

Глава 3. Распространение волн

3.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ МАСС И ПРУЖИН

Приступим теперь к изучению нового явления – распространения движения. Вначале мы дадим его качественное описание, а затем выведем уравнение, которое называется уравнением движения. С этой целью рассмотрим простейшую модель среды, а именно, однородную пружину бесконечной длины. Пусть в некоторый момент времени $t = 0$ левый конец пружины начинает двигаться со скоростью v . Чтобы упростить анализ и избежать необходимости решать волновое уравнение, мы будем рассматривать только приближенную модель, в которой каждый относительно небольшой элемент пружины заменяется системой, состоящей из двух частей:

- а) короткой пружины с нулевой массой;
- б) небольшого твердого тела.

Заметим, что жесткость и масса этой небольшой системы определяются соответствующими параметрами исходной пружины. В результате модель представляет собой систему, состоящую из пружин (одинаковой длины и жесткости) и элементарных тел (одинаковой массы), как это показано на рис. 3.1, а.

Рассмотрим две массы, m_0 и m_1 , и предположим, что в момент времени $t = 0$ масса m_0 начинает двигаться с постоянной скоростью v . В результате этого движения пружина сжимается и возникает сила, действующая на массу m_1 . Поскольку мы предположили, что масса пружин равняется нулю, эта сила мгновенно возникает на противоположном конце первой пружины. С течением времени пружина продолжает сжиматься и, следовательно, сила увеличивается. В результате импульс силы, действующей на массу m_1 , становится достаточным для того, чтобы привести ее в движение со скоростью v .

Таким образом, для того, чтобы масса m_1 начала двигаться со скоростью, равной скорости движения массы m_0 , требуется некоторое время. Обозначим это время задержки как τ . Конечно, в действительности масса m_1 начинает двигаться практически одновременно с массой m_0 , хотя и с гораздо меньшей скоростью. Тем не менее, в рассматриваемом приближении предполагается, что масса покоится в течение промежутка времени

$$0 < t < \tau.$$

В конце этого интервала времени длина l первой пружины становится меньше и величину ее сокращения можно выразить как

$$l - l_1 = v\tau, \tag{3.1}$$

где l_1 – длина пружины в момент времени $t = \tau$.

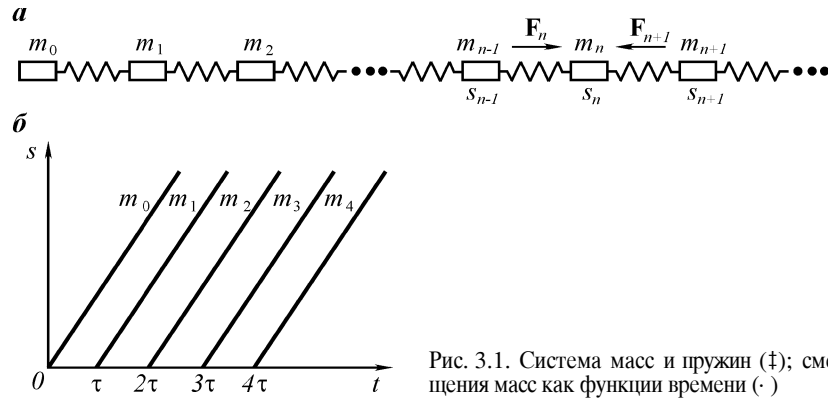


Рис. 3.1. Система масс и пружин (а); смещения масс как функции времени (б)

Поскольку при $t \geq \tau$ оба конца пружины движутся с одинаковой скоростью v , ее длина не меняется и остается равной l_1 . Конечно, сумма внутренних сил, действующих на массу m_1 , равняется нулю. Как только масса m_1 приходит в движение, это приводит к сжатию второй пружины и возникновению силы, действующей на массу m_2 . Поскольку все пружины и массы одинаковы, масса m_2 начинает двигаться со скоростью v в момент времени

$$t = 2\tau.$$

В этот момент длина второй пружины становится равной длине первой пружины. Обобщая полученный результат, можно утверждать, что масса, расположенная на расстоянии

$$L = nl \quad (3.2)$$

от левого конца, начинает двигаться со скоростью v в момент времени

$$t^* = n\tau. \quad (3.3)$$

Здесь n обозначает порядковый номер массы.

Таким образом, мы имеем дело с таким движением, при котором массы в системе начинают двигаться не одновременно: каждая последующая масса вовлекается в общее движение с некоторой задержкой. Такой тип движения называется распространением волн. Он заключается в переносе движения элементарной массы и пружины, а также силы, количества движения, кинетической и потенциальной энергии.

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ

Определим теперь скорость распространения волны вдоль системы, состоящей из масс и пружин. Поскольку масса m_2 начинает двигаться с задержкой τ относительно массы m_1 , а расстояние между этими массами равняется l , скорость волны определяется следующим выражением:

$$c = l/\tau. \quad (3.4)$$

Очевидно, что это же соотношение можно получить, рассматривая произвольную массу m_1 данного массива и используя выражения (3.2) и (3.3).

Наша следующая цель состоит в том, чтобы выразить скорость распространения через жесткость пружины k и массу m . Для этого мы используем закон Гука и связь между импульсом силы и количеством движения.

Легко найти силу F , которая передается вдоль массива и вызывает движение каждой массы со скоростью v . Действительно, из закона Гука следует, что

$$F = k(l - l_1) = kv\tau. \quad (3.5)$$

Мы будем трактовать упругую силу, действующую на массу m , как внутреннюю, и исключим из рассмотрения массу m_0 , поскольку ее движение не вызвано сжатием пружины. Учитывая, что импульс этой силы

$$N = Ft^*$$

равняется количеству движения масс

$$Ft^* = nmv,$$

и используя равенства (3.3) и (3.5), получим

$$kv^*\tau \quad n\tau = nmv.$$

Отсюда

$$\tau = \sqrt{m/k}. \quad (3.6)$$

Соответственно, скорость переноса движения, т.е. скорость волны

$$c = l\sqrt{k/m}. \quad (3.7)$$

Чтобы проиллюстрировать этот вывод, рассмотрим массу m_1 на интервале времени

$$\tau < t < 2\tau.$$

Поскольку движется только эта масса, импульс силы и количество движения системы равняются

$$N = F\tau = kv\tau \tau.$$

Отсюда

$$kv \tau = mv \quad \text{или} \quad \tau = \sqrt{m/k},$$

и мы снова получаем формулу (3.6).

Этот же результат полезно вывести из соотношения между работой и энергией. Чтобы привести в движение массив, состоящий из масс и пружин, к системе прикладывается сила F . За время t^* масса m_1 перемещается на расстояние

$$s_1 = vt.$$

Следовательно, работа, произведенная силой, равняется

$$W = F s_1 = kv \tau v n \tau = kv^2 n (l/c)^2, \quad (3.8)$$

поскольку

$$F = kv \tau, \quad t^* = n \tau = n \frac{l}{c}.$$

Благодаря произведенной работе система, состоящая из n масс, приобретает кинетическую энергию, а потенциальная энергия аккумулируется в n пружинах, соединяющих эти массы. При этом кинетическая энергия n масс равняется

$$E = n \frac{mv^2}{2}. \quad (3.9)$$

а потенциальная энергия n пружин длины l есть

$$U = n \frac{k(l-l_1)^2}{2} = \frac{k(v\tau)^2}{2} = \frac{nk}{2} v^2 \frac{l^2}{c^2}. \quad (3.10)$$

Принимая во внимание, что

$$W = E + U$$

и используя выражения (3.8) – (3.10), получаем

$$k v^2 n \left(\frac{l}{c} \right)^2 = n \frac{mv^2}{2} + n \frac{kv^2}{2} \frac{l^2}{c^2}$$

или

$$c = l \sqrt{k/m},$$

что, конечно же, совпадает с (3.7).

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. Скорость волны c зависит от следующих параметров:

- а) жесткости пружины k ;
- б) длины пружины l ;
- в) массы m .

2. Согласно закону Гука, с увеличением жесткости пружины k та же самая сила будет передаваться при меньшем сжатии пружины. Это означает, что время задержки τ , необходимое для сжатия пружины, также становится меньше. Скорость c при этом увеличивается.

3. С увеличением массы ее ускорение уменьшается и, следовательно, для переноса такого же количества движения требуется большая деформация пружин. Поэтому скорость волны уменьшается.

4. Скорость движения v никак не связана со скоростью распространения волны c . Для данного массива скорость v определяется импульсом внешней силы.

Обычно эти скорости отличаются друг от друга на несколько порядков, причем $c \gg v$. При выводе выражений для времени задержки τ и, следовательно, для скорости c мы использовали два разных подхода, и в обоих случаях скорость масс v не играла никакой роли.

5. До сих пор наши рассуждения основывались на том, что распространение волны сопровождается сжатием пружины. Иным словами, мы рассматривали волну сжатия, для которой обе скорости имеют одно и то же направление. Таким же образом можно предположить, что движение масс приводит к растяжению пружин и, следовательно, возникает волна растяжения. В этом случае скорости c и v имеют противоположные направления.

В нашем приближении смещения s_n и скорости v_n можно представить в следующем виде:

$$s_n(t) = \begin{cases} 0, & t < t^*, \\ v(t - t^*), & t \geq t^* \end{cases} \quad (3.11)$$

и

$$v_n(t) = v h(t - t^*), \quad (3.12)$$

где $h(t - t^*)$ – ступенчатая функция. Поведение функции $s_n(t)$ показано на рис. 3.1б.

В предыдущей главе рассматривались колебания, при которых в каждый момент времени все элементы системы были вовлечены в движение. Теперь мы наблюдаем совершенно другую картину. В каждый момент времени массив можно условно разделить на две части. Все массы и пружины первой части вовлечены в движение, в то время как вторая часть системы покоится. В таком приближении граница между этими частями представляет собой волновой фронт, описываемый ступенчатой функцией и перемещающийся вдоль массива со скоростью c .

Простота формул (3.11) – (3.12) объясняется тем, что мы пренебрегли несколькими факторами, включая действие внутренней силы пружины, расположенной перед каждой из масс. Мы предположили, что в момент времени $t = 0$ масса m_0 начинает двигаться с постоянной скоростью v , в то время как каждая последующая масса приобретает ту же скорость c с задержкой по времени τ после предыдущей. Это означает, что каждая масса, находившаяся в покое, приобретает конечную скорость мгновенно, т.е. в момент начала движения ее ускорение становится бесконечно большим. Конечно, такое поведение невозможно, поэтому мы опишем, по крайней мере, качественно, основные черты реального движения. Пусть, как и прежде, масса m_0 начинает двигаться с постоянной скоростью v в момент времени $t = 0$. При этом первая пружина сжимается, и возникает сила, действующая на массу m_1 . В результате масса m_1 начинает двигаться с некоторым ускорением и ее скорость растет. Смещение массы m_1 приводит к сжатию второй пружины, которое вызывает силу, также действующую на m_1 . Направление этой силы противоположно направлению движения. Помимо этого, как только начина-

ет двигаться масса m_0 , другие массы в массиве также оказываются вовлеченными в движение, хотя их смещения могут быть чрезвычайно малы. Сначала, из-за инерции, сжатие первой пружины играет лидирующую роль, и скорость массы m_1 растет. Однако со временем силы, вызванные второй и последующими пружинами, увеличиваются, и их влияние приводит к уменьшению ускорения. Существует такой момент времени, когда массы m_0 и m_1 движутся с одинаковой скоростью, а результирующая сила, действующая на m_1 , равняется нулю. Движение второй и последующих масс происходит точно так же, но с некоторой задержкой по времени. Оказывается, что такое представление движения является приблизительным только в пределах относительно небольшого промежутка времени, когда масса начинает свое движение. С увеличением времени оно становится все более точным.

В начале данного раздела мы заменили пружину бесконечной длины массивом элементов (рис. 3.1, *a*) и предположили, что каждый элемент длины l реальной пружины эквивалентен системе, состоящей из твердого тела массы m и пружины, имеющей нулевую массу и жесткость k . Изучение распространения волн вдоль такого массива чрезвычайно интересно, однако в дальнейшем мы сконцентрируем наше внимание на случае, когда длина l каждого элемента бесконечно мала. Как следует из закона Гука,

$$F = ks = kl \frac{s}{l} = E^* \frac{s}{l}, \quad (3.13)$$

где параметр

$$E^* = kl \quad (3.14)$$

в отличие от жесткости k не зависит от длины элемента пружины l и определяется свойствами ее материала.

Введем также линейную плотность ρ пружины в исходном состоянии:

$$m = \rho l, \quad (3.15)$$

В соответствии с этим, выражение для скорости распространения волны запишется как

$$c = \frac{1}{\tau} l \sqrt{k/m} = l \sqrt{E^* / \rho l^2} = \sqrt{E^* / \rho}. \quad (3.16)$$

Таким образом, переходя от дискретного случая к случаю непрерывной пружины, находим, что скорость волны зависит только от упругого параметра E^* (жесткости) и плотности ρ . В частности, если источник возбуждает синусоидальные волны, то скорость волны не зависит от частоты. Иными словами, волны различных частот имеют одинаковую скорость. Это означает, что бегущая волна, распространяющаяся вдоль пружины и представляющая собой суперпозицию синусоидальных волн, сохраняет свою форму. Это важное свойство наблюдается во многих случаях, хотя и не всегда.

ВЫВОД ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Выведем теперь уравнение движения произвольной массы m_n (см. рис. 3.1, а). Пусть s_{n-1} , s_n и s_{n+1} обозначают смещения масс m_{n-1} , m_n и m_{n+1} , соответственно. Тогда, согласно закону Гука, силы, действующие на массу m_n , равняются

$$F_n = k(s_{n-1} - s_n), \quad F_{n+1} = -k(s_n - s_{n+1}). \quad (3.17)$$

Применяя второй закон Ньютона, получим следующее уравнение движения массы m_n :

$$m \frac{d^2 s_n}{dt^2} = F_n + F_{n+1}. \quad (3.18)$$

Здесь мы учли третий закон Ньютона. Очевидно, что силы, действующие на массу, имеют противоположные направления. Подставляя (3.17) в (3.18), приходим к следующему уравнению:

$$m \frac{\partial^2 s_n}{\partial t^2} = k(s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n). \quad (3.19)$$

Пусть положение масс m_{n-1} , m_n и m_{n+1} характеризуется координатами x_{n-1} , x_n и x_{n+1} . Это означает, что

$$s_{n-1} = s(x_{n-1}), \quad s_n = s(x_n) \quad \text{и} \quad s_{n+1} = s(x_{n+1}).$$

Как известно, если расстояние между двумя точками достаточно мало, первая производная непрерывной функции $s(t)$ связана с разностью ее значений следующим образом:

$$s_n - s_{n-1} = \frac{\partial s}{\partial x} = \left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x$$

и

$$s_{n+1} - s_n = \frac{\partial s}{\partial x} = \left(x_n + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x. \quad (3.20)$$

Предположим, что на каждом интервале функция $s(t)$ ведет себя линейным образом и ее производная постоянна. Однако значения производной на разных интервалах в общем случае отличаются друг от друга.

Аналогичным образом, в точках x_{n-1} , x_n и x_{n+1} можно найти соотношение между функцией $s(t)$ и ее второй производной. Действительно, вычитая первое уравнение (3.20) из второго, получим

$$s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = (\Delta x)^2, \quad (3.21)$$

где вторая производная $\partial^2 s / \partial x^2$ постоянна на интервале

$$x_{n-1} < x < x_{n+1}.$$

Подстановка (3.21) в уравнение (3.19) дает

$$m \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 = k \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2.$$

Поскольку

$$m = \rho \Delta x,$$

имеем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.22)$$

Здесь c – скорость распространения волны вдоль пружины, $s(x, t)$ – смещение центра масс любого однородного элемента.

Поскольку смещение $s(x, t)$ зависит от двух аргументов, уравнение (3.22) содержит частные производные и называется волновым уравнением для одномерного случая.

Прежде, чем приступить к обсуждению решения этого уравнения, заметим следующее:

а) при выводе уравнения (3.22) мы использовали второй и третий законы Ньютона, а также закон Гука. Этот подход остается справедливым во всех случаях уравнений движения, вызванного распространением волн;

б) мы рассматривали элемент, состоящий из трех масс и двух соединяющих их пружин (см. рис. 3.1, а). В общем случае, эти пружины деформируются по-разному, что приводит к появлению ускорения у массы m_n . Помимо этого, смещения, скорости и ускорения масс m_{n-1} , m и m_{n+1} также могут отличаться друг от друга;

в) левая часть уравнения движения характеризует ускорение центра масс. Правая часть этого уравнения связана с результирующими внешними силами, нормированными на массу элемента.

3.2. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как было описано в предыдущем разделе, распространение волны сопровождается смещением частиц $s(x, t)$, которое подчиняется волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.23)$$

Здесь

$$c = \sqrt{E^* / \rho} \quad (3.24)$$

обозначает скорость волны. Уравнение (3.23) является дифференциальным

уравнением с частными производными второго порядка. Это означает, что решением этого уравнения может быть только функция, имеющая вторые производные по координате x и времени t . Такие функции, как ступенчатая функция, не удовлетворяют волновому уравнению в окрестности точки разрыва.

МЕТОД ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим теперь решение волнового уравнения, играющее фундаментальную роль в теории распространения волн. Заметим, что уравнение (3.23) является самым простым вариантом уравнения движения, соответствующим одномерному случаю, поскольку смещение $s(x, t)$ зависит только от одной пространственной координаты x вдоль пружины.

Как известно, решение обыкновенного дифференциального уравнения, так же, как и уравнения в частных производных, исторически было получено методом проб и ошибок. Так, например, Даламбер предложил решение волнового уравнения (3.23), введя две новые переменные:

$$\zeta = x - ct \quad \text{и} \quad \eta = x + ct. \quad (3.25)$$

Затем, применяя цепное правило дифференцирования (рис. 3.2, а) он заменил производные

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

производными относительно ζ и η .

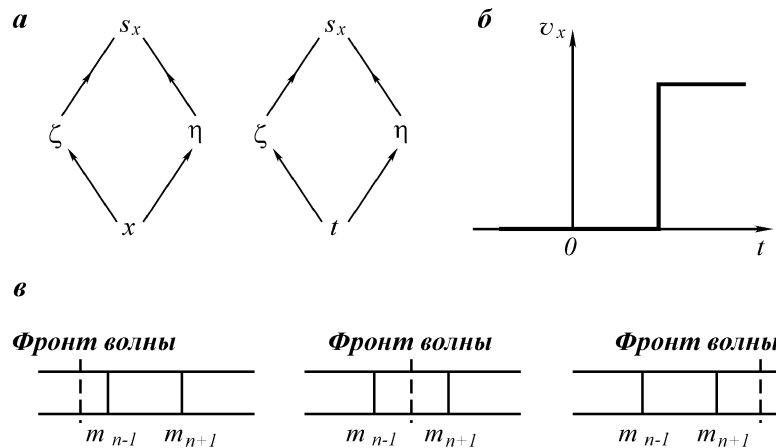


Рис. 3.2. Связь между переменными функции $s(x, t)$ (а); скорость частиц как функция времени (б); положения волнового фронта относительно элемента пружины (в)

Действуя таким образом, первые производные можно представить в виде

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \frac{\partial s}{\partial \eta}$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial s}{\partial \zeta} + c \frac{\partial s}{\partial \eta},$$

поскольку

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -c \quad \text{и} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = c.$$

Для вторых производных имеем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial \zeta} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial s}{\partial \zeta} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial s}{\partial \zeta} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}. \quad (3.26)$$

Аналогичным образом производная $\partial^2 s / \partial t^2$ записывается как

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \right). \quad (3.27)$$

Подстановка (3.26) – (3.27) в (3.23) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial \zeta \partial \eta} = 0. \quad (3.28)$$

Здесь $s_s = s$, поскольку предполагается, что смещение имеет только x -компоненту.

Данный вид волнового уравнения позволяет получить его решение очень простым способом. Действительно, из равенства

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial s_x}{\partial \eta} \right) = 0$$

следует, что функция $\partial s_x / \partial \eta$ не зависит от ζ , т.е.

$$\frac{\partial s_x(\zeta, \eta)}{\partial \eta} = \varphi(\eta),$$

где $\varphi(\eta)$ – некоторая функция от η .

Интегрируя по η обе части полученного уравнения, получим

$$s_x(\zeta, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta + c. \quad (3.29)$$

Здесь C – коэффициент, не зависящий от η , хотя он может являться функцией от ξ .

Таким образом, правая часть выражения (3.29) является, в общем случае, суммой двух функций, причем каждая из них зависит только от одной переменной, (η или ξ):

$$s_x(\xi, \eta) = A f(\xi) + B q(\eta). \quad (3.30)$$

Здесь

$$A f(\xi) = C, \quad B q(\eta) = \int \varphi(\eta) d\eta,$$

а A и B – некоторые постоянные, не зависящие от η и ξ . Как будет показано далее, эти постоянные обычно определяются из начальных и граничных условий.

Теперь, используя (3.25), решение волнового уравнения можно представить как

$$s_x(x, t) = A f(x - ct) + B q(x + ct). \quad (3.31)$$

Посмотрим, прежде всего, какой смысл имеет функция $f(x - ct)$, зависящая от аргумента $\xi = x - ct$. По определению, данная функция является постоянной до тех пор, пока остается постоянной разность $x - ct$, независимо от значений x и t . Это означает, что эта функция описывает волну, распространяющуюся вдоль оси x , например, вдоль пружины. Действительно, с увеличением расстояния x от начала пружины одно и то же значение функции $f(x - ct)$ будет наблюдаться на все больших временах.

Аналогично можно заключить, что второй член в выражении (3.31), т.е. функция $g(x + ct)$, описывает волну, распространяющуюся в противоположном направлении, в сторону левого конца пружины. Таким образом, решение волнового уравнения является суммой двух волн, бегущих в противоположных направлениях. В связи с этим следует заметить следующее.

а) Функция $f(x - ct)$ обычно описывает волну, которая распространяется от источника, расположенного в начале координат $x = 0$. Эта волна называется первичной или падающей волной. Указанная функция может характеризовать также волны, возникающие на внутренних границах неоднородности пружины. Такие волны, которые часто называются проходящими или преломленными волнами, распространяются так же, как и падающая волна, в сторону от источника.

б) Функция $g(x + ct)$ может описывать отраженные волны, возникающие на границе между двумя частями пружины с разными значениями ρ и E^* .

в) Мы показали, что произвольные функции аргументов $x - ct$ и $x + ct$ могут характеризовать распространение волн, поскольку такие функции являются решениями уравнения (3.23). Конечно, эти функции должны быть непрерывными вместе со своими первыми производными. Легко показать, что функции от аргументов

$$a \zeta \pm b \quad \text{и} \quad a \eta \pm b \quad (3.32)$$

где a и b – независимые константы, также удовлетворяют волновому уравнению. Соответственно, аргументы функций, описывающих распространение волн, могут иметь следующий вид:

$$\beta \left(t \pm \frac{x}{c} \right), \quad \alpha (x \pm ct) \quad (3.33)$$

и

$$\beta t \pm \gamma_1 x, \quad \alpha x \pm \gamma_2 t,$$

если

$$\gamma_1 = \frac{\beta}{c}, \quad \gamma_2 = \alpha c.$$

Присутствие здесь коэффициентов α и β является необходимым и следует из физических условий задачи. Так, например, функция

$$e^{(x - ct)}$$

удовлетворяет волновому уравнению, но не имеет никакого физического смысла, поскольку ее аргумент не является безразмерным.

г) Таким образом, практически любая функция $f(x, t)$ может быть решением волнового уравнения (3.23) при условии, что ее аргументы x и t входят в нее в виде комбинации (3.32). Например, произвольная функция вида

$$f[\alpha(x_2 - ct)]$$

не удовлетворяет уравнению (3.23). Другими словами, волновое уравнение накладывает очень жесткие условия на соотношение между расстоянием x и временем t , хотя сами функции $f(x, t)$ и $g(x, t)$ могут быть практически любыми. Это означает, что волновое уравнение имеет бесконечное число решений. Это условие является тривиальным, поскольку можно представить себе бесконечное число различных внешних сил, действующих на один из концов пружины. Естественно, что они будут вызывать появление совершенно разных волн, каждая из которых будет удовлетворять волновому уравнению.

д) Поскольку в каждой точке однородной пружины волна описывается одними и теми же функциями $f(x - t)$ и $g(x + t)$, мы снова видим, что форма волны не меняется с расстоянием x . Конечно, как уже отмечалось ранее, такое поведение проявляется в одномерном случае и означает, что механическая энергия не переходит в тепло.

е) Предположим, что аргументом функции $f(\zeta)$ является

$$\zeta = \alpha(x - ct).$$

Этот аргумент характеризует волновой профиль, распространяющийся вдоль оси x , и называется фазой волны.

Таким же образом аргумент функции $g(\eta)$:

$$\eta = \alpha(x + ct)$$

является фазой волны, распространяющейся в противоположном направлении.

ж) Согласно (3.33) скорость волны является, по существу, скоростью распространения фазы и в соответствии с этим называется фазовой скоростью. Позднее мы ознакомимся с

другим типом скорости, а именно групповой скоростью.

ДЕФОРМАЦИЯ И ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПРУЖИНЫ

Рассмотрим теперь волны сжатия и растяжения, в которых частицы движутся в направлении распространения волны или в противоположном направлении. Такое движение сопровождается переносом упругой силы и деформацией пружины. Чтобы исследовать поведение этих волн, обратимся снова к дискретной модели пружины (рис. 3.1, а). Как было показано в главе 2, упругие (восстанавливающие) силы пружин, расположенных до и после массы m_n , определяются выражениями

$$F_{n+1} = -k(s_n - s_{n+1})$$

(3.34)

и

$$F_n = -k(s_{n-1} - s_n)$$

Полагая, что длина каждой из пружин стремится к нулю, а их масса распределена однородно, мы снова можем осуществить переход к случаю непрерывной пружины. Тогда разность смещений запишется как

$$s_{n-1} - s_n = \frac{\partial s}{\partial x} \Delta x,$$

$$s_n - s_{n+1} = -\frac{\partial s}{\partial x} \Delta x.$$

Подстановка этих выражений в (3.34) дает

$$F_n = E^* \frac{\partial s_x}{\partial x} \quad \text{и} \quad F_{n+1} = E^* \frac{\partial s_x}{\partial x}$$

(3.35)

или

$$F(x, t) = E^* \frac{\partial s_x(x, t)}{\partial x}.$$

(3.36)

Здесь $s_x = s$.

Соотношение (3.36) представляет собой закон Гука для пружины. По определению, производная $\partial s_x / \partial x$ задает относительную величину изменения смещений и характеризует деформацию пружины. Например, если оба конца пружины имеют одинаковые смещения, то деформации отсутствуют и производная $\partial s_x / \partial x$ равняется нулю. Вводя эту величину, мы предполагали, что элемент пружины настолько мал, что смещения в пределах этого элемента

изменяются линейным образом. Производную $\partial s_x / \partial x$ называют обычно деформацией:

$$e_{xx} = \partial s_x / \partial x, \quad (3.37)$$

и закон Гука (3.36) можно записать в виде

$$F_x = E^* e_{xx} \quad (3.38)$$

Очевидно, что, если $\partial s_x / \partial x < 0$, то происходит сжатие пружины, а x -компонента силы F_x является отрицательной. И наоборот, если $\partial s_x / \partial x > 0$, то пружина растягивается и компонента F_x является положительной.

ВЫРАЖЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЧЕРЕЗ СКОРОСТИ ВОЛНЫ И ЧАСТИЦ

Установим теперь соотношение между скоростью v_x , деформацией e_{xx} и компонентой силы F_x для волны, распространяющейся со скоростью c . Вначале предположим, что мы имеем дело с уходящей волной. Это означает, что

$$\begin{aligned} s_x &= s_0 f [\alpha (x - ct)], \\ v_x &= -\alpha c s_0 f' [\alpha (x - ct)], \\ e_{xx} &= \alpha s_0 f' [\alpha (x - ct)], \\ F_x &= E^* \alpha s_0 f' [\alpha (x - ct)]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

где f' – обозначает производную по аргументу $\alpha (x - ct)$.

Из формул (3.39) приходим к следующему важному соотношению:

$$v_x / c = -F_x / E^* = -e_{xx}. \quad (3.40)$$

Аналогично, для приходящей волны

$$\begin{aligned} s_x(x, t) &= s_0 q [\alpha (x + ct)], \\ v_x(x, t) &= \alpha c s_0 q' [\alpha (x + ct)], \\ e_{xx}(x, t) &= \alpha c s_0 q' [\alpha (x + ct)], \\ F_x(x, t) &= E^* \alpha s_0 q' [\alpha (x + ct)]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Отсюда

$$v_x / c = -F_x / E^* = -e_{xx}. \quad (3.42)$$

Таким образом, деформация определяется отношением скорости элемента пружины к скорости волны.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров распространения волн в пружине, полезно сделать несколько очевидных замечаний. Предположим, что сила F_x ведет себя как прямоугольный импульс. Тогда, используя прин-

цип суперпозиции, мы можем представить результирующую волну как разность двух ступенчатых функций. Одна из них описывает волну сжатия с $e_{xx} < 0$ а вторая – волну растяжения с $e_{xx} > 0$.

Принимая во внимания соотношения (3.40) и (3.42), приходим к выводу, что после прекращения действия импульса элемент пружины перестает двигаться и его деформация исчезает. Применяя второй интеграл Дюамеля (см. приложение 8), т.е., по существу, принцип суперпозиции, можно увидеть, что такой же результат будет наблюдаться в случае импульса произвольной формы:

$$v_x = 0, \quad e_{xx} = 0 \quad \text{и} \quad f_x = 0. \quad (3.43)$$

Как следует из второго закона Ньютона, элементарная масса m после действия импульса внешней силы N_x начинает двигаться с постоянной ненулевой скоростью

$$v_x = N_x/m. \quad (3.44)$$

Сравнение (3.43) с (3.44) показывает, что эффекты действия импульса силы на изолированную массу и на элемент пружины при распространении волны отличаются друг от друга. Чтобы объяснить этот очевидный парадокс, рассмотрим движение, вызванное ступенчатой волной, распространяющейся вдоль пружины (рис. 3.2, б). Очевидно, прежде всего, что данная функция не удовлетворяет волновому уравнению вблизи волнового фронта, поскольку в этой области у нее не существует производных по времени и расстоянию.

Рассмотрим три различных положения волнового фронта по отношению к произвольному элементу пружины (рис. 3.2, в). В первом положении, волновой фронт еще не достиг элемента пружины, и тот продолжает находиться в состоянии покоя. Следующее положение соответствует моменту времени, когда волновой фронт находится в пределах указанного элемента. Это означает, что смещение, скорость, деформация и сила являются разрывными функциями аргументов x и t . В то же время, при выводе волнового уравнения мы предполагали, что все эти функции являются непрерывными. В частности, мы предположили, что упругая сила пружины изменяется линейно между границами элемента. Другими словами, это уравнение не описывает движение элемента пружины, если волновой фронт находится в пределах этого элемента. Заметим, что этот вывод применим для любой волны, даже если вторые производные $\partial^2 s_x / \partial x^2$ и $\partial^2 s_x / \partial t^2$ принимают конечные значения.

Когда волна достигает передней границы элемента пружины (третье положение), все составляющие его частицы движутся с одинаковой скоростью v_x . В этот же момент времени, согласно второму закону Ньютона, на указанную границу начинает действовать внешняя сила. Это вызвано деформацией пружины, расположенной перед рассматриваемым элементом. Начиная с этого момента, полная внешняя сила равняется нулю, и, следовательно, масса движется с постоянной скоростью. Поэтому в результате действия импульса

силы, являющегося суперпозицией двух ступенчатых функций с противоположным направлением скоростей частиц, движение элемента пружины прекращается. Поскольку любая волна представляет собой систему импульсов, возникающих в различные моменты времени, мы можем сказать, что после того, как произвольная волна пройдет через элемент пружины, он обязательно останавливается. Таким образом, мы объяснили разницу между действием импульса силы на изолированную массу и на элемент пружины при распространении волны.

Заметим, что если элемент пружины находится позади волнового фронта, имеющего форму ступенчатой функции (рис. 3.2, *в*), то смещение является линейной функцией времени и расстояния, и поэтому левая и правая части волнового уравнения равняются нулю. Иными словами, в этом случае уравнение (3.23) корректно описывает движение элемента пружины.

ПОВЕДЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В качестве первого примера, иллюстрирующего волновое поведение, рассмотрим волну сжатия, показанную на рис. 3.3. С учетом (3.40) скорость частиц в этом случае описывается следующим выражением:

$$v_x = -\frac{c}{E^*} F_x.$$

Отсюда видно, что скорость направлена вдоль оси x и прямо пропорциональна упругой силе пружины F_x .

По определению,

$$v_x = \partial s_x / \partial t,$$

и, следовательно, смещение s_x есть

$$s_x(x, t) = \int_{t_1}^t v_x dt. \quad (3.45)$$

Здесь t_1 обозначает момент времени, в который волна приходит в точку наблюдения. Таким образом, смещение s_x , постепенно увеличиваясь, достигает своего максимального значения в момент времени $t = t_2$, а затем остается постоянным.

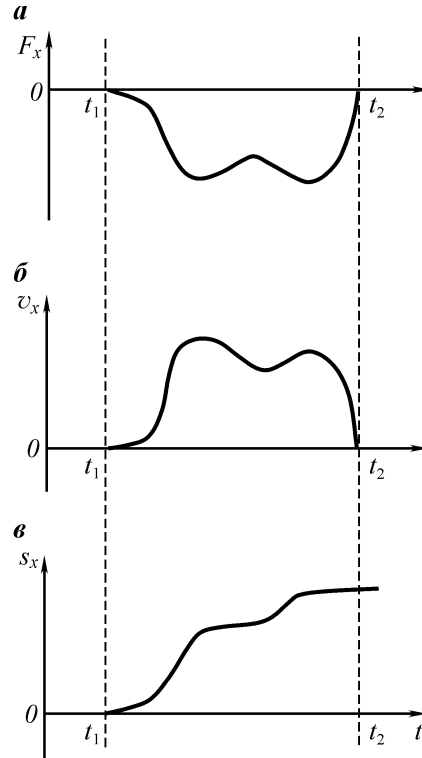
Как следует из равенства (3.45), максимальное смещение определяется как

$$s_x^{\max} = -\frac{c}{E^*} \int_{t_1}^{t_2} F_x(x, t) dt > 0,$$

поскольку скалярная компонента F_x является отрицательной.

Очевидно, что в случае импульса силы волны растяжения мы получим

Рис. 3.3. Поведение функций $F_x(t)$, $v_x(t)$ и $S_x(t)$ (волна сжатия)



похожий результат (рис. 3.4). В частности, минимальное смещение, вызванное волной в некоторой заданной точке,

$$s_x^{\min} = -\frac{c}{E^*} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dt < 0.$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы изучить поведение смещения, скорости и упругой силы в гораздо более сложных случаях. Предположим, что мы знаем смещение $s_x(x, t)$, связанное с распространением волны (рис. 3.5, а, б). Вначале, когда волна приходит в заданную точку в момент времени $t = t_1$, функция $s_x(x, t)$, начинает возрастать, затем достигает своего максимального значения, после чего уменьшается и становится равной нулю в момент времени $t = t_2$.

Дифференцируя функцию $s_x(x, t)$, по времени и снова используя соотношения (3.40) и (3.42), мы определим скорость и упругую силу (рис. 3.5, а). Последняя кривая позволяет объяснить поведение функции $s_x(x, t)$. Действительно, мы видим, что волну, вызванную этой силой, можно представить в виде двух последовательных импульсов. Один из них соответствует волне сжатия, $F_x < 0$, которая приходит вначале и вызывает смещение пружины

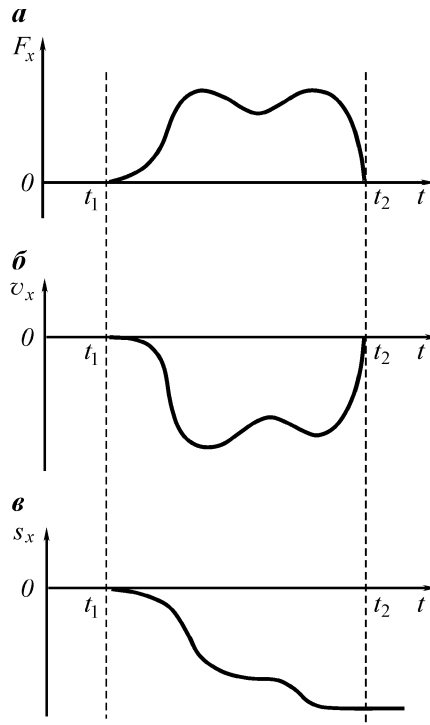


Рис. 3.4. Поведение функций $F_x(t)$, $v_x(t)$ и $s_x(t)$ (волна растяжения)

вдоль оси x . Затем приходит волна растяжения и вызывает смещение в противоположном направлении. Поскольку площади A_c и A_t отличаются только знаком (рис. 3.5, *а*), частицы пружины возвращаются в свое первоначальное положение.

Как уже отмечалось, полное смещение, вызванное действием произвольной волны, определяется площадью под кривой $F_x(t)$.

Два других примера волн представлены на рис. 3.6, *а*, *б*. В первом примере волновой источник приводит к появлению импульса сжатия, вызывающего смещение вдоль оси x . В течение некоторого времени положение частицы не меняется до тех пор пока не появится импульс растяжения и не вернет частицу в исходное положение.

Во втором примере предполагается, что частица была смещена относительно своего первоначального положения, после чего возник импульс растяжения, параметры которого были таковы, что частица снова вернулась в исходную точку, т.е.

$$s_0 = \frac{c}{E^*} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt.$$

Обсудим теперь одно интересное свойство волн, распространяющихся

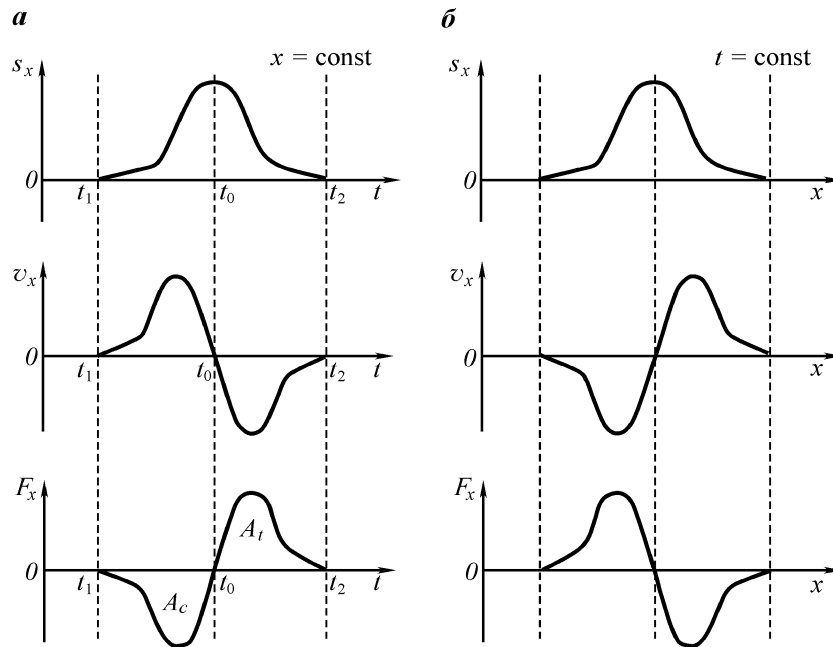


Рис. 3.5. Поведение функций s_x , v_x и F_x

вдоль пружины. Как можно увидеть из рис. 3.5, *a* и *б*, они являются зеркальным отражением друг друга. При этом поведение волн в пространстве и времени не является случайным и проявляется для любой волны в одномерном случае. Действительно, произвольную волну можно представить как систему импульсов, возникающих в различные моменты времени (см. приложение 8). Рассмотрим, например, импульс, приходящий первым в некоторую заданную точку пружины, или, иными словами, импульс, который был раньше других сгенерирован на одном из концов пружины. Если мы рассмотрим волновое поле как функцию расстояния x , то окажется, что этот импульс прошел большее, чем другие, расстояние. И наоборот, если мы рассмотрим последний из импульсов, приходящих в точку наблюдения, то в любой заданный момент времени окажется, что он прошел наименьшее расстояние. Таким образом, кривые

$$\begin{aligned} s_x(x) & \text{ и } s_x(t), \\ v_x(x) & \text{ и } v_x(t), \\ F_x(x) & \text{ и } F_x(t), \\ e_{xx}(x) & \text{ и } e_{xx}(t) \end{aligned}$$

являются зеркальным отражением друг друга.

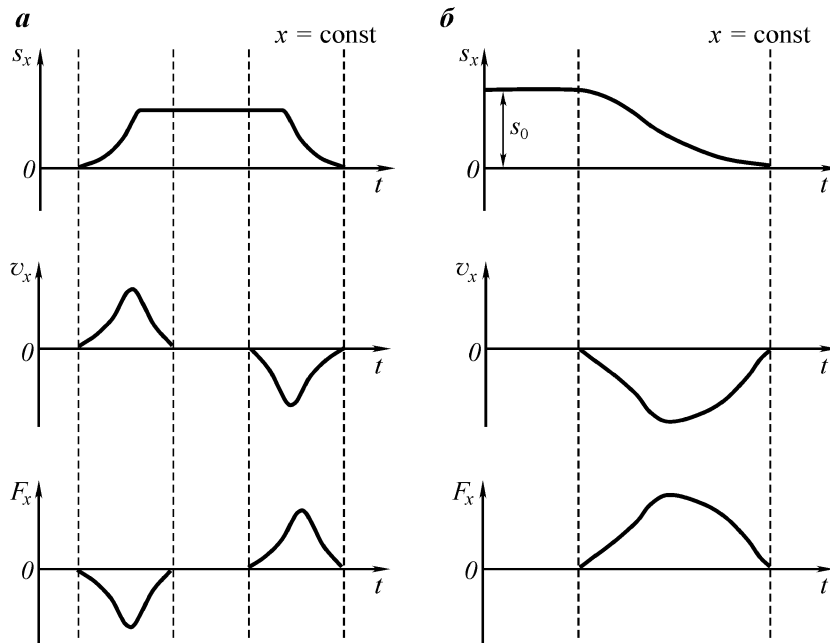


Рис. 3.6. Поведение функций $s_x(t)$, $v_x(t)$ и $F_x(t)$

Итак, мы вывели волновое уравнение для смещения. Теперь, дифференцируя по времени обе части уравнения (3.23), мы приходим к волновому уравнению относительно скорости:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}.$$

Аналогичным образом,

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial t^2}.$$

Отсюда, используя соотношение (3.38), получаем

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2}.$$

Таким образом, все кинематические и динамические характеристики волны удовлетворяют волновому уравнению.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ВОЛНОЙ И ЕЕ ИСТОЧНИКОМ

Мы рассмотрели несколько примеров волн различной формы, вызванных источниками, действующими на конец пружины, находящийся в точке x

= 0. Теперь легко установить связь между волной и ее источником. Действительно, предположим, что внешняя сила F_x^e , приложенная к концу пружины, ведет себя как

$$F_x^e(0, t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varphi(at), & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

Тогда для любой точки, упругая сила, вызванная деформацией пружины,

$$F_x(x, t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ \varphi[a(x/c)], & t \geq x/c, \end{cases} \quad (3.47)$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет волновому уравнению, поскольку ее аргумент имеет вид

$$a(t - x/c)$$

и описывает волну, распространяющуюся вдоль оси x от начала пружины. Скорость волны равняется c , поскольку волновой фронт приходит в точку наблюдения в момент времени $t = x/c$. Более того, на левом конце пружины функция $F_x^e(0, t)$ отличается от внешней силы $F_x(0, t)$ только знаком. Так, например, в случае волны сжатия, сила $F_x^e(0, t)$ является положительной, в то время как скалярная компонента упругой силы F_x имеет противоположный знак.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, предположим, что

$$F_x^e = -F_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t/\tau}, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

где τ характеризует скорость изменения силы со временем.

В частности, с увеличением τ функция F_x^e стремится к нулю более медленно, и в пределе мы приходим к ступенчатой функции.

Как следует из равенства (3.48), упругая сила, вызванная волной, равняется

$$F_x(x, t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ e^{\frac{-t-x/c}{\tau}}, & t \geq x/c, \end{cases} \quad (3.49)$$

Откуда, учитывая (3.40), для скорости v_x получим

$$v_x(x, t) = -v_{0x} \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ e^{\frac{-t-x/c}{\tau}}, & t \geq x/c, \end{cases} \quad (3.50)$$

где

$$v_{0x} = c \frac{F_0}{E^*}.$$

Соответственно, смещение частиц равняется

$$s_x(x, t) = -c \frac{F_0}{E^*} \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ 1, & t \geq x/c, \end{cases}$$

где

$$l = \int_{x/c}^t e^{-\frac{t-x/c}{\tau}} dt, \quad \text{если } t < x/c,$$

или

$$l = \tau \left\{ 1 - e^{-\frac{t-x/c}{\tau}} \right\}.$$

НЕПРЕРЫВНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРУЖИНЫ

Мы получили уравнение движения в предположении, что пружина является однородной, т.е. оба параметра, масса и жесткость, не зависят от координаты x . Рассмотрим более сложный случай, когда эти параметры являются непрерывными функциями от x . Предположим вначале, что жесткость пружины k постоянный, а вдоль пружины изменяется только линейная плотность ρ . Чтобы вывести уравнение движения, мы снова используем дискретную модель пружины (рис. 3.7, *a*). Как и в случае однородной пружины, силы, действующие на массу m_n , определяются как

$$F_n = k (s_{n-1} - s_n) \quad \text{и} \quad F_{n+1} = -k (s_n - s_{n+1}).$$

Следовательно, результирующая сила

$$F_x = k (s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n).$$

В пределе, когда элемент пружины становится бесконечно малым, получим

$$F_x = k \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} (\Delta x)^2 = E^* \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} \Delta x,$$

поскольку

$$s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n \approx \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} (\Delta x)^2.$$

Применяя второй закон Ньютона, приходим к следующему уравнению:

$$m \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = E^* \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} \Delta x, \quad (3.51)$$

где m – масса элемента, расположенного на интервале

$$x_{n-1} < x < x_{n+1},$$

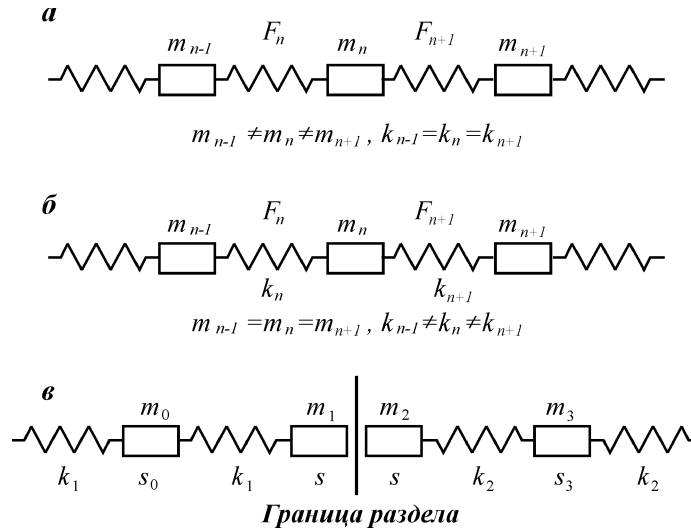


Рис. 3.7. Вывод волнового уравнения (а, б); граничные условия (в)

и она равняется

$$m = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \rho(x) dx. \quad (3.52)$$

Поскольку Δx очень мало, можно предположить, что в пределах каждого элемента плотность ρ является линейной функцией от x . Тогда, вместо (3.52) получим

$$m = \rho(x_n) \Delta x. \quad (3.53)$$

Здесь $\rho(x_n)$ – плотность в средней точке элемента.

Подстановка (3.53) в (3.51) дает следующее уравнение движения:

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = E^* \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} \quad (3.54)$$

или

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}.$$

Тем не менее, коренное отличие данного примера от случая однородной пружины состоит в том, что здесь плотность ρ и, следовательно, параметр c являются функциями расстояния x .

Предположим теперь, что масса распределена однородно, а жесткость k зависит от x . Из рис. 3.7, б следует, что

$$F_n = k_n (s_{n-1} - s_n),$$

и, следовательно, результирующая сила, действующая на массу m_n , записывается как

$$F_x = k_n (s_{n-1} - s_n) - k_{n+1} (s_n - s_{n+1})$$

или

$$F_x = k_{n+1} (s_{n+1} - s_n) - k_n (s_n - s_{n-1}).$$

Мы можем предположить, что с уменьшением Δx приведенные выше функции становятся непрерывными, тогда

$$F_x = \left[k_{n+1} \frac{\partial s_x(x + \Delta x / 2)}{\partial x} - k_n \frac{\partial s_x(x - \Delta x / 2)}{\partial x} \right] \Delta x.$$

Аналогичным образом получим

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial s_x}{\partial x} \right) (\Delta x)^2. \quad (3.55)$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial s_x}{\partial x} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial s_x}{\partial x} \right). \quad (3.56)$$

Последнее уравнение отличается от волнового уравнения для однородной среды.

Таким образом, мы продемонстрировали, что как только пружина становится неоднородной, уравнение движения становится более сложным и обычно перестает совпадать с уравнением для однородной пружины.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим случай, когда плотность и жесткость пружины имеют разрывы. В этих точках уже нельзя применять уравнение движения, а также соотношения (3.54) и (3.56). Чтобы понять поведение волны в таких точках, мы снова используем дискретную модель пружины (рис. 3.7, в). Вертикальная линия на этом рисунке указывает точку, в которой параметры пружины имеют разрыв.

Мы предполагаем, что распространение упругой волны вдоль пружины не нарушает ее целостности. Это означает, что массы m_1 и m_2 , расположенные в окрестности указанной внутренней границы, должны иметь одинаковые смещения:

$$s_{1x} = s_{2x} = s_x, \quad \text{если} \quad x = x_0. \quad (3.57)$$

В то же время смещения масс m_0 и m_3 , расположенных на некотором небольшом расстоянии по разные стороны этой границы, всегда будут отличаться друг от друга, если $k_1 \neq k_2$. Равенство (3.57) описывает первое свойство волны на внутренней границе.

Чтобы получить второе граничное условие, примем во внимание тот факт, что массы m_1 и m_2 имеют одинаковое смещение s_x и, следовательно, их можно интерпретировать как одну частицу с массой

$$m = m_1 + m_2.$$

Применяя второй закон Ньютона, получим

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = F_{1x}^e + F_{2x}^e \quad (3.58)$$

Здесь F_{1x}^e и F_{2x}^e – силы, действующие на массу m со стороны пружин.

Случаи волн сжатия и растяжения удобно рассматривать отдельно.

Первый случай

Предположим, что вдоль оси x распространяется волна сжатия (рис. 3.7, в). Тогда на массу m действуют следующие две силы:

$$F_{1x}^e = k_1 (s_{0x} - s_x) \quad \text{и} \quad F_{2x}^e = -k_2 (s_x - s_{3x}), \quad (3.59)$$

имеющие противоположные направления. Поскольку волна сжатия приводит к отрицательной деформации $e_{xx} < 0$, то

$$F_{1x} < 0 \quad \text{и} \quad F_{2x} < 0$$

или

$$F_{1x} = -F_{1x}^e \quad \text{и} \quad F_{2x} = F_{2x}^e,$$

где силы F_{1x} и F_{2x} подчиняются закону Гука (выражения (3.37) и (3.38):

$$F_x = E^* \frac{\partial s_x}{\partial x}.$$

Тогда уравнение (3.58) можно переписать в следующем виде:

$$m \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = F_{2x} - F_{1x}. \quad (3.60)$$

С уменьшением длины Δx массы m_1 и m_2 уменьшаются и в пределе стремятся к нулю. Это означает, что правая часть уравнения (3.58) также должна исчезнуть. В противном случае, ускорение $\partial^2 s_x / \partial t^2$ станет бесконечно большим. Поскольку это невозможно, мы должны заключить, что упругие силы

пружин, расположенных по обе стороны от внутренней границы, равны друг другу:

$$F_{1x} = F_{2x} \quad (3.61)$$

Второй случай

Предположим теперь, что вдоль оси x распространяется волна растяжения. Учитывая, что компонента смещения s_x является отрицательной, мы видим, что

$$F_{1x}^e < 0 \quad \text{и} \quad F_{2x}^e > 0.$$

В то же время, в отличие от предыдущего случая, деформация e_{xx} является положительной. Поэтому

$$F_{1x}^e = -F_{1x} \quad \text{и} \quad F_{2x}^e = F_{2x}. \quad (3.62)$$

и мы снова приходим к уравнению (3.60). Следовательно, граничное условие (3.61) остается справедливым в обоих случаях. Непрерывность упругой силы – это второе важное свойство волны на внутренней границе.

Соотношения (3.57) и (3.61) называются граничными условиями и являются заменой волновому уравнению в точках разрыва параметров ρ и E^* . Последнее из указанных условий можно переписать в виде

$$E_1^* \frac{\partial s_{1x}}{\partial x} = E_2^* \frac{\partial s_{2x}}{\partial x} \quad (3.63)$$

или

$$E_1^* e_{xx}^{(1)} = E_2^* e_{xx}^{(2)}.$$

Это условие показывает, что деформация пружины по разные стороны внутренней границы различна, т.е.

$$e_{xx}^{(1)} \neq e_{xx}^{(2)},$$

и, следовательно, смещения s_0 и s_3 не равны друг другу.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

Мы показали, что вдоль однородной пружины распространяется единственная волна от источника. Совершенно другая картина возникает, когда в пружине имеется граница, на которой происходит разрыв параметров ρ и E^* . Покажем, что на таких границах появляются новые волны, а именно, отраженные и проходящие волны. Невозможно переоценить значение этого явления в сейсмологии.

Сначала мы попытаемся качественно объяснить, как возникают отраженные волны. Предположим, что волна сжатия распространяется вдоль однородной системы масс и пружин к ее свободному концу (рис. 3.8, *а*). Рассмотрим момент времени, когда все массы движутся с одинаковой

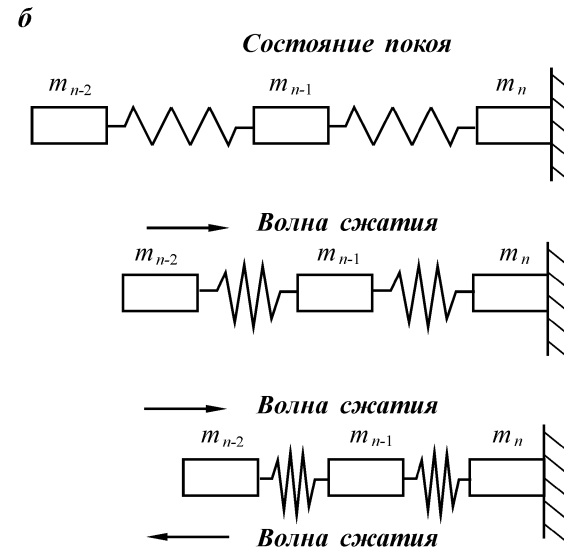
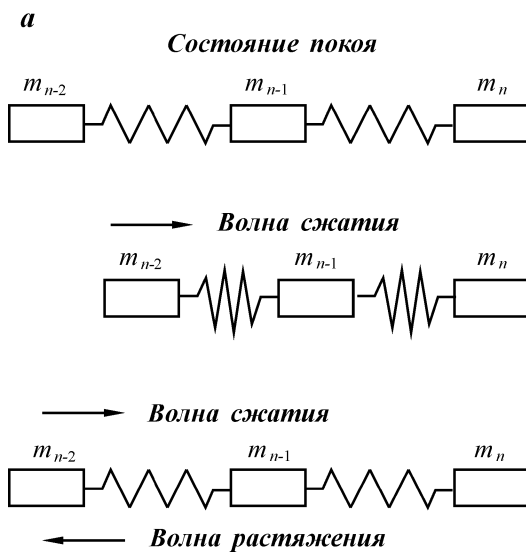


Рис. 3.8. Возникновение отраженной волны

скоростью. Это происходит тогда, когда все пружины сжаты одинаковым образом и, следовательно, результирующая сила, действующая на каждую массу, кроме последней, равняется нулю. В этом случае на массу m_n действует только одна единственная сила, вызванная последней пружиной, в результате чего эта масса начинает двигаться с ускорением, а пружина испытывает растяжение.

Сначала скорость массы m_n увеличивается и может значительно превзойти начальную скорость v . В течение этого интервала времени упругая сила F_n последней пружины становится меньше. В момент времени, когда длина пружины совпадет с исходной, сжатие пружины, а также ее упругая сила исчезают. Уменьшение деформации последней пружины сопровождается, с некоторым запозданием по времени, ускорением предыдущей массы m_{n-1} . В результате пружина, расположенная между массами m_{n-1} и m_{n-2} также испытывает растяжение и, наконец, ее сжатие исчезает. Очевидно, что с течением времени все больше пружин испытывают растяжение, а массы приобретают скорость, большую, чем начальная скорость v .

Таким образом, наблюдается волна растяжения, распространяющаяся от свободного конца пружины. Другими словами, падающая волна сжатия приводит к появлению волны растяжения, распространяющейся в противоположном направлении. Эта последняя из указанных волн называется, естественно, отраженной. Точно также мы можем наблюдать формирование волны сжатия, когда волна растяжения достигает свободного конца пружины.

Поскольку на правом конце системы упругая сила отсутствует, второе граничное условие (соотношение 3.61) заметно упрощается, и мы имеем

$$F_{1x}(x_0) = 0, \quad (3.64)$$

где x_0 – координата свободного конца. Следовательно, упругие силы, сопровождающие волны сжатия и растяжения имеют одинаковую величину, но противоположные знаки. Используя соотношения (3.40) и (3.42), мы можем показать, что существование отраженной волны приводит к удвоению скоростей и величины смещения масс:

$$v_x = 2v \quad \text{и} \quad s_x = 2s_{1x}. \quad (3.65)$$

Это важный результат. Мы снова увидим эти равенства, когда будем изучать отражение плоских волн на поверхности Земли.

Рассмотрим далее случай, когда правый конец системы является идеально жестким, т.е. масса m_n двигаться не может (рис. 3.8, б). Предположим, что в момент времени t все массы, кроме m_n , движутся со скоростью v , а все пружины сжаты одинаково. Как и раньше, это означает, что результирующая сила, действующая на каждую движущуюся массу, равняется нулю.

Благодаря инерции, масса m_{n-1} продолжает движение и, соответственно, последняя пружина оказывается более сжатой, чем другие. Поскольку дополнительная упругая сила, действующая на массу m_{n-1} , направлена противоположно ее движению, масса, в конце концов, останавливается. В этот момент времени следующая масса m_{n-2} продолжает свое движение, но по про-

шествии некоторого времени она тоже останавливается и вторая от конца пружина также становится более сжатой. С течением времени все большее количество масс прекращает свое движение, и сжатие пружин между ними увеличивается. Таким образом, в отличие от предыдущего случая, в данном примере падающая волна сжатия порождает отраженную волну того же типа. По этой причине, смещения и скорости частиц, относящиеся к этим волнам, имеют противоположные направления, а знаки упругих сил, наоборот, совпадают. Соответственно, из-за суперпозиции этих волн система прекращает свое движение, но деформация при этом усиливается. Конечно, это же явление возникает, если падающей волной является волна растяжения.

В общем случае, когда пружина состоит из двух однородных, но различающихся между собой частей, естественно ожидать возникновения также и проходящей волны. Эта волна, так же, как и отраженная, распространяется от границы раздела, но в противоположном направлении.

ОТРАЖЕННЫЕ И ПРОХОДЯЩИЕ ВОЛНЫ

Продemonстрируем теперь, что прямая волна, а также волны, возникающие на внутренней границе, могут удовлетворять граничным условиям. Пусть начало оси x совпадает с границей раздела $x_0 = 0$ (рис. 3.9, а), а падающая волна

$$s_1(x, t) = s_0 f[\alpha(t - x / c_1)] \quad (3.66)$$

распространяется вдоль пружины и достигает этой границы. В соответствии с нашим предположением имеем

$$s_r(x, t) = A f_1[\alpha_1(t - x / c_1)] \quad x \leq 0 \quad (3.67)$$

и

$$s_2(x, t) = B f_2[\alpha_2(t - x / c_2)] \quad x \geq 0.$$

Здесь, s_r и s_2 смещения отраженной и проходящей волны, соответственно. Коэффициенты A и B , так же, как и коэффициенты a_1 и a_2 , неизвестны. Помимо этого, необходимо определить функции f_1 и f_2 .

Таким образом, мы представили смещения частиц в обеих однородных частях системы как

$$s_1(x, t) = s_0 f[\alpha(t - x / c_1)] + A f_1[\alpha_1(t - x / c_1)] \quad x < 0 \quad (3.68)$$

и

$$s_2(x, t) = B f_2[\alpha_2(t - x / c_2)] \quad x > 0.$$

В соответствии с равенствами (3.57), (3.63), граничные условия запишем как

$$s_{21} = s_{2x} \quad \text{и} \quad E_1^* \frac{\partial s_{1x}}{\partial x} = E_2^* \frac{\partial s_{2x}}{\partial x}, \quad x = 0.$$

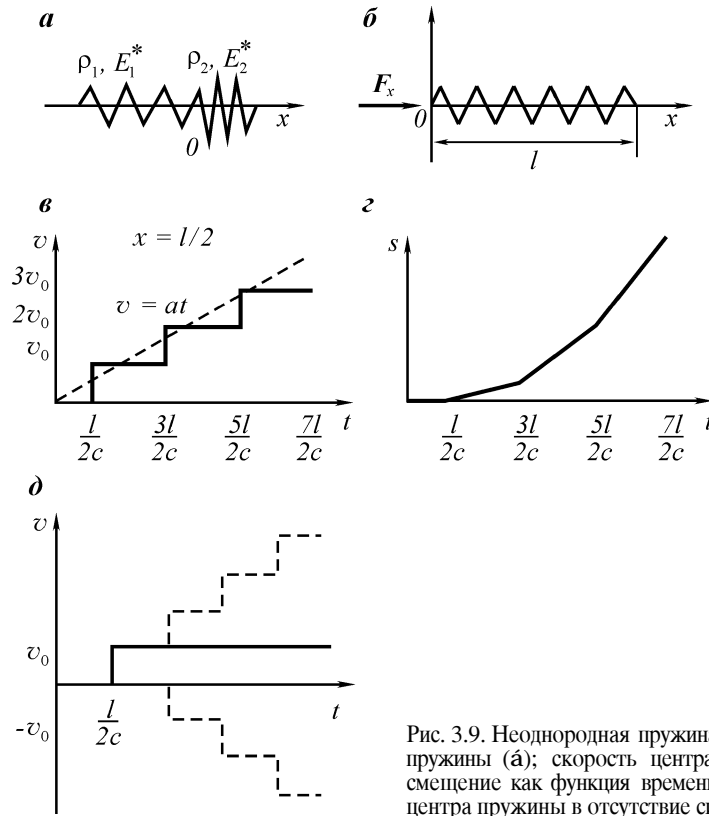


Рис. 3.9. Неоднородная пружина (а); движение пружины (б); скорость центра пружины (в); смещение как функция времени (г); скорость центра пружины в отсутствие силы, $\tau = l/c$ (д)

Подстановка выражения (3.68) в первое из приведенных выше соотношений дает

$$s_0 f(at) + A f_1(a_1 t) = B f_2(a_2 t) \quad (3.69)$$

Равенство (3.69) справедливо для любого момента времени. Это означает, что все три функции, а также их аргументы равны между собой:

$$f_1 = f_2 = f \quad \text{и} \quad a_1 = a_2 = a.$$

Таким образом, вместо (3.68) получим

$$s_1(x, t) = s_0 f[\alpha(t - x/c_1)] + A f[\alpha(t + x/c_1)] \quad x < 0$$

и

$$s_2(x, t) = B f[\alpha(t - x/c_2)] \quad x > 0. \quad (3.70)$$

Это – важный результат, поскольку он показывает, что отраженные и

проходящие волны зависят от времени и расстояния так же, как и падающая волна.

Далее, подставляя выражения (3.70) в граничные условия, получим систему уравнений относительно коэффициентов А и В:

$$\begin{cases} s_0 + A = B, \\ -\frac{s_0}{c_1} E_1^* + \frac{A}{c_1} E_1^* = -\frac{B}{c_2} E_2^* \end{cases} \quad (3.71)$$

Ее решением является

$$A = \frac{E_1^* c_2 - E_2^* c_1}{E_1^* c_2 + E_2^* c_1} s_0$$

и

$$B = \frac{2E_1^* c_2}{E_1^* c_2 + E_2^* c_1} s_0.$$

Поскольку

$$E^* = \rho c^2,$$

удобно представить эти коэффициенты в следующем виде:

$$A = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} s_0 \quad \text{и} \quad B = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} s_0, \quad (3.72)$$

где

$$Z = \rho c \quad (3.73)$$

является импедансом.

Таким образом, мы показали, что для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо ввести отраженные и проходящие волны. По существу, мы решили так называемую граничную задачу, т.е. математически доказали существование этих волн. Более того, соотношения (3.70) и (3.72) подтверждают наш качественный анализ волнового поведения. Действительно, рассмотрим два предельных случая.

Свободная граница

Предположим, что рассматриваемая граница является свободной: $Z_2 = 0$. Тогда выражения (3.72) дают

$$A = s_0 \quad (3.74)$$

и

$$s_{1x}(x, t) = s_0 f[\alpha(t - x / c_1)] + s_0 f[\alpha(t + x / c_1)]. \quad (3.75)$$

В частности, на свободной границе

$$s_{1x}(0, t) = 2 s_{ix}(0, t), \quad (3.76)$$

где $s_{1x}(0, t)$ – смещение частицы, вызванное падающей волной.

Таким образом, обе волны на границе вызывают одинаковые смещения, хотя они и распространяются в разные стороны. Очевидно также, что

$$v_{1x}(0, t) = 2v_{ix}(0, t). \quad (3.77)$$

Дифференцируя это соотношение по x , находим следующее выражение для деформации e_{xx} :

$$e_{xx} = -\frac{s_0 a}{c_1} f'[\alpha(t - x/c_1)] + \frac{s_0 a}{c_1} f'[\alpha(t + x/c_1)], \quad (3.78)$$

и, следовательно, на границе выполняется условие

$$e_{xx} = 0. \quad (3.79)$$

Это означает, что падающая и отраженная волны приводят к разному типу деформации. Например, падающая волна сжатия вызывает волну растяжения. Ранее мы пришли к такому же заключению, основываясь на физических соображениях.

Жесткая граница

Предполагая, что конец пружины является идеально жестким: $Z_2 = \infty$, имеем

$$A = -s_0, \quad (3.80)$$

и соответственно

$$s_{1x} = s_0 f[\alpha(t - x/c_1)] - s_0 f[\alpha(t + x/c_1)]. \quad (3.81)$$

Например, на границе выполняются следующие условия:

$$s_{1x} = 0 \quad \text{и} \quad v_{1x} = 0, \quad (3.82)$$

а деформация равняется

$$e_{xx}(0, t) = \frac{2s_0 a}{c_1} f'(at)$$

или

$$e_{xx}(0, t) = 2 e_{xx}^i(0, t), \quad (3.83)$$

где e_{xx} – деформация, вызванная падающей волной.

Таким образом, в отличие от предыдущего случая, отраженная волна, возникающая на границе, приводит к такой же деформации, что и падающая волна. В частности, падающая волна растяжения приводит к появлению отраженной волны растяжения. Мы снова видим, что наш качественный анализ подтверждается.

Общий случай

Как следует из выражений (3.70) и (3.72), деформация в окрестности границы ($x < 0$) определяется выражением

$$e_{xx} = \frac{s_0 a}{c_1} \left(-1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) f'(at)$$

или

$$e_{xx} = -\frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{s_0 a}{c_1} f'(at) = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} e_{xx}^i. \quad (3.84)$$

Например, если $Z_2 < Z_1$, то

$$e_{xx} < e_{xx}^i, \quad \text{если } x = 0,$$

т.е. результирующая волна приводит к уменьшению деформации. Другими словами, падающая и отраженная волны принадлежат к разным типам волн. В противоположном случае, когда $Z_2 > Z_1$, деформации увеличиваются: ($e_{xx} > e_{xx}^i$), и это указывает на то, что обе волны приводят к одинаковому типу деформации (либо к сжатию, либо к растяжению).

Полезно заметить, что, несмотря на простоту рассматриваемой модели, выражения (3.72), описывающие отраженные и проходящие волны, играют важную роль в разведывательной сейсмологии.

Сделаем в связи с этим три замечания.

а) коэффициент отражения не превосходит единицу и меняется в пределах

$$-1 < A < 1;$$

б) коэффициент прохождения может изменяться в следующих пределах:

$$0 < B < 2;$$

в) как следует из выражений (3.72), проходящая волна всегда приводит к деформациям того же типа, что и падающая волна.

Используя полученные результаты, рассмотрим два примера, иллюстрирующие некоторые важные свойства второго закона Ньютона и закона Гука.

Закон Ньютона и распространение волн

Предположим, что в момент времени $t = 0$ на левый конец пружины длины l начинает действовать постоянная сила (рис. 3.9, а)

$$F_x = \begin{cases} 0, \\ F_{0x}, \end{cases}. \quad (3.85)$$

Наша цель – изучить движение пружины.

Очевидно, что указанная сила порождает волну сжатия, которая распространяется вдоль пружины со скоростью c . Этот процесс сопровождается движением частиц, которое происходит с некоторой скоростью v_0 , и обычно $v_0 \ll c$.

В момент времени $t = l/c$ вся пружина оказывается сжатой, и все ее частицы движутся с одинаковой скоростью v_0 . Существенно, что в этот момент на противоположном конце $x = l$ возникает волна растяжения, которая начинает распространяться к левому концу пружины. Эта волна приводит к расширению элементарного объема и к его движению со скоростью v_0 . Следовательно, позади ее волнового фронта частицы начинают двигаться со скоростью $v = 2v_0$, но деформация исчезает. Например, в момент $t = 2l/c$ вся пружина не деформирована и движется со скоростью $2v_0$. Кроме того, в этот момент возникает и начинает распространяться вдоль пружины отраженная волна сжатия. Это происходит из-за того, что оба конца пружины являются свободными и, как мы уже знаем, падающая и отраженная волны всегда имеют различный тип. Соответственно, в момент времени $t = 3l/c$ волна сжатия снова приводит к появлению новой волны растяжения на правом конце пружины. Очевидно, что данный процесс генерации отраженных волн непрерывно повторяется, поскольку мы пренебрегли затуханием в пружине.

Чтобы проиллюстрировать влияние распространения волн на движение пружины, рассмотрим ее средние точки. Хотя постоянная сила F_{0x} начинает действовать в момент времени $t = 0$, частицы в центре масс остаются в покое до момента времени $t = 2l/c$. В этот момент сюда приходит волна сжатия, и частицы начинают двигаться со скоростью v_0 . Такое поведение сохраняется в течение интервала времени

$$\frac{l}{2c} \leq t < \frac{3l}{2c},$$

поскольку волна растяжения, возникшая на правом конце пружины, приходит в центр масс только в момент времени $t = 3l/2c$. Затем эти частицы начинают двигаться со скоростью $v = 2v_0$.

Следующее увеличение скорости происходит, когда волна сжатия приходит от левого конца пружины в момент времени $t = 5l/2c$. Скорость при этом становится равной $3v_0$.

Обобщая этот результат, мы видим, что в момент времени

$$t_n = (2n - 1) \frac{l}{2c}, \quad n \geq 1 \quad (3.86)$$

скорость центра масс равняется

$$v_n = nv_0. \quad (3.87)$$

Таким образом, в течение каждого интервала времени

$$T = l/c \quad (3.88)$$

скорость остается постоянной, однако в моменты времени t_n она скачкообразно увеличивается на одну и ту же величину, равную v_0 .

Поведение скорости в средней точке пружины как функции времени показано на рис. 3.9, . . . Из этого рисунка ясно видно, что распространение волн между концами пружины приводит к тому, что скорость со временем увеличивается.

Поскольку скорость распространения относительно высока, интервал времени T , в течение которого волна проходит от одного конца пружины к другому, достаточно мал. Так, например, если $c = 5 \times 10^3$ м/с и $l = 1$ м, то

$$T = 2 \times 10^{-4} \text{ s} = 0,2 \text{ ms.}$$

Легко увидеть, что скорости частиц в различных частях пружины ведут себя схожим образом. Исключение составляют только времена t_n , когда изменение скорости зависит от того, в каком месте оно происходит.

Как следует из второго закона Ньютона, скорость центра масс ведет себя во времени совершенно по-другому. Действительно, поскольку постоянная сила приводит к постоянному ускорению

$$a = F/m,$$

скорость частиц должна линейно возрастать со временем:

$$v = at = \frac{F}{m} t. \quad (3.89)$$

Более того, все частицы пружины должны двигаться с одной и той же скоростью.

Безусловно, движение реальной пружины и, в частности, ее центра масс, отличается от рассмотренной модели. Это хорошо заметно в начале движения, когда время наблюдения сравнимо с T (формула 3.88). Тем не менее, с увеличением времени, реальное движение частиц асимптотически стремится к тому, которое описывается вторым законом Ньютона. Действительно, при $t \gg T$ увеличение скорости на величину v_0 в момент времени t_n становится мало по сравнению со скоростью $v(t_n)$. Соответственно, разрывную функцию $v(t)$ можно приближенно заменить линейной функцией (3.89).

Наклон прямой $v = at$ равняется

$$a = v_0/T = v_0 c/l. \quad (3.90)$$

Покажем теперь, что параметр a является ускорением, входящим во второй закон Ньютона.

Как следует из (3.42), для каждой волны выполняются равенства

$$v_0/c = F_x/E^* \quad \text{или} \quad v_0/c = F_x/c^2 \rho_0,$$

так как

$$E^* = c^2 \rho_0.$$

Таким образом,

$$v_0 = F_x / c\rho_0 = F_x / Z.$$

Подстановка этого выражения в формулу (3.90) дает

$$a = F_x / m, \quad (3.91)$$

и мы снова приходим ко второму закону Ньютона. Здесь $m = \rho_0 l$ является массой пружины.

Таким образом, у нас есть три выражения для ускорения:

$$a = \frac{v(t_n) - v(t_{n-1})}{T} = \frac{v_0}{T} = \frac{v_0 c}{l}, \quad a = \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{и} \quad a = \frac{F}{m}. \quad (3.92)$$

Последние два выражения характеризуют величину изменения скорости, как если бы она была непрерывной функцией времени. В действительности, это изменение происходит довольно резко, и первое из соотношений (3.92) может служить мерой такого изменения.

Как уже отмечалось, второй закон Ньютона можно применять к пружине или к любому другому телу при условии, что время наблюдения значительно превышает T :

$$t \gg T. \quad (3.93)$$

В этом случае скорости всех частиц тела практически одинаковы, и с увеличением времени резкое изменение скорости становится менее заметным. Таким образом, можно сказать, что закон Ньютона справедлив, если тело является бесконечно малым ($t \rightarrow \infty$) и жестким ($c \rightarrow \infty$). В обоих случаях время T стремится к нулю.

Рассмотрим также поведение смещения s_x средней точки пружины на рис. 3.9, „. Поскольку на интервале

$$t_n < t < t_{n+1}$$

скорость частиц постоянная, $s_x(t)$ – является линейной функцией. На каждом последовательном интервале времени увеличение наклона прямой, описывающей смещение, является одинаковым. В пределе, при $t \rightarrow \infty$, эта система прямых образует параболу

$$s_x(t) = \beta t^2.$$

Таким образом, ускорение

$$a = \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = 2\beta. \quad (3.94)$$

Наконец, мы получаем известное выражение для линейного движения с постоянным ускорением:

$$s_x(t) = at^2/2, \quad \text{если } t \gg T.$$

Рассмотрим далее зависимость от времени деформации e_{xx} в окрестности центра масс.

На интервале времени

$$0 < t < l/2c$$

деформация равна нулю. Затем e_{xx} становится отрицательной, поскольку в рассматриваемую точку приходит волна сжатия, и затем остается постоянной до момента времени $t = 3l/2c$, когда в центр масс приходит отраженная волна растяжения. В этот момент деформация снова исчезает. В результате воздействия отраженных волн деформация периодически изменяется. В течение первой половины периода T деформации отсутствуют, а во второй проявляется сжатие, и такое поведение наблюдается на всех временах. Ранее мы обсуждали поведение пружины для случая, когда внешняя сила F_x приводила к ее сжатию. Очевидно, что похожий результат получится, если сила F_x будет иметь противоположное направление и порождать в пружине волну растяжения.

Как мы уже знаем (см. главу 1), масса тела и, в частности, пружины, является мерой его инерции. Она характеризует интервал времени, требующийся для того, чтобы тело могло достичь определенной скорости. Так, например, с увеличением массы ускорение тела становится меньше и, соответственно, это время увеличивается. Это может произойти из-за увеличения плотности пружины и ее длины. Ранее мы показали, что оба эти фактора приводят к увеличению времени распространения отраженных волн между концами пружины. Это означает, что интервал времени, в течение которого скорость остается постоянной, также увеличивается. Таким образом, можно сказать, что инерция в качестве свойства, присущего телу, связана со временем распространения волн между его краями. Такая же тенденция наблюдается, когда мы увеличиваем поперечное сечение тела, поскольку в этом случае скорость частиц становится меньше.

Рассмотрим еще раз переход от реальной к идеально жесткой пружине. С увеличением жесткости скорость распространения c увеличивается, поскольку

$$c = \sqrt{E^* / \rho}.$$

В то же время скорость частицы, связанная с волной, становится меньше. Действительно, из (3.42) имеем

$$a = \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = 2\beta.$$

Таким образом, мы видим, что увеличение E^* ведет к уменьшению скорости v_0 , а также интервала времени $t = l/c$, в течение которого скорость $v_n(t)$ остается постоянной. В предельном случае идеально жесткой пружины

$$c \rightarrow \infty, \quad v_0 \rightarrow 0$$

скорость $v_n(t)$ становится непрерывной функцией и описывает движение всех частиц пружины.

Данное рассуждение подтверждает также тот факт, что жесткость E^* не влияет на инерцию. Согласно (3.86) и (3.87) имеем

$$t_n = \frac{l}{c} n \frac{lv_n}{cv_0} \quad \text{если } n \gg 1.$$

Здесь t_n – момент времени, в который скорость центра пружины равняется v_n . Из выражения (3.42) следует, что

$$cv_0 = F_x / \rho,$$

следовательно, произведение скорости волны и скорости частицы не зависит от E^* . Поэтому

$$t_n = \frac{lv_n \rho}{F_x} = \frac{v_n}{F_x} m.$$

Последнее выражение ясно показывает, что только масса является мерой инерции.

Предположим, что на тело действует импульсная сила, которую можно рассматривать как сумму двух ступенчатых функций противоположного знака. Тогда легко получить суперпозицию отраженных волн, вызванных каждой из этих функций. Полагая, что ширина τ импульса достаточно велика, мы видим (рис. 3.9, ä), что тело начинает двигаться с постоянной скоростью (первый закон Ньютона).

ЗАКОН ГУКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

В главе 2 мы обсуждали закон Гука для пружин и уделили особое внимание его основному свойству, а именно, тому, что смещение нижнего конца пружины, $s_x = \Delta l$ (рис. 3.10, а), прямо пропорционально ее первоначальной длине l :

$$\Delta l \sim l.$$

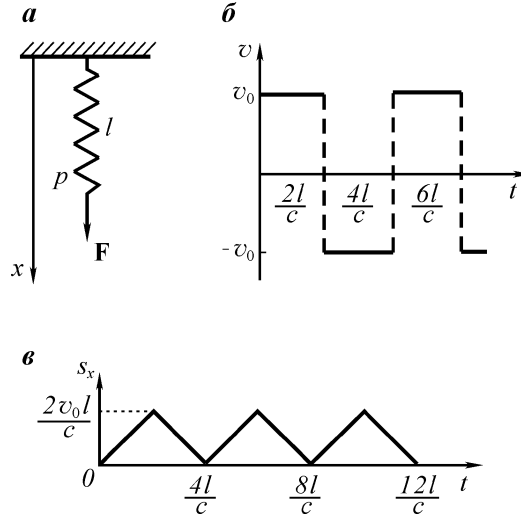
Такое поведение s_x заставило нас задаться следующим вопросом. Откуда нижний конец пружины (точка p на рис. 3.10, ä) “знает”, где находится ее противоположный конец? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим движение нижнего конца пружины под действием постоянной силы F_x :

$$F_x = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_{0x}, & t \geq 0 \end{cases}$$

при условии, что верхний конец прикреплен к абсолютно жесткой среде (рис. 3.10, а).

Поскольку сила направлена вниз, в первый момент времени возникает волна растяжения, которая распространяется к верхнему концу. В то же время точка p движется с постоянной скоростью вдоль оси x . В результате отражения исходной волны, в момент времени $t = l/c$ возникает волна растя-

Рис. 3.10. Сила, приложенная к пружине (а); зависимость скорости нижнего конца пружины от времени (б); зависимость смещения нижнего конца пружины от времени (в)



жения, распространяющаяся вниз, хотя сами частицы при этом двигаются в противоположном направлении. Поэтому движение пружины позади волнового фронта прекращается. В момент времени $t = 2l/c$ указанная волна достигает нижнего конца, и вся пружина прекращает свое движение. Однако в этот момент возникает отраженная волна сжатия, которая распространяется вверх. В соответствии с этим изменяется и направление движения частиц. Таким образом, скорость нижнего конца пружины остается постоянной только на интервале времени

$$0 < t < 2l/c.$$

Как только волна сжатия достигает верхнего конца в момент времени $t = 3l/c$, к появляется новая волна сжатия. Эта волна распространяется вниз, а скорость частиц направлена по направлению оси x . Соответственно, части пружины, находящиеся позади волнового фронта, не движутся. В частности, в момент времени $t = 4l/c$ все точки пружины находятся в состоянии покоя. Однако в этот момент снова появляется волна растяжения, которая распространяется вверх. Таким образом, мы начинаем наблюдать такое же поведение скорости. Очевиден периодический характер этого поведения во времени (рис. 3.10, б). Период

$$T = 4l/c, \quad (3.95)$$

а в пределах периода

$$v = \begin{cases} v_0, & -T/2 < t < 0, \\ -v_0, & 0 < t < T/2. \end{cases} \quad (3.96)$$

Последнее выражение показывает, что в течение первого полупериода

смещение s_x нижнего конца пружины линейно растет со временем и достигает своего максимального значения

$$s_x = \frac{2l}{c} v \quad (3.97)$$

в момент времени $t = 2l/c$. Затем, во втором полупериоде, смещение линейно уменьшается, и нижний конец возвращается в свое исходное положение в момент времени $t = 4l/c$ (рис. 3.10, а).

Периодическую функцию s_x удобно представить в виде суперпозиции различных синусоидальных гармоник. Поскольку $s_x(t)$ является четной функцией, ее ряд Фурье имеет следующий вид (см. приложение 6):

$$s_x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos 2\pi n \frac{t}{T}, \quad (3.98)$$

где

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s_x(t) \cos 2\pi n \frac{t}{T} dt. \quad (3.99)$$

В частности, коэффициент b_0 равняется

$$b_0 = \frac{c}{l} v_0 \int_0^{2l/c} t dt = 2 \frac{v_0 l}{c}.$$

Отсюда

$$b_0/2 = v_0 l/c. \quad (3.100)$$

Таким образом, полное смещение нижнего конца пружины представляет собой сумму постоянного смещения Δl и набора гармоник с различными частотами.

Примечательно, что постоянная составляющая смещения

$$\Delta l = b_0/2 = v_0 l/c \quad (3.101)$$

прямо пропорциональна исходной длине пружины l . Другими словами, Δl пропорционально времени, в течение которого волна распространяется от нижнего к верхнему концу пружины.

Как следует из выражения (3.101),

$$\Delta l/l = v_0/c. \quad (3.102)$$

Этот результат не удивителен, поскольку правая и левая части этого равенства характеризуют деформацию.

Согласно (3.42),

$$v_0/c = F_{0x}/E^*,$$

и, соответственно, (3.102) переписывается в виде

$$\Delta l/l = F_{0x}/E^*$$

или

$$F_{0x} = k \Delta l, \quad (3.103)$$

где

$$\Delta l = v_0 l / c \quad \text{и} \quad k = E^* / l.$$

Конечно, соотношение (3.103) описывает закон Гука при условии, что Δl равняется половине максимального смещения нижнего конца пружины.

В связи с этим следует заметить следующее. Закон Гука основывается на экспериментальных данных. Он означает, что смещение конца пружины под действием постоянной силы достигает некоторого значения и далее остается постоянным. Такое поведение противоречит функции $s_x(t)$, показанной на рис. 3.10, . . Это несоответствие можно объяснить, если учесть влияние затухания. В реальной ситуации колебания, описываемые гармониками ряда Фурье при $n \geq 1$, затухают со временем относительно быстро, поскольку период T обычно мал. Наблюдения, выполненные за период времени, существенно превосходящий T , позволяют нам определить Δl .

3.3 ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУНЕ

До сих пор мы изучали распространение продольных волн в пружине, когда скорости частиц и волны имели либо совпадающие, либо противоположные направления. Теперь мы рассмотрим поведение поперечных (сдвиговых) волн, распространяющихся вдоль струны.

РАСТЯЖЕНИЕ И СМЕЩЕНИЕ СТРУНЫ

Предположим, что в начальный момент времени, прямая струна подвергается некоторому растяжению (рис. 3.11, ‡). Из-за деформации возникают внутренние силы растяжения, приложенные к каждому элементу струны (рис. 3.11, ·).

Согласно закону Гука имеем

$$T_0 = k \Delta l^* \quad (3.104)$$

где T_0 обозначает величину внутренней силы, k – жесткость струны, а Δl^* – удлинение элемента Δl ($\Delta l^* \ll \Delta l$).

Поскольку струна однородная, растяжение T_0 – постоянно:

$$T_0 = \text{const.} \quad (3.105)$$

Пусть в некоторый момент времени t происходит небольшое смещение элемента струны в вертикальном направлении. Благодаря действующим внутренним силам, в струне возникнет движение, и наша задача состоит в том, чтобы изучить это явление.

В дальнейшем мы будем предполагать, что наклон каждого элемента от-

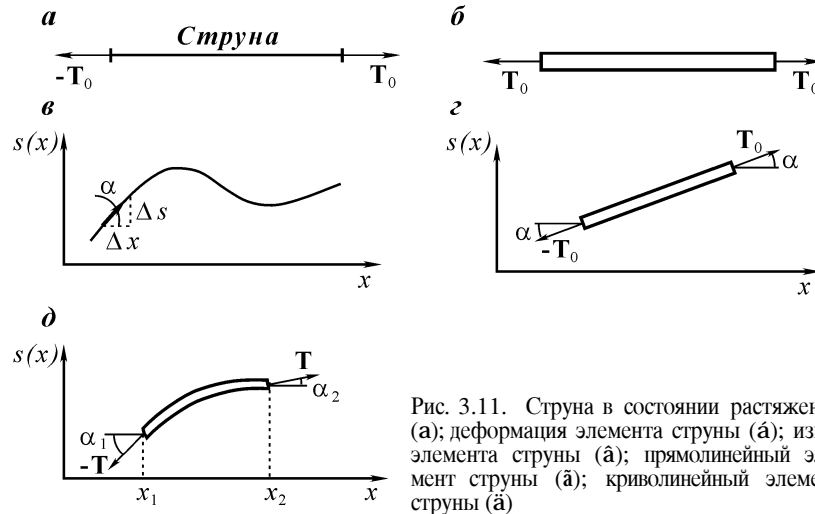


Рис. 3.11. Струна в состоянии растяжения (а); деформация элемента струны (б); изгиб элемента струны (в); прямолинейный элемент струны (г); криволинейный элемент струны (г)

носительно его первоначального положения очень мал. Из рис. 3.11, в видно, что наклон элемента струны равняется

$$\tan \alpha = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} = s'_x(x, t). \quad (3.106)$$

Здесь $s(x, t)$ – вертикальное смещение струны в каждый момент времени, α – угол между элементом dl и осью x . По определению, производная $s'_x(x, t)$ смещения по координате x определяет наклон в каждой точке струны и, в общем случае, зависит от времени.

Предположение о том, что наклоны в струне очень малы, означает, что производная $s'_x(x, t)$ много меньше единицы и, соответственно, мы можем пренебречь квадратом этой величины, т.е.

$$[s'_x(x, t)]^2 = 0. \quad (3.107)$$

Данное условие значительно упрощает анализ движения.

Рассмотрим сначала бесконечно малый элемент dl , который можно трактовать как прямолинейный отрезок (рис. 3.11, б). Его длина dl определяется как

$$dl = \sqrt{dx^2 + ds^2}$$

или

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (s'_x(x, t))^2} dx.$$

С учетом (3.107) получим

$$dl = dx. \quad (3.108)$$

Это очень важный результат, поскольку он показывает, что в нашем приближении малые смещение струны не приводят к изменению длины ее элементов. Как следует из закона Гука, величина растяжения остается такой же, как и в состоянии равновесия, т.е.

$$T = T_0. \quad (3.109)$$

Иными словами, в каждый момент времени величина растяжения равняется T_0 , независимо от формы струны. Поэтому величину T_0 можно рассматривать в качестве параметра струны, который определяется ее растяжением в начальном положении, когда $(x, t) = 0$. Соответственно, мы будем характеризовать струну двумя параметрами, а именно, линейной плотностью ρ и величиной растяжения T_0 .

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим силы, действующие на оба конца элемента dl . Мы предполагаем, что струна является идеально гибкой и, следовательно, сила T_0 направлена по касательной в каждой точке струны. Предположим сначала, что элемент dl прямолинеен и, следовательно, силы T_0 и $-T_0$ направлены вдоль одной прямой (рис. 3.11, а).

Поскольку силы, приложенные к концам элемента, имеют одинаковую величину и противоположные направления, результирующая сила равняется нулю:

$$F = T_0 - T_0 = 0,$$

и элемент находится в состоянии равновесия. Это означает, что он либо покоится, либо движется с некоторой постоянной скоростью. Такой же результат следует из рассмотрения компонент силы. Действительно,

$$F_x(x_2, t) = T_0 \cos \alpha, \quad F_x(x_1, t) = -T_0 \cos \alpha,$$

$$F_s(x_2, t) = T_0 \sin \alpha, \quad F_s(x_1, t) = -T_0 \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$F_x = F_x(x_2, t) + F_x(x_1, t) = 0$$

и

$$F_s = F_s(x_2, t) + F_s(x_1, t) = 0.$$

Предположим далее, что малый элемент dl слегка изогнут, но его длина по-прежнему равняется dx (рис. 3.11, б). В этом случае наклон растягивающей силы на разных концах элемента не одинаков, и

$$\begin{aligned} F_x(x_1, t) &= -T_0 \cos \alpha_1, & F_x(x_2, t) &= T_0 \cos \alpha_2, \\ F_s(x_1, t) &= -T_0 \sin \alpha_1, & F_s(x_2, t) &= T_0 \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Для того, чтобы вывести уравнение движения элемента dl , необходимо выразить тригонометрические функции через производные смещения $s(x, t)$. Как видно из рис. 3.11, \hat{a} ,

$$\sin \alpha = \frac{ds}{dl} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2 + ds^2}} = \frac{ds}{dx \sqrt{1 + (s'_x)^2}}$$

или

$$\sin \alpha = \frac{s}{\sqrt{1 + (s'_x)^2}}, \quad (3.111)$$

и

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dl} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + ds^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (s'_x)^2}}. \quad (3.112)$$

Пренебрегая членом $(s'_x)^2$, получим

$$\sin \alpha = \frac{ds_x}{dx} = s'_x(x, t) \quad \text{и} \quad \cos \alpha = 1. \quad (3.113)$$

Принимая во внимание первую пару соотношений (3.110), получим, что результирующая компонента силы, приложенной к элементу dl , направленная вдоль оси x , равняется нулю:

$$F_x(x_1, t) = F_x(x_2, t) - F_x(x_1, t) = 0. \quad (3.114)$$

Поскольку в начальном положении струна находилась в состоянии покоя, выражение (3.114) показывает, что движение элемента в горизонтальном направлении отсутствует. В то же время результирующая компонента силы вдоль оси s равняется

$$F_s(x_1, t) = T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1$$

или

$$F_s(x_1, t) = T_0 [s'_x(x_2, t) - s'_x(x_1, t)]. \quad (3.115)$$

Хотя элемент dl искривлен, он по-прежнему настолько мал, что наклон $s'_x(x, t)$ меняется линейно между его границами. Поэтому выражение (3.115) можно переписать как

$$F_s(x_1, t) = T_0 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx, \quad (3.116)$$

поскольку $dl = dx$ (формула 3.108) и

$$s'_x(x_2, t) - s'_x(x_1, t) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx.$$

Второе уравнение, связывающее смещение струны и результирующую силу F_x , является вторым законом Ньютона:

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F_s \quad \text{или} \quad \rho dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F_s(x, t)$$

Подстановка (3.116) в (3.117) дает

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad (3.118)$$

где

$$c_s = \sqrt{T_0 / \rho}.$$

Таким образом, как и в случае продольных волн, мы пришли к волновому уравнению, которое описывает распространение волн вдоль струны. Однако в данном случае частицы движутся в направлении, перпендикулярном направлению распространения. Обозначая скорость элемента \mathbf{v} , а скорость волны \mathbf{c} , получим

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_s = 0. \quad (3.120)$$

В дальнейшем мы будем обсуждать поведение сдвиговых волн в упругой среде. Простейшим примером таких волн являются поперечные волны в струне.

Интересно заметить, что скорости продольных и поперечных волн в пружине и струне

$$c_l = \sqrt{E^* / \rho} \quad \text{и} \quad c_s = \sqrt{T_0 / \rho} \quad (3.121)$$

одинаково зависят от плотности ρ , а растяжение T_0 играет ту же роль, что и упругий параметр пружины E^* . В частности, когда растяжение струны становится более сильным, скорость поперечных волн увеличивается.

В предыдущем разделе мы показали, что решение волнового уравнения имеет вид

$$s(x, t) = Af\left[\alpha\left(t - \frac{x}{c_s}\right)\right] + Bg\left[b\left(t + \frac{x}{c_s}\right)\right]$$

и описывает волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Как уже отмечалось ранее, механизм генерации волн очень прост. Если некоторый элемент струны движется вверх или вниз вдоль оси s , в двух прилегающих элементах возникает результирующая сила F_s . В силу инерции эти элементы начинают двигаться с некоторой задержкой по времени. Их движение вызывает, в свою очередь, смещение более далеких элементов. Соответственно, мы наблюдаем распространение волн от первоначального элемента в противоположных направлениях.

Здесь следует сделать одно замечание. Как и в случае продольных волн, мы рассматривали два малых элемента струны с различными длинами. Изо-

гнутой элемент имел большую длину, и мы использовали его для вывода волнового уравнения. В то же время более короткий элемент является прямым, и в его пределах скалярная компонента силы F_s и его наклон связаны как

$$F_s = T_0 \frac{\partial s(x, t)}{\partial x}. \quad (3.122)$$

Это соотношение можно трактовать как простейшую форму закона Гука для сдвиговых волн.

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Среди решений волнового уравнения имеется одна группа функций, которая играет очень важную роль. Речь идет о функциях, синусоидальных по времени и расстоянию. Опишем кратко их основные свойства.

Очевидно, что функция

$$s(x, t) = A \sin \omega(t - x/c_s) \quad (3.123)$$

удовлетворяет волновому уравнению и описывает синусоидальную волну.

Здесь

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (3.124)$$

является круговой частотой, а T – периодом колебаний. Каждый из этих параметров характеризует в произвольной точке поведение волны как функции времени. Коэффициент A обозначает амплитуду, а c_s – скорость волны.

По определению, фаза волны задается как

$$\varphi = \omega t - \frac{\omega}{c_s} x, \quad (3.125)$$

и ее можно переписать в виде

$$\varphi = \omega t - kx, \quad (3.126)$$

где

$$k = \omega/c_s \quad (3.127)$$

является волновым числом. Волновое число пропорционально частоте и уменьшается при увеличении скорости c_s . В частности, когда скорость волны стремится к бесконечности, параметр k стремится к нулю, и вместо волнового поведения наблюдаются вибрации. Действительно, в этом случае выражение (3.123) переходит в

$$s(x, t) = A \sin \omega t \quad (3.128)$$

и в любой момент времени t одно и то же смещение наблюдается одновременно во всех точках струны.

Как следует из выражения (3.126) волновое число k описывает скорость изменения фазы и, следовательно, формы волны с расстоянием x .

Как мы знаем, период T – это интервал времени

$$N = t_2 - t_1,$$

в течение которого фаза изменяется на 2π , а волновое поле $s(x, t)$ остается прежним, т.е.

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t_1 - kx) &= A \sin(\omega t_2 - kx) = \\ &= A \sin(\omega t_1 - \omega T - kx) = A \sin(\omega t_1 - kx) \end{aligned}$$

так как

$$\omega T = 2\pi.$$

Таким же образом длина волны λ вводится как интервал Δx :

$$\lambda = \Delta x = x_2 - x_1,$$

на котором фаза также изменяется на 2π , а смещения в точках x_1 и x_2 равны друг другу:

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t - kx_1) &= A \sin(\omega t - kx_2) = \\ &= A \sin(\omega t - kx_1 - k\lambda), \end{aligned}$$

поскольку

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{или} \quad \lambda = 2\pi/k. \quad (3.129)$$

Сравнение выражений (3.124) и (3.129) показывает, что длина волны λ и волновое число k играют роль, соответственно, пространственного периода и пространственной частоты.

Очевидно, что две пары параметров ω , T и λ , k связаны между собой.

Так, например,

$$\lambda = -\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c_s$$

или

$$\lambda = c_s T, \quad (3.130)$$

т.е. длина волны – это расстояние, которое проходит данная фаза за интервал времени, равный периоду.

Поведение синусоидальной волны как функции времени и расстояния показано на рис. 3.12, а, â.

НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ

До сих пор мы предполагали, что волна распространяется вдоль бесконечной струны. Предположим теперь, что струна не бесконечна и ее правый конец жестко закреплен в точке $x = l$ (рис. 3.12, â):

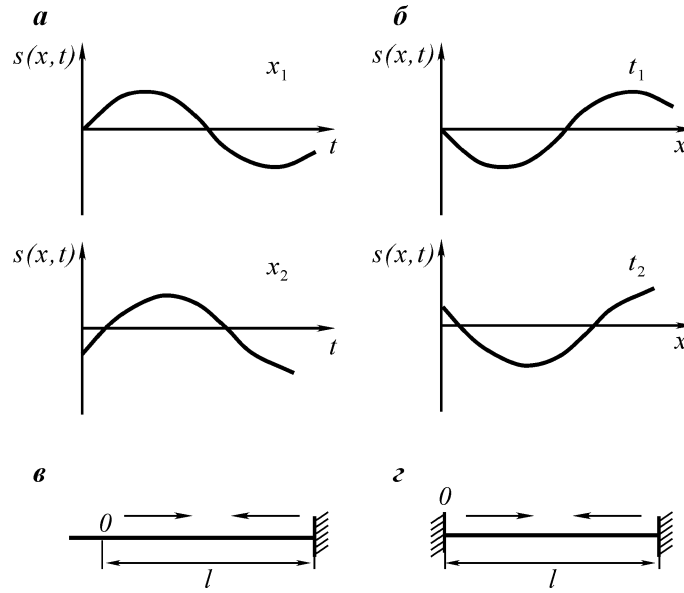


Рис. 3.12. Синусоидальные волны как функции времени (а) и расстояния (б); полубесконечная струна с закрепленным концом (в); струна конечной длины с закрепленными концами (г)

$$s(l, t) = 0. \quad (3.131)$$

Последнее соотношение является граничным условием.

По аналогии со случаем продольных волн, распространяющихся вдоль пружины, мы можем ожидать, что в точке $x = l$ падающая волна приводит к появлению отраженной волны, которая также является синусоидальной и имеет ту же частоту:

$$s_r(x, t) = B \sin(\omega t + kx + \varphi_0), \quad (3.132)$$

где φ_0 – некоторая постоянная величина, называемая обычно начальной фазой, и коэффициент B также является неизвестным.

Знак плюс перед kx указывает на то, что отраженная волна движется в сторону начала координат $x = 0$. Таким образом, полностью волну можно представить как

$$s(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + B \sin(\omega t + kx + \varphi_0). \quad (3.133)$$

На правом конце, $x = l$, мы должны иметь

$$A \sin(\omega t - kl) + B \sin(\omega t + kl + \varphi_0) = 0. \quad (3.134)$$

Поскольку данное равенство выполняется независимо от момента времени, мы должны заключить, что фазы обеих волн в этой точке равны друг другу:

$$\omega t - kl = \omega t + kl + \varphi_0$$

или

$$\varphi_0 = -2kl. \quad (3.135)$$

Соответственно, из (3.134) получим

$$B = -A. \quad (3.136)$$

Таким образом, мы нашли такие значения начальной фазы и амплитуды отраженной волны, которые удовлетворяют начальным условиям (3.131) и волновому уравнению.

Здесь следует сделать два замечания.

а) Определение неизвестных величин φ_0 и B основывалось на том обстоятельстве, что фазы падающей и отраженной волн должны быть равны на границе $x = l$. Как было показано ранее, это замечательное свойство фазы наблюдается также в гораздо более сложных случаях.

б) Отраженная волна существует на всех частотах, причем существуют одновременно две синусоидальные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях:

$$s(x, t) = A [\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx - 2kl)]. \quad (3.137)$$

Эти волны имеют одну и ту же частоту и амплитуду, но разные фазы.

Используя известное тригонометрическое равенство, получим

$$s(x, t) = 2A \sin k(l - x) \cos(\omega t - kl), \quad (3.138)$$

т.е. функцию, которая отличается от синусоидальной.

Это первый пример суперпозиции синусоидальных волн, и, как видно из выражения (3.138), функция $s(x, t)$ не описывает волну, распространяющуюся вдоль струны.

Рассмотрим теперь струну конечной длины l и предположим, что оба ее конца неподвижны (рис. 3.12, а). В этом случае граничные условия записываются как

$$s(0, t) = 0 \quad \text{и} \quad s(l, t) = 0. \quad (3.139)$$

Волновую картину можно описать следующим образом. Предположим, что волна произвольной формы достигла правого конца струны. Это приводит к появлению отраженной волны, распространяющейся к левому краю струны. В этой точке возникает новая отраженная волна, которая распространяется в направлении оси x . Когда она достигает правого края, снова наблюдается отражение.

Таким образом, существует две группы волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Представим теперь, что каждая из этих групп состоит из бесконечного числа синусоидальных волн с различными частотами. Тогда смещение в волне имеет вид

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x, t)$$

или

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t - k_n x - \varphi_{1n}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t + k_n x + \varphi_{2n}). \quad (3.140)$$

Для того, чтобы удовлетворить граничному условию на левом конце струны ($x = 0$), потребуем, чтобы выполнялось следующее равенство

$$A_n \sin(\omega_n t - \varphi_{1n}) + B_n \sin(\omega_n t + \varphi_{2n}) = 0.$$

Отсюда

$$B_n \cos \varphi_{2n} + B_n \cos \varphi_{1n} = 0$$

и

$$B_n \sin \varphi_{2n} - A_n \sin \varphi_{1n} = 0.$$

Последние равенства дают

$$\varphi_{1n} + \varphi_{2n} = \pi m$$

и

$$B_n = (-1)^{m+1} A_n, \quad (3.141)$$

где m – произвольное целое число.

Таким образом, каждый из членов (3.140) можно представить как

$$s_n(x, t) = A_n [\sin(\omega_n t - k_n x - \varphi_{1n}) - \sin(\omega_n t + k_n x - \varphi_{1n})]$$

или

$$s_n(x, t) = -2A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \varphi_{1n}). \quad (3.142)$$

Необходимо еще удовлетворить условию на правом конце струны. В соответствии с (3.142) это приводит к следующему равенству:

$$-2A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \varphi_{1n}) = 0$$

или

$$\sin k_n l = 0. \quad (3.143)$$

Последнее условие эквивалентно следующему:

$$k_n l = \pi n, \quad (3.144)$$

где n – целое число, $n = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно, выражение для любого s_n переходит в

$$s_n(x, t) = -2A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cos(\omega_n t - \varphi_{1n}) \quad (3.145)$$

и описывает стоячую волну. Здесь

$$\omega_n = k_n c_s = \frac{\pi n}{l} c_s. \quad (3.146)$$

Самая низкая частота называется обычно фундаментальной и равняется

$$\omega_1 = \pi c_s / l.$$

Принимая во внимание (3.130), последнее равенство можно записать в виде

$$\lambda_1 = 2l,$$

т.е. максимальная длина волны равняется удвоенной длине струны.

Соответственно, для произвольного n

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{и} \quad \lambda_n = \lambda_1/n.$$

Как следует из (3.145), множитель $2A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$ в любой момент времени имеет одну и ту же форму.

В частности, в точках, называемых узлами, смещение отсутствует, а положение этих точек определяется из условия

$$\frac{\pi n}{l} x = m\pi.$$

Здесь m – также целое число:

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

В то же время существуют точки (пучности), в которых смещение имеет максимальную амплитуду. Они определяются соотношением

$$\frac{\pi n}{l} x = \frac{\pi}{2} (2m - 1).$$

Заметим, что суперпозиция волн в полубесконечной струне также приводит к появлению стоячей волны (3.138).

В соответствии с (3.142), каждая стоячая волна является суперпозицией двух синусоидальных функций. Эти волны по-разному называются в литературе: гармоники, нормальные моды, свободные колебания, собственные функции струны. Частоты стоячих волн называются собственными частотами струны. Волна с наиболее низкой частотой часто называется фундаментальной модой, а остальные волны – обертонами.

Таким образом, мы показали, что волну, распространяющуюся вдоль струны конечной длины l , можно представить в виде бесконечной суммы стоячих волн, частоты которых подчиняются равенству (3.14, 6).

В заключение следует заметить следующее.

а) Синусоидальная волна, вызванная гармонической силой, частота которой совпадает с частотой одной из нормальных мод, не может существовать в струне конечной длины. В противном случае, из-за резонанса и отсутствия затухания, амплитуда смещения была бы бесконечной.

б) Тот факт, что поведение волны описывается нормальными модами с определенным набором частот можно объяснить, используя понятия конструктивной и деструктивной интерференции.