы по сравнению с длиной волны.

Изучение гравитационных волн естественно начать со следующей системы уравнений, полученной в разделе 4.1:

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = -\frac{P_a}{K} \quad \text{и} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} P + \rho_0 \mathbf{g}$$

или, поскольку жидкость является несжимаемой,

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = 0 \quad \text{и} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\nabla P + \rho_0 \mathbf{g}. \quad (4.150)$$

Здесь целесообразно заметить следующее:

а) ускорение частиц элементарного объема вызвано двумя причинами: гравитационным полем и разностью давлений;

б) в случае волн дилатации разность давлений является единственной причиной, которая приводит к появлению избыточной плотности массы. В случае гравитационных волн эта избыточная плотность ρ_a равняется нулю, а разность давлений возникает из-за вертикального движения частиц вблизи свободной поверхности и ниже.

Согласно уравнениям (4.150), в регулярных точках выполняются следующие равенства:

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{s} = 0, \quad (4.151)$$

т.е. внутри жидкости отсутствуют источники и вихри поля \mathbf{s} .

Геометрическая интерпретация уравнений (4.151) состоит в том, что гравитационное поле не приводит к изменению объема ($\operatorname{div} \mathbf{s} = 0$) и у поля смещений отсутствуют вращения и простые сдвиги ($\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0$).

Вместо смещения \mathbf{s} , удобнее использовать скорость частицы \mathbf{v} . Дифференцируя уравнения (4.151) по времени, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.152)$$

Как известно, из первого уравнения этой системы следует, что

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi_1, \quad (4.153)$$

где φ_1 – скалярный потенциал поля \mathbf{v} .

Подстановка уравнения (4.153) во второе уравнение (4.151) дает

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_1 = 0$$

или

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0. \quad (4.154)$$

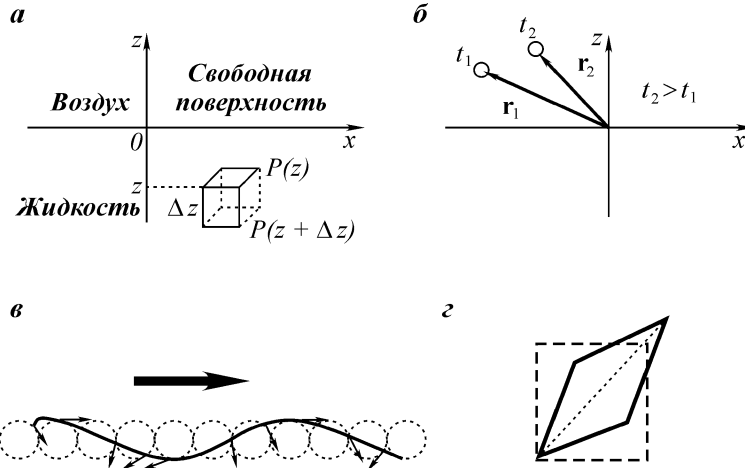


Рис. 4.7. Давление в положении равновесия (а); движение частиц во времени (б); распространение поверхностной волны (в); деформация элементарного объема (г)

Таким образом, скалярный потенциал φ_1 в регулярных точках удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в декартовых прямоугольных координатах (рис. 4.7, а) записывается как

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (4.155)$$

Это уравнение выполняется во всех точках полупространства, за исключением свободной поверхности $z = 0$.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Чтобы изучить поведение потенциала на свободной поверхности, воспользуемся уравнением (4.150), представляющим собой формулировку второго закона Ньютона. Вводя скорость частицы

$$\mathbf{v} = \partial \mathbf{s} / \partial t$$

и используя уравнение (4.153), получим

$$\rho_0 \text{grad} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\text{grad} P + \rho_0 \mathbf{g}. \quad (4.156)$$

По определению градиента скалярной функции, z -компонента этого уравнения записывается как

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_0 g. \quad (4.157)$$

Здесь g – амплитуда гравитационного поля, а знак "минус" перед последним слагаемым в правой части появляется из-за того, что направление поля \mathbf{g} всюду противоположно направлению оси z .

Интегрирование уравнения (4.157) по координате z дает

$$\rho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -P - \rho_0 g z + C. \quad (4.158)$$

Здесь C – постоянная интегрирования, не зависящая от z , а потенциал φ_1 является вспомогательной функцией, определяемой с точностью до константы.

Учитывая, что давление на свободной поверхности равняется атмосферному давлению P_0 , которое считается постоянным, перепишем уравнение (4.158) в виде

$$P_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_0 g s_z + C, \quad (4.159)$$

где s_z обозначает смещение частиц свободной поверхности, и $s_z = z$.

Чтобы упростить уравнение (4.159), зададим скалярный потенциал φ_1 как

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{1}{\rho_0} (P_0 - C)t.$$

Тогда уравнение (4.159) перепишется следующим образом:

$$P_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P_0 - \rho_0 g s_z$$

или

$$s_z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.160)$$

Это уравнение задает соотношение между смещением s_z и потенциалом φ в точках свободной поверхности.

Поскольку наша цель состоит в том, чтобы получить решение граничной задачи относительно скалярного потенциала, естественно теперь заменить смещение s_z в уравнении (4.160) его выражением через потенциал φ .

Дифференцируя уравнение (4.160) по времени, получим

$$\frac{\partial s_z}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4.161)$$

Левая часть этого выражения представляет собой z -компоненту скорости частицы: v_z . В то же время, согласно уравнению (4.161), z -компонента скорости определяется как

$$v_z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Таким образом, вместо уравнения (4.161) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4.162)$$

Это уравнение записано для точек свободной поверхности, смещенных в результате распространения волны относительно своего первоначального положения. Тем не менее, учитывая, что смещения частиц малы, будем предполагать, что производные в уравнении (4.162) берутся в точках $z = 0$.

Сформулируем теперь граничную задачу, состоящую из следующих условий:

а) в регулярных точках потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0;$$

б) на свободной поверхности выполняется следующее граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \text{ если } z = 0;$$

в) с увеличением расстояния от свободной поверхности, амплитуда волнового поля должна уменьшаться и на бесконечности стремиться к нулю:

$$\varphi(z) \rightarrow 0, \text{ если } z \rightarrow -\infty.$$

Поскольку нашей задачей является изучение общих свойств гравитационных волн, мы не будем учитывать влияние первичных источников. Более того, мы предположим, что потенциал φ не зависит от координаты y и описывает синусоидальную волну, распространяющуюся вдоль оси x . В этом случае уравнение Лапласа заметно упрощается:

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0. \quad (4.163)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений. Поскольку мы интересуемся волновыми явлениями, естественно искать решение уравнения (4.163) в виде

$$\varphi = A(z) \cos(\omega t - kx). \quad (4.164)$$

Множитель

$$\cos(\omega t - kx)$$

указывает на то, что волна распространяется в сторону от начальной точки $x = 0$.

В предыдущих выражениях $A(z)$ является неизвестной функцией, ω обозначает круговую частоту, а k – волновое число, причем (см. главу 3)

$$k = \omega/c, \quad (4.165)$$

где c – фазовая скорость волны.

Чтобы определить функцию $A(z)$, подставим выражение (4.164) в уравнение (4.163). В результате получим обычное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$d^2 A / dz^2 - k^2 A = 0. \quad (4.166)$$

Известно, что решение этого уравнения имеет вид

$$A(z) = C e^{-kz} + D e^{kz}. \quad (4.167)$$

Учитывая, что волновое поле должно затухать при $z \rightarrow \infty$, отбросим член Se^{-kz} и получим

$$A(z) = De^{kz}. \quad (4.168)$$

Выражение для скалярного потенциала принимает вид

$$\varphi(x, z, \omega) = De^{kz} \cos(\omega t - kx). \quad (4.169)$$

Здесь D и k являются неизвестными. Поскольку первичные источники гравитационных волн здесь не рассматриваются, коэффициент D останется неопределенным.

Существенно, что потенциал φ , задаваемый выражением (4.169), удовлетворяет уравнению Лапласа и условиям на бесконечности. Таким образом, два из сформулированных ранее условий граничной задачи оказываются выполненными. Неизвестное волновое число k теперь можно найти из условий на свободной поверхности.

Подставляя (4.169) в (4.162), получим

$$kD \cos(\omega t - kx) = \frac{\omega^2}{g} D \cos(\omega t - kx)$$

или

$$k = \omega^2/g. \quad (4.170)$$

Из последнего равенства видно, что гравитационные волны существуют только тогда, когда волновое число k и круговая частота ω связаны между собой определенным соотношением. Другими словами, скалярный потенциал φ , задаваемый выражением (4.169), является решением сформулированной выше граничной задачи, если только волновое число k и круговая частота ω удовлетворяют условию (4.170).

Из формул (4.165) и (4.170) следует, что фазовая скорость и длина волны определяются следующими двумя выражениями:

$$c = g/\omega = gT/2\pi \quad (4.171)$$

и

$$\lambda = cT = gT^2/2\pi = 2\pi g/\omega^2. \quad (4.172)$$

ПОВЕДЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В уравнениях (4.171) и (4.172) содержится очень интересная информация о гравитационных волнах. Прежде всего, заметим, что их скорость значительно меньше, чем скорость акустических волн (см. табл. 4.1).

Т а б л и ц а 4.1

f , Гц	0,1	1,0	10,0	100,0
c , м/с	15,6	1,56	0,16	0,016
λ , м	$1,56 \cdot 10^2$	1,56	$1,56 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$
K , м ⁻¹	$4,0 \cdot 10^{-2}$	4,0	$4,0 \cdot 10^2$	$4,0 \cdot 10^4$

Из равенства (4.171) видно, что фазовая скорость является функцией частоты или, точнее, она обратно пропорциональна круговой частоте ω . В общем случае, зависимость скорости c от частоты называется дисперсионным соотношением и будет часто встречаться в дальнейшем изложении.

Рассмотрим теперь движение частиц, связанных с распространением гравитационной волны.

По определению, имеем

$$v_x = \partial\varphi/\partial x \text{ и } v_z = \partial\varphi/\partial z.$$

Отсюда, учитывая выражение (4.169) для скалярного потенциала, получим

$$v_x = Dk e^{kz} \sin(\omega t - kx) \quad (4.173)$$

и

$$v_z = Dk e^{kz} \cos(\omega t - kx).$$

Таким образом, скорость частицы \mathbf{v} имеет две компоненты с одинаковыми амплитудами и сдвигом фаз, равным $\pi/2$. Одна из этих компонент, v_x , имеет то же направление, что и фазовая скорость волны, а вторая, v_z , направлена вдоль оси z .

Из выражений (4.173) следует, что амплитуда вектора \mathbf{v} определяется как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = Dk e^{kz} \quad (4.174)$$

и в любой точке среды вектор скорости вращается в плоскости, параллельной плоскости XOZ .

Кроме этого, видно, что по мере удаления от свободной поверхности амплитуда волнового поля и, в частности, амплитуда поля скорости частиц уменьшается. Имея в виду именно эту характеристику гравитационных волн, их часто называют поверхностными. Тем не менее, это не означает, что гравитационные волны концентрируются вблизи свободной поверхности. Действительно, их зависимость от координаты z описывается множителем

$$e^{kz} = e^{2\pi \frac{z}{\lambda}}. \quad (4.175)$$

Если глубина $|z|$ значительно меньше длины волны λ , $|z| \ll \lambda$, то затухание волны с глубиной очень мало. Соответственно на больших глубинах можно наблюдать практически такие же амплитуды волнового поля, как и рядом со свободной поверхностью $z=0$. Наоборот, если глубина $|z|$ превышает длину волны, $|z| > \lambda$, амплитуда волны уменьшается очень быстро. Таким образом, низкочастотные волны можно наблюдать и на больших глубинах, в то время как высокочастотные волны концентрируются вблизи свободной поверхности. Здесь просматривается очевидная аналогия со скин-эффектом в электромагнетизме.

Определим теперь траекторию движения частиц жидкости. Интегрирование уравнений

$$v_x = \partial s_x / \partial t \quad \text{и} \quad v_z = \partial s_z / \partial t$$

дает

$$s_x = x - x_0 = -D \frac{k}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

и

$$s_z = z - z_0 = D \frac{k}{\omega} e^{kz} \sin(\omega t - kx). \quad (4.176)$$

Здесь x_0 и z_0 – координаты точки, когда жидкость находится в состоянии равновесия.

Поскольку смещения частиц очень малы, мы можем заменить координаты x и z в правой части уравнения (4.176), соответственно, на x_0 и z_0 . В результате такой замены получим

$$x - x_0 = -D \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(\omega t - kx_0),$$

$$z - z_0 = D \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(\omega t - kx_0). \quad (4.177)$$

Отсюда видно, что траектория движения частицы описывается следующим уравнением:

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = D^2 \frac{k^2}{\omega^2} e^{2kz_0},$$

т.е. частица движется по окружности радиуса

$$R = D \frac{k}{\omega} e^{kz_0} = D \frac{\omega}{g} e^{kz}, \quad \text{если } z < 0. \quad (4.178)$$

Координаты x_0 и z_0 центра этой окружности соответствуют положению равновесия частицы. Как следует из равенств (4.178), с увеличением глубины $|z_0|$ радиус этой окружности уменьшается.

Чтобы определить направление движения частицы вдоль траектории, предположим вначале, что

$$0 \leq \omega t - kx < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, как следует из уравнений (4.177), с течением времени горизонтальная компонента смещения $|s_x|$ становится меньше, в то время как вертикальная компонента $|s_z|$ увеличивается (рис. 4.7, б). Отсюда следует, что частица движется по часовой стрелке.

Аналогичным образом можно показать, что такое же направление движения сохраняется и для другого интервала периодов

$$\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kx \leq 2\pi.$$

Форма волны и движения частиц показаны на рис. 4.7, в.

Безусловно, между движениями различных частиц существует фазовый сдвиг. Как видно из рис. 4.7, в, каждая частица движется вдоль окружности по часовой стрелке, причем центры этих окружностей имеют одну и ту же координату z_0 . При этом существенно, что в каждый момент времени положение частицы характеризуется синусоидальной функцией, зависящей от координаты x . Согласно выражению (4.169), волна распространяется по оси x в сторону от точки своего зарождения. Поскольку все волновые поля: поле смещений, поле скоростей и поле давления – не зависят от координаты y , такая волна называется плоской. Это название вполне себя оправдывает, поскольку фаза волны

$$\omega t - kx$$

остается одной и той же для всех точек, принадлежащих какой-либо плоскости, параллельной плоскости YOZ . Таким образом, каждому значению фазы соответствует некоторая плоскость – фазовая поверхность волны, скорость распространения которой описывается, по определению, параметром c (см. выражение 4.171).

В отличие от фазы, амплитуда волны на фазовой поверхности не остается постоянной, и поэтому гравитационная волна представляет собой пример неоднородной плоской волны.

Интересно также рассмотреть поведение вектора Пойнтинга \mathbf{Y} , где

$$\mathbf{Y} = P\mathbf{v},$$

или

$$Y_x = P v_x \text{ и } Y_z = P v_z. \quad (4.179)$$

Заменив потенциал φ_1 на φ в выражении (4.158), получим

$$P(z, t) = P_0 - \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho_0 g z$$

или

$$P(z, t) = A - \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.180)$$

Здесь слагаемое A не зависит от времени.

Подстановка выражения (4.169) для скалярного потенциала в формулу (4.180) дает

$$P = A + \rho_0 \omega D e^{kz} \sin(\omega t - kx). \quad (4.181)$$

Последнее выражение совместно с формулами (4.173) и (4.179) позволяют выразить компоненты вектора Пойнтинга в следующем виде:

$$Y_x = A v_x + \rho_0 \omega k D^2 e^{2kz} \sin^2(\omega t - kx) \quad (4.182)$$

и

$$Y_z = A v_z + \frac{\rho_0 \omega k D^2}{2} e^{2kz} \sin 2(\omega t - kx),$$

где горизонтальная компонента Y_x характеризует распространение волны.

Существенно, что в любой промежуток времени поток компоненты Y_x направлен в сторону от точки зарождения волны. Действительно, интегрируя первое из выражений (4.182) по времени, получим

$$\int_0^T Y_x dt = \frac{\rho_0 \omega k D^2 e^{2kz}}{2} \int_0^T dt = \pi \rho_0 k D^2 e^{2kz}, \quad (4.183)$$

причем слагаемое Av_x не дает никакого вклада в этот интеграл.

С другой стороны, на этом интервале времени компонента Y_z меняет знак и поток через единичную площадку в плоскости $z = \text{const}$ обращается в нуль. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^T Y_z dt &= ADk e^{kz} \int_0^T \cos(\omega t - kx) dt + \\ &+ \frac{\rho_0 \omega k}{2} D^2 e^{2kz} \int_0^T \sin 2(\omega t - kx) dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что та часть энергии, которая связана с компонентой Y_z , в первые полпериода переносится вниз от свободной поверхности, а затем возвращается обратно. Таким образом, одновременно наблюдаются распространение волны вдоль горизонтального направления и колебания частиц вдоль оси z . Заметим, что аналогичное поведение наблюдается и в случае неоднородных волн дилатации.

Рассмотрим теперь деформацию элементарного объема жидкости, вызванную гравитационной волной. Для этого убедимся еще раз в справедливости уравнений (4.151).

По определению,

$$\text{div } \mathbf{s} = \partial s_x / \partial x + \partial s_z / \partial z.$$

Используя это уравнение и выражения (4.176), получим

$$\text{div } \mathbf{s} = -\frac{k^2}{\omega} D e^{kz} \sin(\omega t - kx) + \frac{k^2}{\omega} D e^{kz} \sin(\omega t - kx) \equiv 0,$$

т.е., как мы уже знаем, движение частиц не приводит к изменению объема.

Поскольку смещение \mathbf{s} имеет только две ненулевые компоненты: s_x и s_z , и эти компоненты не зависят от координаты y , получим

$$\text{rot}_x \mathbf{s} = 0, \quad \text{rot}_z \mathbf{s} = 0$$

и

$$\text{rot}_y \mathbf{s} = \frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x}. \quad (4.184)$$

Далее из уравнения (4.176) имеем

$$\frac{\partial s_x}{\partial z} = -D \frac{k^2}{\omega} \mathbf{e}^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

и

(4.185)

$$\frac{\partial s_z}{\partial x} = -D \frac{k^2}{\omega} \mathbf{e}^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

т.е.

$$\text{rot } \mathbf{s} = 0.$$

Как уже было отмечено, это означает отсутствие вращения и деформаций простого сдвига. В то же время имеется деформация чистого сдвига, при которой первоначальный прямоугольник трансформируется в ромб (рис. 4.7, з).