Глава 1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА И ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ

1.1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

В 1686 году Ньютон опубликовал свой трактат “Математические начала натуральной философии”, в котором он сформулировал три физических закона природы. Эти законы лежат в основе классической механики, которая позволяет описывать различные типы движений, включая распространение волн в акустических и упругих средах.

Чтобы выразить физические законы в виде формул, описывающих гравитационные, электрические и магнитные поля, используют такие понятия, как масса, заряд, ток и т.д. Таким же образом можно ввести понятие элементарной массы (частицы) и затем описать законы Ньютона. Предполагается, что масса распределена равномерно внутри частицы, а сама частица настолько мала, что все составляющие ее элементы имеют в каждый момент времени одинаковые скорость и ускорение. В дальнейшем мы покажем, что при этом предположении можно пренебречь собственным вращением частицы и распространением волн внутри нее.

Сформулируем теперь законы Ньютона для элементарной массы.

Первый закон

Существуют системы отсчета, в которых частица (элементарная масса) остается в состоянии покоя или движется с некоторой постоянной скоростью $\mathbf{v}$ при условии, что на нее не действуют никакие внешние силы. Такие системы отсчета называются инерциальными.

Второй закон

Ускорение $\mathbf{a}$ частицы прямо пропорционально действующей на частицу внешней силе $\mathbf{F}$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F}, \tag{1.1}$$

где m – масса частицы.

Третий закон

Силы всегда возникают парами. Предположим, что частица m_1 действует с силой $\mathbf{F}_{12}$ на частицу m_2. В свою очередь частица m_2 действует на частицу

m_1 с силой $\mathbf{F}_{21}$, которая имеет ту же величину, что и сила $\mathbf{F}_{12}$, но направлена в противоположную сторону (рис. 1.1, *а*)

$$\mathbf{F}_{21}(p_1) = -\mathbf{F}_{12}(p_2). \tag{1.2}$$

Теперь, после того как мы сформулировали законы Ньютона, следует сделать несколько замечаний.

1. Законы Ньютона справедливы в любой инерциальной системе отсчета, относительно которой измеряются такие кинематические параметры, как скорость и ускорение. Инерциальная система отсчета определяется следующим образом. Если в отсутствии внешних сил скорость частицы постоянна в некоторой системе отсчета, то такая система называется инерциальной.

2. В общем случае на частицу могут действовать сразу несколько сил, различающихся величиной и направлением. Соответственно, сила $\mathbf{F}$ в уравнении (1.1) является суммарной, или полной, силой, действующей на частицу:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i . \tag{1.3}$$

Полная сила является внешней силой, поскольку ее источник находится вне частицы.

Заметим, что в общем случае сумму сил, приложенных к разным точкам тела, можно представить в виде полной силы, действующей в некоторой точке, и вращающего момента. Моментом сил можно пренебречь в предположении, что вращение частицы отсутствует.

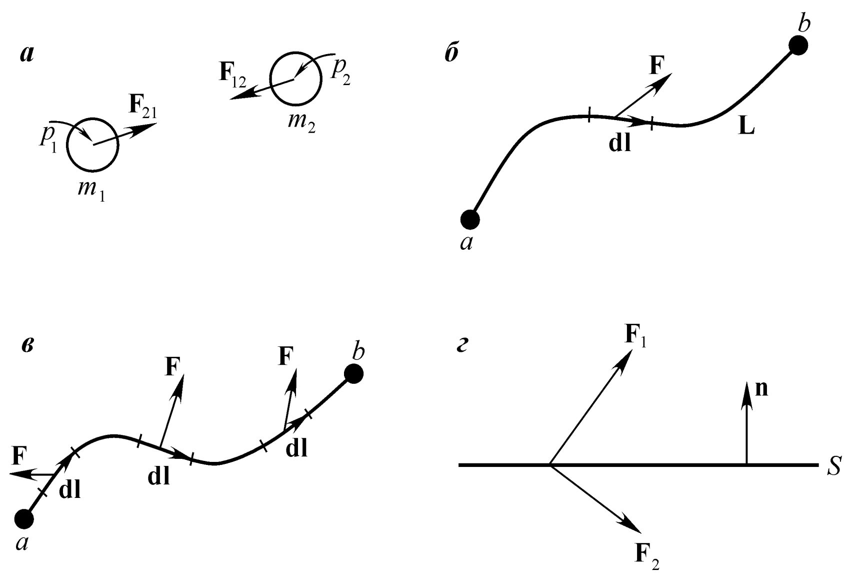


Рис. 1.1. Иллюстрация третьего закона Ньютона (*а*); сила и работа (*б*, *в*, *г*)

3. Скорость и ускорение являются векторами, которые связаны друг с другом следующим образом:

$$\mathbf{a} = d\mathsf{v}/dt. \tag{1.4}$$

Векторы **a** и **v** зависят от точки наблюдения и от времени и в общем случае имеют различные направления.

4. Как следует из второго закона Ньютона, чем больше масса частицы, тем меньше ее ускорение, вызванное данной силой. Таким образом, масса представляет собой количественную меру инерции или, другими словами, меру способности сопротивляться изменению скорости. Единица измерения, используемая в практической системе для измерения массы, – это килограмм:

[масса] – кг.

Инерция является свойством тел. Так, например, масса любого тела остается одной и той же, независимо от того, находится оно на Земле или на Луне. В главе 3 мы покажем, как инерция связана со временем распространения волн в теле.

5. Поскольку ускорение измеряется в м/с^2, единицей измерения силы является

$$\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Эта единица измерения называется Ньютоном:

$$[F] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

В системе СГС (Гауссова система) единицей измерения силы является дина:

1 дина = 10^{-5} Н.

6. Согласно равенству (1.1) ускорение прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе. Таким образом, масса и сила играют противоположную роль при ускорении частицы. Мы еще не раз будем это наблюдать, рассматривая различные типы движения, включая распространение волн.

7. Из второго закона Ньютона следует также, что сила и ускорение имеют одинаковое направление. Векторы скорости и силы, тем не менее, могут иметь разную ориентацию, например, они могут быть направлены в противоположные стороны.

8. Предположим, что результирующая сила **F** равна нулю. Тогда из (1.1) получаем

$$\mathbf{a} = 0 \quad \text{или} \quad d\mathsf{v}/dt = 0$$

и, следовательно,

$$\mathsf{v} = \text{const}.$$

Принцип инерциального движения был впервые открыт Галилеем.

9. Формулируя третий закон Ньютона, мы рассматривали две частицы и действующие на них силы. Несмотря на то, что эти силы равны по величине и противоположны по направлению, их результирующая не равна нулю, поскольку эти силы приложены к разным частицам.

Основываясь на законах Ньютона, введем теперь такие понятия, как количество движения (импульс частицы), импульс силы, работа, а также кинетическая и потенциальная энергия.

Из равенства (1.1) имеем

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

или

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}, \tag{1.5}$$

где

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \tag{1.6}$$

является вектором, который называется импульсом частицы и измеряется в Н·с:

$$[P] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Таким образом, согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на частицу, равна скорости изменения импульса частицы. Другими словами, импульс частицы изменяется именно благодаря действующей на нее силе. В частности, в отсутствие сил импульс частицы остается постоянным:

$$\mathbf{P} = \text{const}. \tag{1.7}$$

Это еще одна формулировка первого закона Ньютона.

Запишем теперь уравнение (1.5) в виде

$$d\mathbf{P} = \mathbf{F}dt. \tag{1.8}$$

Произведение $\mathbf{F}dt$ обычно называют импульсом $d\mathbf{N}$ силы, действующей в течение интервала времени dt:

$$d\mathbf{N} = \mathbf{F}dt + d\mathbf{P}. \tag{1.9}$$

Заметим, что импульс силы и количество движения частицы измеряются в одних и тех же единицах.

Предположим, что на частицу действует сила $\mathbf{F}(t)$ в течение интервала времени

$$t_1 \le t \le t_2.$$

Тогда из равенства (1.9) имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt = \mathbf{N}$$

или

$$\mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{N}, \qquad (1.10)$$

т.е. импульс силы **N** равняется разности импульсов частицы в моменты времени t_2 и t_1.

Компоненты этих векторов в прямоугольной декартовой системе координат связаны между собой следующим образом:

$$P_x(t_2) - P_x(t_1) = N_x,$$

$$P_y(t_2) - P_y(t_1) = N_y,$$

$$P_z(t_2) - P_z(t_1) = N_z.$$

Введем теперь понятие работы, которую можно определить (рис. 1.1, *б*) как

$$W = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl}, \qquad (1.11)$$

где $\mathbf{F}\cdot\mathbf{dl}$ – скалярное произведение силы **F** и перемещения **dl**. Оно определяется следующим образом

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = F_i\, dl. \qquad (1.12)$$

Здесь F_i обозначает тангенциальную компоненту силы в направлении перемещения.

По определению, скалярное произведение $\mathbf{F}\cdot\mathbf{dl}$ характеризует работу силы **F**, затраченную на перемещение частицы на расстояние dl. На рис. 1.1, *в* показаны три возможные ориентации векторов **F** и **dl** относительно друг друга. В первом случае проекция силы на направление **dl** является положительной, и, следовательно, сила **F** производит работу. Иными словами, в результате работы, произведенной силой **F**, частица перемещается в направлении **dl**. Во втором случае направления силы **F** и перемещения **dl** перпендикулярны друг к другу, и, следовательно, сила не производит работы вдоль этого пути. Наконец, в последнем случае, когда угол между этими векторами составляет более 90°, работа является отрицательной. Это означает, что работа по перемещению частицы производится в направлении, противоположном **F**.

Как это следует из определения (1.11), работа силы **F** вдоль пути $L = [a, b]$ (рис. 1.1, *в*) представляет собой сумму (или интеграл) положительных и отрицательных элементарных составляющих работы вдоль этого пути. Суммарная работа может зависеть от пути L, а также от положения конечных точек интервала a и b. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном такие силы, работа которых от пути не зависит. Такие силы называются консервативными и, соответственно, в этом случае в определении (1.11) путь указывать не обязательно.

Обратимся теперь к некоторым свойствам векторных полей, рассмотренных в приложении 3. Как там показано, независимость результата интегрирования от пути означает, что работа силы вдоль замкнутого контура равняется нулю:

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{1.13}$$

Воспользовавшись определением ротора **F**, мы приходим к другой форме равенства (1.13)

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0. \tag{1.14}$$

Данное выражение справедливо в регулярных точках, т.е. там, где существуют первые производные силы **F**. В то же время мы можем предполагать, что на некоторых поверхностях сила **F** терпит разрыв. Тогда, как следует из приложения 3, аналогом выражения (1.14) для такой поверхности является формула

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = 0, \tag{1.15}$$

или

$$\mathbf{n} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{F}_1,$$

где **n** обозначает вектор единичной нормали к поверхности (рис. 1.1, *г*). Поскольку эти векторы ортогональны **n**, заключаем, что тангенциальные компоненты силы при переходе через поверхность остаются непрерывными.

Непосредственно из равенства (1.14) следует, что консервативную силу **F** можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции (см. приложение 3). Представим эту силу в виде

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U, \tag{1.16}$$

поскольку

$$\operatorname{grad} \mathbf{F} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} U \equiv 0.$$

Используя выражение (1.16), можно избежать вычисления интеграла в равенстве (1.11) и выразить работу через функцию U. Действительно, подставляя (1.16) в (1.11) и принимая во внимание, что

$$d\mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial l} dl = dU,$$

получим

$$W = -\int_a^b \operatorname{grad} U \cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b dU = U(a) - U(b). \tag{1.17}$$

Таким образом, зная значения функции U на концах пути, мы можем найти работу без всякого интегрирования. Эта работа равняется разности значений функции U в конечных точках интервала. Существует аналогия между функцией U и потенциалом электрического и гравитационного полей, с помощью которого можно вычислить работу, производимую этими полями. Функция U, так же, как и потенциалы, определяется неоднозначно, с точностью до некоторой постоянной. В частности, существует бесконечное множество функций U, которые при подстановке в выражение (1.16) будут давать одну и ту же силу $\mathbf{F}$.

Заметим, что функция U и работа W задаются произведением силы на перемещение, и, следовательно, обе эти функции измеряются в джоулях:

$$[W] = [U] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}.$$

Существует несколько классических примеров консервативных сил. К ним относятся гравитационные и не зависимые от времени электрические силы, а также силы, возникающие при упругой деформации пружины. С другой стороны, работа сил трения или магнитных сил зависит от пути интегрирования и, следовательно, такие силы не являются консервативными.

Прежде чем обсуждать смысл функции U, естественно ввести понятие кинетической энергии. Поскольку в нашем случае работа не зависит от пути, будем предполагать, что скорость $\mathbf{v}$ направлена по касательной в каждой точке пути L. Тогда, используя второй закон Ньютона, выражение под интегралом (1.11) можно записать как

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \cdot \mathbf{dl} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt}dl.$$

Применяя равенство

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}}{dl}\frac{dl}{dt} = \mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{dl},$$

имеем

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = m\mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{dl}dl = m\mathrm{v}d\mathrm{v},$$

и, следовательно,

$$W = \int_a^b F_i dl = m\int_a^b \mathrm{v}\, d\mathrm{v} = \frac{m\mathrm{v}^2(b)}{2} - \frac{m\mathrm{v}^2(a)}{2}. \qquad (1.18)$$

Функция

$$E = m\mathrm{v}^2/2 \qquad (1.19)$$

называется кинетической энергией частицы массы m, движущейся со скоростью **v**. Таким образом, мы нашли еще один способ выразить работу и при этом избежать интегрирования вдоль пути в выражении (1.11).

Как следует из равенства (1.18), работа W, производимая силой **F**, равняется разнице кинетических энергий частицы в конечных точках интервала пути. Объединяя выражения (1.17) и (1.18), описывающие работу, получим

$$W = U(a) - U(b) = E(b) - E(a),$$

или

$$U(a) + E(a) = U(b) + E(b). \tag{1.20}$$

Последнее соотношение подсказывает, что функция U описывает энергию, которая называется потенциальной энергией частицы. Соответственно, уравнение (1.20) означает, что сумма кинетической и потенциальной энергий частицы не меняется при условии, что работа по перемещению частицы производится консервативными силами. Таким образом, это уравнение является формулировкой закона сохранения механической энергии:

$$E(p) + U(p) = \text{const}, \tag{1.21}$$

где p – произвольная точка пути, по которому происходит движение частицы.

В соответствии с выражениями (1.17) и (1.18) имеем

$$U(b) = U(a) - W$$

и

$$E(b) = E(a) + W. \tag{1.22}$$

Это означает, что если работа силы **F** является положительной, то потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая – увеличивается. И наоборот, если частица движется в направлении противоположном направлению силы **F**, то потенциальная энергия частицы растет, а кинетическая – уменьшается.

Заметим, что уравнение (1.21) объясняет, почему сила **F** называется кон-

Таблица 1.1

Величина	Обозначение	Выражение	Размерность
Смещение	$\mathbf{s}$	–	м
Скорость	$\mathbf{v}$	$d\mathbf{s}/dt$	$м \cdot с^{-1}$
Ускорение	$\mathbf{a}$	$d\mathbf{v}/dt$	$м \cdot с^{-2}$
Масса	m	–	кг
Сила	$\mathbf{F}$	$m\mathbf{a}$	Н
Количество движения (импульс частицы)	$\mathbf{P}$	$m\mathbf{v}$	Н·с
Импульс силы	$\mathbf{N}$	$\int \mathbf{F}dt$	Н·с
Работа	W	$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$	Дж
Потенциальная энергия	U	$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$	Дж
Кинетическая энергия	E	$m\upsilon^2/2$	Дж

сервативной. Как было показано ранее, если силы подчиняются равенству (1.13), то механическая энергия частицы сохраняется.

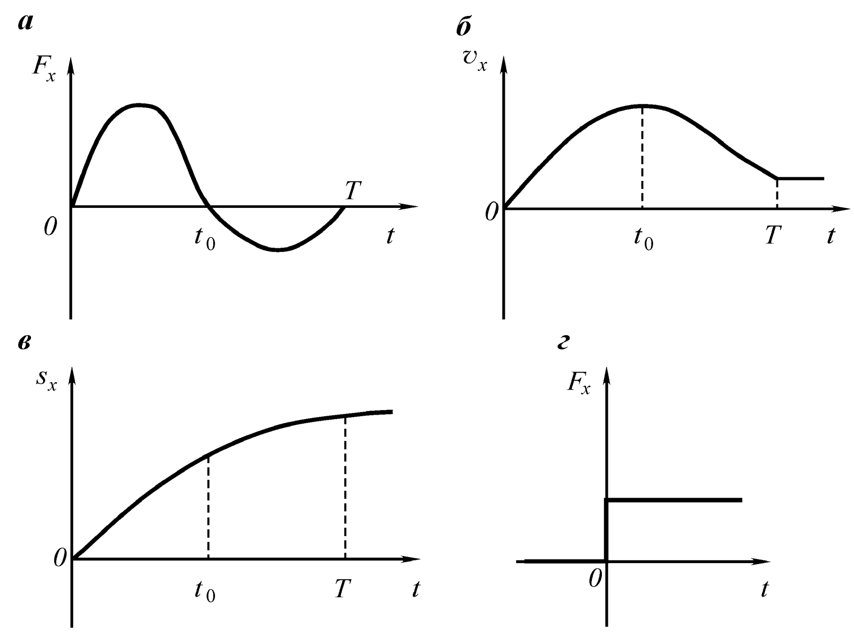
При обсуждении законов Ньютона мы ввели несколько основных понятий (табл. 1.1). Рассмотрим теперь несколько примеров, иллюстрирующих движение частицы.

Пример 1

Предположим, что в течение интервала времени

$0 \le t \le T$

сила **F**, действующая на частицу, имеет только компоненту x (рис. 1.2, *а*).



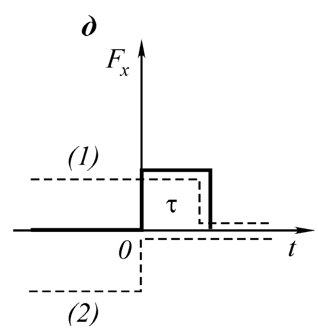


Рис. 1.2. Поведение силы F_x, скорости v_x и смещения s_x

Опишем движение частицы при условии, что в начальный момент времени она покоилась, т.е.

$$s_x(0) = 0, \quad \mathsf{v}_x(0) = 0, \quad a_x(0) = 0.$$

Здесь s_x, v_x и a_x – это x-компоненты перемещения, скорости и ускорения соответственно.

Применяя второй закон Ньютона, получим

$$a_x = \frac{F_x(t)}{m}, \quad \mathsf{v}_x = \frac{\int_0^t F_x dt}{m}, \quad s_x = \int_0^t \mathsf{v}_x(t)dt. \tag{1.23}$$

Прежде всего, очевидно, что ускорение и сила зависят от времени одинаковым образом. До некоторого момента времени $t = t_0$ они направлены вдоль оси x. После этого ускорение и сила меняют знак и в момент времени $t = T$ становятся равными нулю. Поведение скорости – совершенно другое (рис. 1.2, *б*). Сначала скорость быстро возрастает и в момент времени $t = t_0$ достигает своего максимального значения. Затем, по мере уменьшения импульса силы, скорость также падает и в момент времени $t = T$ достигает своего минимального значения. После этого частица движется с постоянной скоростью. Зависимость перемещения от времени показана на рис. 1.2, *в*. По определению, скорость равняется наклону этой кривой.

В соответствии с выражением (1.23), импульс силы в некоторый момент времени t определяет мгновенную скорость движения частицы. В частности, если

$$\int_0^t F_x(t)dt = 0, \tag{1.24}$$

то частица прекращает свое движение, и ее скорость становится равной нулю:

$$\mathsf{v}_x(t) = 0.$$

Очевидно также, что если импульс силы изменит свой знак, то частица начнет двигаться в противоположном направлении.

Пример 2

Предположим теперь, что внешняя сила F_x ведет себя как ступенчатая функция (рис. 1.2, *г*), претерпевающая разрыв в момент времени $t = 0$. Как следует из равенства (1.23), ускорение в этом случае также является ступенчатой функцией, а для скорости и смещения имеем

$$\mathsf{v}_x(t) = \frac{F_x}{m}t \quad \text{и} \quad s_x(t) = \frac{F_x t^2}{2m}.$$

Таким образом, движение частицы в первый момент времени определяется следующими начальными условиями

$$s_x(0) = 0, \quad v_x(0) = 0, \quad ax = F_x/m. \tag{1.25}$$

Другими словами, в начальный момент времени действие силы приводит только к появлению ускорения.

Пример 3

Рассмотрим действие прямоугольного импульса, имеющего амплитуду F_x и длительность τ (рис. 1.2, *д*). Видно, что после завершения действия этого импульса в момент времени $t = \tau$ ускорение, скорость и смещение частицы равняются

$$a_x(\tau) = 0, \quad v_x(\tau) = F_x\tau/m, \quad s_x(\tau) = F_x\tau^2/2m. \tag{1.26}$$

Из этих выражений следует, что при уменьшении длительности τ и, следовательно, при уменьшении импульса силы $N_x(\tau)$ скорость и смещение также уменьшаются и в пределе стремятся к нулю.

Предположим теперь, что уменьшение длительности импульса τ сопровождается увеличением силы F_x так, что импульс силы N_x остается постоянным. Тогда в пределе мы получим дельта-функцию Дирака δ, т.е. импульс бесконечно малой продолжительности и бесконечно большой амплитуды. Начальные условия в этом случае записываются как

$$a_x(0) = 0, \quad v_x(0) = N_x/m, \quad s_x(0) = 0. \tag{1.27}$$

Это означает, что в момент времени $t = 0$ сила приводит только к появлению ненулевой скорости.

Заметим, что при изучении стационарных колебаний и распространения волн обе эти функции – ступенчатая и дельта-функция – будут использоваться довольно часто.

Пример 4

Представим себе, что на частицу действуют сразу две силы, которые направлены, соответственно, вдоль оси x и вдоль оси y, а их изменение во времени описывается синусоидальными функциями. Предположим также, что эти колебания имеют один и тот же период и, кроме того, сдвинуты по фазе на 90° относительно друг друга. Тогда смещения частиц вдоль каждой из осей можно записать как

$$s_x(t) = a \sin \omega t, \quad s_y(t) = b \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.28}$$

где ω – угловая частота, а множители a и b задают амплитуды колебаний.

Таким образом, вектор смещения записывается в виде

$$s(t) = \mathbf{i}a \sin \omega t \pm \mathbf{j}b \cos \omega t. \tag{1.29}$$

Здесь **i** и **j** – единичные векторы вдоль осей x и y.

Чтобы определить траекторию движения частицы, представим выражения (1.28) следующим образом:

$$s_x(t)/a = \sin \omega t \quad \text{и} \quad s_y(t)/b = \pm\cos \omega t.$$

Возводя эти величины в квадрат и затем складывая их, получим

$$s_x^2(t)/a^2 + s_y^2(t)/b^2 = 1. \qquad (1.30)$$

Это равенство является уравнением эллипса с полуосями a и b, лежащего в плоскости XOY (рис. 1.3). Таким образом, за время, равное периоду

$$\mathrm{T} = 2\pi/\omega,$$

частица движется по эллиптической траектории и возвращается в начальную точку, причем направление движения (по часовой стрелке или против) зависит от знака фазы $\pm\pi/2$. Так, например, если

$$s_x(t) = a \sin \omega t, \quad s_y(t)\ b\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

то движение происходит по часовой стрелке. Данное свойство движения частицы называется эллиптической поляризацией. Когда обе амплитуды a и b равны друг другу, эллипс становится кругом. Также легко показать, что если компоненты смещения s_x и s_y изменяются синхронно, т.е. если отсутствует фазовый сдвиг, то частица движется вдоль прямой линии (линейная поляризация), наклон которой относительно оси x равен

$$\mathrm{tg}\ \varphi = b/a.$$

Мы показали, что движение частицы эллиптически поляризовано, когда разность фаз между смещениями s_x и s_y равняется $\pm\pi/2$. Можно также показать, что такое же движение наблюдается при произвольном фазовом сдвиге. Однако в общем случае полуоси эллипса уже не будут совпадать с осями координат. Позднее, изучая распространение волн, мы рассмотрим различные типы поляризации. Эллиптической поляризацией обладают, например, волны Рэлея и волны Стонли. Стоит также заметить, что если зависимость от времени не является синусоидальной, то траектория движения частицы имеет, как правило, очень сложную форму.

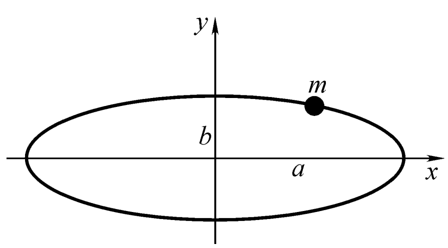


Рис. 1.3. Эллиптическая поляризация

В заключение добавим следующее. Предположим, что в момент времени $t = 0$ частица покоится, т.е. $\mathbf{v}(0) = 0$. Если затем на частицу действует система сил так, что суммарная сила в каждый момент времени равна нулю, т.е.

$$\sum \mathbf{F}_n(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.31}$$

то, как следует из равенства (1.5), частица двигаться не будет. Таким образом, частица находится в состоянии равновесия, если удовлетворяется условие (1.31), а вращение частицы отсутствует.

1.2. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

До сих пор мы рассматривали движение одной единственной частицы. Теперь целесообразно дать описание некоторых общих свойств движения системы частиц. С этой целью введем понятие центра масс. Предположим сначала, что имеются всего две частицы с массами m_1 и m_2, движущиеся вдоль оси x (рис. 1.4, *а*). В каждый момент времени t их положение определяется, соответственно, координатами $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Центр масс этих частиц задается следующим образом:

$$x_0(t) = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sum_{n=1}^{2} m_n x_n}{M} = \frac{m_1}{M} x_1(t) + \frac{m_2}{M} x_2(t), \tag{1.32}$$

где

$$M = m_1 + m_2$$

является полной массой системы.

Как видно из выражения (1.32), центр масс расположен между частицами, причем ближе к частице с большей массой. В частности, если массы частиц одинаковы, центр масс располагается точно посередине. Таким

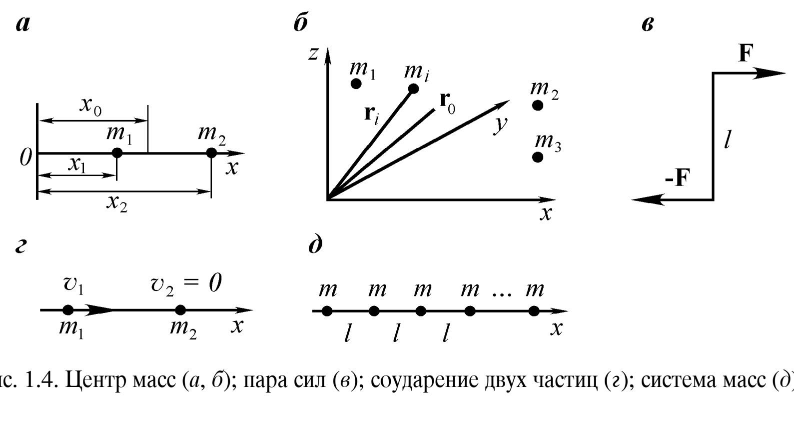


Рис. 1.4. Центр масс (*а*, *б*); пара сил (*в*); соударение двух частиц (*г*); система масс (*д*)

образом, центр масс характеризует, в некоторой степени, распределение частиц.

Центр масс обладает двумя другими важными свойствами. Формулу (1.32) удобно переписать в виде

$$M\, x_0(t) = m_1 x_1\,(t) + m_2 x_2\,(t). \tag{1.33}$$

Дифференцирование последнего выражения по времени дает

$$M\, v_{0x}\,(t) = m_1 v_{1x}\,(t) + m_2 v_{2x}\,(t), \tag{1.34}$$

где v_{1x}, v_{2x} и v_{0x} – скорости частиц и центра масс.

Это соотношение показывает, что в общем случае скорость центра масс отличается от скоростей частиц. Поскольку правая часть уравнения (1.34) представляет собой сумму импульсов обеих частиц, естественно назвать ее импульсом (количеством движения) системы

$$P_x\,(t) = P_{1x}\,(t) + P_{2x}\,(t).$$

Равенство (1.34) тогда запишется следующим образом:

$$M\, v_{0x} = P_x\,(t), \tag{1.35}$$

т.е. скорость центра масс определяется импульсом системы и ее полной массой.

После дифференцирования соотношения (1.34) получим

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

или

$$M\, a_{0x} = m_1\, a_{1x}\,(t) + m_2\, a_{2x}\,(t). \tag{1.36}$$

Здесь a_{0x} – это ускорение центра масс, a_{1x} и a_{2x} – ускорения, соответственно первой и второй частицы.

Применяя второй закон Ньютона, вместо уравнения (1.36) получим

$$M\, a_{0x} = F_{1x} + F_{2x}. \tag{1.37}$$

Здесь F_{1x} и F_{2x} обозначают результирующие силы, действующие на каждую частицу.

Нам важно различать два типа сил: внутренние и внешние. Внутренние силы возникают из-за взаимодействия частиц системы, в то время как источники внешних сил находятся вне ее. Соответственно, имеем

$$F_{1x} = F_{1x}^e + F_{1x}^i, \qquad F_{2x} = F_{2x}^e + F_{2x}^i, \tag{1.38}$$

где F_{1x}^e и F_{2x}^e обозначают внешние силы, источником которых не являются частицы самой системы. И наоборот, силы F_{1x}^i и F_{2x}^i, вызванные частицами самой системы, являются внутренними. Так, например, F_{1x}^i – это сила, с которой вторая частица действует на первую.

Согласно третьему закону Ньютона внутренние силы, например гравитационные, электрические или поверхностные, возникают парами так, что

$$\mathbf{F}_1^i = -\mathbf{F}_2^i \quad \text{или} \quad F_{1x}^i = -F_{2x}^i.$$

Таким образом, правая часть соотношения (1.37) упрощается, и мы получаем

$$M\,a_{0x} = F_{1x}^e + F_{2x}^e = F_x^e, \tag{1.39}$$

где F_x^e – результирующая внешняя сила.

Это означает, что движение центра масс не зависит от внутренних сил, хотя они и влияют на движение каждой частицы в отдельности.

Выражение (1.39) можно переписать в виде

$$dP_x/dt = F_x^e, \tag{1.40}$$

поскольку

$$M\,a_{0x} = M\frac{d\mathrm{v}_{0x}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}.$$

Таким образом, движение центра масс можно представить как движение частицы массы M под действием внешней силы F_x^e. Таково третье из упомянутых ранее свойств центра масс.

Обобщим теперь этот результат. Предположим, что имеется произвольное число частиц, причем в общем случае эти частицы имеют различные скорости, ускорения и направления движения (рис. 1.4, *б*).

Координата x центра масс такой системы определяется так же, как и раньше:

$$x_0(t) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} m_n x_n, \tag{1.41}$$

где x_n – координата x частицы массы m_n, M – полная масса системы:

$$M = \sum_{n=1}^{N} m_n.$$

Для непрерывного распределения масс с линейной плотностью ρ вдоль некоторой линии L имеем

$$M = \int_L \rho\,dl \quad \text{и} \quad x_0(t) = \frac{1}{M}\int_L \rho\,x\,dx, \tag{1.42}$$

где $\rho\,dx$ – масса линейного элемента.

Точно так же определяются две другие координаты центра масс:

$$x_0(t) = \frac{\sum m_n x_n}{M}, \quad y_0(t) = \frac{\sum m_n y_n}{M}, \quad z_0(t) = \frac{\sum m_n z_n}{M}. \tag{1.43}$$

После дифференцирования этих выражений по времени имеем

$$\mathrm{v}_{0x} = \frac{\sum m_n \mathrm{v}_{nx}}{M}, \quad \mathrm{v}_{0y} = \frac{\sum m_n \mathrm{v}_{ny}}{M}, \quad \mathrm{v}_{0z} = \frac{\sum m_n \mathrm{v}_{nz}}{M}. \tag{1.44}$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$a_{0x} = \frac{\sum m_n a_{nx}}{M}, \quad a_{0y} = \frac{\sum m_n a_{ny}}{M}, \quad a_{0z} = \frac{\sum m_n a_{nz}}{M}.$$

Умножая каждую из сумм в выражениях (1.43) соответственно на векторы **i**, **j** и **k**, а затем складывая результаты, получим

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum m_n \mathbf{r}_n}{M}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\sum m_n \mathbf{v}_n}{M}, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\sum m_n \mathbf{a}_n}{M}, \tag{1.45}$$

где $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор центра масс, а $\mathbf{r}_n$ – радиус-вектор частицы с номером n (рис. 1.4, *б*):

$$\mathbf{r}_n = x_n \ \mathbf{i} + y_n \mathbf{j} + z_n \mathbf{k}.$$

В частности, для непрерывного распределения масс имеем

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\int \rho \, \mathbf{r} \, dV}{M}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\int \rho \, \mathbf{v} \, dV}{M}, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\int \rho \, \mathbf{a} \, dV}{M}, \tag{1.46}$$

где ρ – объемная плотность, $d\mathrm{V}$ – элементарный объем.

Как следует из равенств (1.45),

$$M \, \mathbf{v}_0 = \sum_{n=1}^{N} m_n \, \mathrm{v}_n = \mathbf{P} \tag{1.47}$$

и

$$M \, \mathbf{a}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \, \mathbf{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_x^e = \mathbf{F}^e, \tag{1.48}$$

поскольку сумма внутренних сил равна нулю.

Как и ранее, мы видим два замечательных свойства центра масс, а именно:

1) импульс центра масс совпадает с количеством движения тела массы M и равняется следующей сумме:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_n;$$

2) ускорение центра масс определяется суммарной внешней силой и массой всей системы. Этот факт сильно упрощает изучение его движения. В отличие от центра масс, чтобы определить смещение, скорость и ускорение некоторой частицы системы, необходимо знать действующие на нее внутренние силы. Но эти силы существенно зависят от расстояния между частицами,

которое, в общем случае, изменяется со временем. Поэтому вычисление кинематических параметров частиц системы обычно является более сложной задачей, чем вычисление этих параметров для центра масс.

Как отмечалось ранее, в случае непрерывного распределения масс суммирование внешних сил в выражении (1.48) приводит к результирующей силе, приложенной к центру масс, и силовому диполю, т.е. паре сил, имеющих одинаковую величину и противоположное направление (рис. 1.4, *в*). Здесь мы предполагаем, что эта пара сил отсутствует.

Выражение (1.48) можно переписать как

$$\sum_{n=1}^{N} m_n \mathbf{a}_n = \sum_{n=1}^{N} m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^e.$$

Таким образом, если результирующая сила равняется нулю, импульс, а также скорость центра масс остаются постоянными:

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^{N} m_n \mathbf{v}_n = \text{const}, \qquad \mathbf{v}_0 = \text{const} \quad (\text{если } \mathbf{F}^e = 0). \tag{1.49}$$

В то же время частицы системы могут двигаться с ускорением. Первое из соотношений (1.49) представляет собой формулировку закона сохранения импульса для произвольного распределения масс, например для их непрерывного распределения.

Мы рассмотрели систему элементарных масс и, в частности, поведение ее центра масс по двум причинам. Одна из них связана с изучением столкновений частиц. Другая причина заключается в том, что распространение волн сопровождается движениями элементарного объема среды. Чтобы получить уравнение, описывающее движения такого объема, необходимо применить второй закон Ньютона:

$$m\,\mathbf{a}_0 = \mathbf{F}^e,$$

где m – масса объема, $\mathbf{a}_0$ – ускорение его центра масс, а $\mathbf{F}^e$ – внешняя сила.

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

Вернемся теперь к случаю простейшей системы, состоящей из двух частиц, и рассмотрим их соударение. Предположим, что интервал времени, в течение которого происходит столкновение, чрезвычайно мал, и частицы в это время не меняют своего положения. Предположим также, что неконсервативные внешние силы отсутствуют и, следовательно, полная механическая энергия до и после столкновения остается одной и той же. В общем случае наличие неконсервативных сил приводит к некоторым потерям механической энергии.

Во время своего соударения частицы деформируются. Соответственно, они приобретают некоторое количество потенциальной энергии. Затем, после деформации, частицы восстанавливают свою первоначальную форму, и потенциальная энергия снова переходит в кинетическую. В действительности этот процесс занимает некоторое время, но в нашем приближении можно считать, что он происходит мгновенно. В качестве примера рассмотрим случай, когда частица массы m_1 движется вдоль оси x с постоянной скоростью v_1 навстречу частице с массой m_2 (рис. 1.4, *г*). Предположим также, что внешние силы отсутствуют. Таким образом, оказываются удовлетворенными все условия, необходимые для сохранения импульса системы и ее механической энергии.

До столкновения имеем

$$P = m_1 v_1 \quad \text{и} \quad E = m_1 v_1^2 / 2, \tag{1.50}$$

поскольку

$$v_2 = 0.$$

Обозначая скорости частиц после столкновения как v_{1*} и v_{2*}, приходим к следующим выражениям для импульса и энергии:

$$P = m_1 v_{1*} + m_2 v_{2*} \quad \text{и} \quad E = \frac{m_1 v_{1*}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2*}^2}{2}. \tag{1.51}$$

Принимая во внимание закон сохранения импульса и закон сохранения энергии, получим систему из двух уравнений относительно неизвестных скоростей частиц после столкновения:

$$\begin{aligned} &m_1 v_1 = m_1 v_{1*} + m_2 v_{2*}, \\ &m_1 v_1^2 / 2 = m_1 v_{1*}^2 / 2 + m_2 v_{2*}^2 / 2. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Решение этой системы имеет вид

$$v_{1*} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{и} \quad v_{2*} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (\text{если } v_2 = 0). \tag{1.53}$$

Из соотношений (1.53) можно сделать следующие выводы.

1. Скорость первой частицы v_{1*} не может превышать скорость v_1 этой же частицы до столкновения, поскольку часть энергии передается другой частице.

2. Если массы обеих частиц равны между собой, то первая частица в результате соударения остановится, а вторая будет двигаться со скоростью, равной скорости v_1:

$$v_{2*} = v_1.$$

3. Если масса первой частицы больше массы второй частицы: $m_1 > m_2$, то обе частицы будут двигаться в одном направлении. При увеличении отношения m_1/m_2 скорость первой частицы будет стремиться к v_1, а скорость второй частицы – к $2v_1$.

4. Если масса m_1 меньше массы m_2, то после столкновения первая частица начнет двигаться в противоположном направлении, а скорость второй частицы будет меньше скорости v_1.

Рассмотрим теперь распределение кинетической энергии. Согласно формуле (1.19) кинетическая энергия частиц определяется как

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad E_2 = 0$$

и

$$E_{1^*} = \frac{m_1 v_{1^*}^2}{2} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

$$E_{2^*} = \frac{m_2 v_{2^*}^2}{2} = \frac{4m_1^2 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}$$

или

$$\frac{E_{1^*}}{E_1} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{E_{2^*}}{E_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}. \tag{1.54}$$

Отсюда, например, следует, что когда массы частиц равны друг другу, вся кинетическая энергия первой частицы передается после столкновения второй частице.

С другой стороны, если разность масс велика, энергия первой частицы практически не изменится. В то же время энергия второй частицы будет относительно мала, если

$$m_2/m_1 \ll 1 \quad \text{или} \quad m_2/m_1 \gg 1.$$

Полезно также рассмотреть систему, состоящую из нескольких частиц одинаковой массы, расположенных на расстоянии l друг от друга вдоль оси x (рис. 1.4, ∂). Предположим, что в момент времени $t = 0$ первая частица начинает двигаться в сторону другой частицы со скоростью v. Затем, в момент времени

$$\tau = l/v$$

она сталкивается со второй частицей и останавливается. В результате соударения частица массы m_2 также начинает двигаться, и это показывает, каким образом движение и энергия передаются в системе. Например, в момент времени

$$t_n = nl/v$$

частица m_{n+1} начинает двигаться со скоростью v.

Для процесса переноса требуются последовательные соударения частиц. Этот процесс играет важнейшую роль при распространении волн в газе, однако в жидкостях и твердых телах механизм распространения волн совершенно иной.