

ГЛАВА 8. ПРИНЦИПЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

Приступим теперь к изучению синусоидальных волн, частота которых стремится к бесконечности. Мы увидим, что такие волны распространяются через однородные участки среды вдоль прямых лучей, независимо от наличия неоднородности в каком-либо другом месте. Кроме того, будет продемонстрировано, что лучи определяют направления векторов Пойнтинга.

Как было показано ранее, в общем случае, когда длина волны является произвольной, скалярный потенциал U удовлетворяет уравнению Гельмгольца, содержащему частные производные второго порядка. В отличие от комплексной амплитуды U , решение L уравнения эйконала, которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, – это действительная функция действительного же аргумента. Поэтому решить уравнение эйконала обычно проще, чем уравнение Гельмгольца. Действительно, для многих моделей среды, включая горизонтально-слоистые модели и модели со сферической и цилиндрической симметрией, лучи очень часто можно задать аналитически.

Хотя в рассматриваемом здесь случае длины волн стремятся к нулю, могут найтись такие области, где все же будет наблюдаться дифракция и, следовательно, вместо уравнения эйконала придется решать уравнение Гельмгольца. В этом случае обычно необходимо использовать численные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными.

8.1. ЛУЧИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Как было показано в главе 6, комплексный потенциал U задается в высокочастотной области выражением

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{ik_0 L(\mathbf{r})}. \quad (8.1)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения \mathbf{r} в системе координат с началом в точке O , а

$$k_0 = \omega/c_0$$

обозначает волновое число в некоторой заданной точке.

Позже мы обсудим, как найти неизвестный эйконал $L(\mathbf{r})$ и амплитуду $A(\mathbf{r})$. В формуле (8.1) предполагается, что волна в окрестности каждой точки \mathbf{r} является плоской. Это объясняет относительную простоту геометрической акустики.

Эйконал $L(\mathbf{r})$ зависит от координат точки, а также от отношения волновых чисел

$$n = \frac{k(\mathbf{r})}{k_0} = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}.$$

и удовлетворяет уравнению эйконала

$$\text{grad}^2 L = n^2 = (\nabla L)^2. \quad (8.2)$$

Согласно (8.1), эйконал L отличается от начальной фазы $k_0 L$ потенциала U только множителем k_0 . Таким образом, его можно использовать наравне с фазой для описания геометрии фазовых поверхностей.

По определению, поверхность постоянной фазы дается выражением

$$L(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Поскольку функция $L(\mathbf{r})$ задает скалярное поле, мы можем представить себе это поле в виде бесконечного множества поверхностей постоянного эйконала, каждая из которых совпадает с соответствующей поверхностью постоянной фазы. В любой точке такой поверхности выполняется условие

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (8.4)$$

где dq – элементарное смещение в касательной плоскости (рис. 8.1, а).

С другой стороны, производная $\partial L / \partial l$ по направлению произвольного единичного вектора \mathbf{i}_l связана с градиентом поля L следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \mathbf{i}_l \cdot \text{grad} L. \quad (8.5)$$

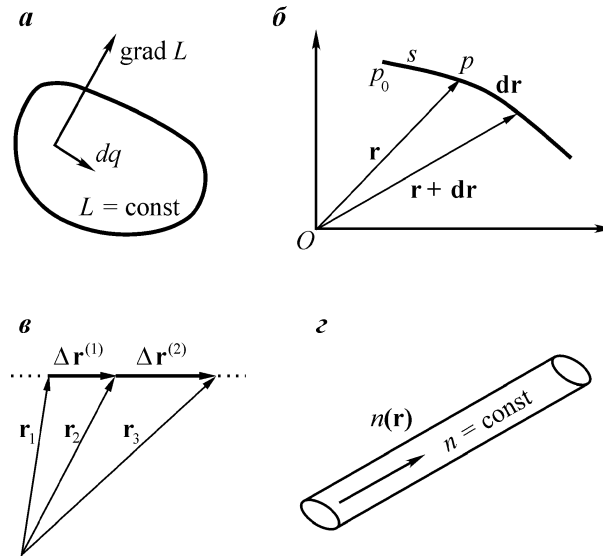


Рис. 8.1. Поверхность постоянного эйконала в направлении $\text{grad} L$ (а); иллюстрация формулы (8.8) (б); иллюстрация формулы (8.20) (в); луч в однородной среде (г)

Здесь \mathbf{i}_l – единичный вектор вдоль кривой l .

Как следует из выражения (8.3), касательная плоскость в любой точке поверхности постоянной фазы (постоянного эйконала) задается как

$$\mathbf{i}_q \cdot \text{grad } L = 0, \quad (8.6)$$

где вектор

$$\mathbf{N} = \text{grad } L \quad (8.7)$$

является нормалью к этой поверхности. Равенство (8.7) демонстрирует одно из наиболее важных свойств градиента скалярного поля.

ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ ЛУЧА

Рассмотрим теперь лучи и определим их как линии, перпендикулярные поверхностям постоянной фазы. Эти линии описывают также скалярное поле L . Для того чтобы вывести уравнение для лучей, выразим вектор \mathbf{N} через две известные величины: радиус-вектор \mathbf{r} и элементарное перемещение ds вдоль луча (рис. 8.1, $\hat{\mathbf{a}}$). Как видно из этого рисунка, длина вектора $d\mathbf{r}$ стремится к ds при уменьшении расстояния между двумя точками на луче:

$$|d\mathbf{r}| \rightarrow ds, \text{ если } d\mathbf{r} \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{s}_0, \quad (8.8)$$

где \mathbf{s}_0 – касательный к лучу единичный вектор.

Поскольку векторы \mathbf{N} и \mathbf{s}_0 коллинеарны, справедливо выражение

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{s}_0 \frac{\text{grad } L}{|\text{grad } L|}.$$

Принимая во внимание уравнение (8.2), окончательно получим

$$n \mathbf{s}_0 = \text{grad } L \text{ или } n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \text{grad } L$$

Дифференциальное уравнение (8.9) позволяет определить координаты любой точки луча по заданной функции L .

Предположим, например, что в однородной среде распространяется волна, вызванная элементарным точечным источником, расположенным в начале координат O . В этом случае

$$n = 1 \text{ и } L = r,$$

поскольку

$$U = A \frac{e^{ikr}}{r},$$

и поверхности постоянной фазы являются сферами.

Принимая во внимание, что

$$\text{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0,$$

уравнение (8.9) переписывается в виде

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0$$

Таким образом, направления лучей совпадают с направлениями радиус-векторов.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда параметр n зависит от расстояния r от источника, находящегося в начале координат ($r = 0$). В силу сферической симметрии,

$$\text{grad} L = n \mathbf{r}_0 \quad \text{или} \quad \frac{dL}{dr} = n(r),$$

так как

$$\text{grad} L = \frac{dL}{dr} \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$L(r) = \int_{r_0}^r n(r) dr + L(r_0), \quad (8.10)$$

и, как и в предыдущем примере,

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0.$$

ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ ЛУЧА

Поскольку функция L неизвестна, целесообразно исключить ее из уравнения (8.9) и найти связь между параметром n и единичным вектором \mathbf{s}_0 , задающим направление луча.

Продифференцируем для этого уравнение (8.9) по s . Получим

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{dr}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \text{grad} L.$$

Поскольку градиент скалярного поля не зависит от системы координат, выберем простейшую, а именно, прямоугольную декартову систему координат и рассмотрим правую часть уравнения (8.11). По определению,

$$\frac{\partial}{\partial s} \nabla L = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial z}. \quad (8.12)$$

В соответствии с выражениями (8.5) и (8.9)

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{s}_0 \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\nabla L}{n} \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Принимая во внимание, что

$$\nabla L \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x} = \nabla L \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla L = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla L)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \nabla L \cdot \nabla L,$$

получим

$$\nabla L \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla L)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} n^2.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2n} \frac{\partial n^2}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Аналогично получают остальные производные:

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (8.12) дает

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad } L = \text{grad } n, \quad (8.13)$$

Последнее уравнение можно получить также более простым способом. Действительно, по определению, градиент L совпадает по абсолютной величине с максимумом производной, который наблюдается в направлении нормали к поверхности постоянной фазы, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial s} = |\text{grad } L| = n. \quad (8.14)$$

Беря градиент от обеих частей этого равенства, снова приходим к уравнению (8.13). Следует заметить, что уравнение (8.13) демонстрирует очень важное свойство эйконала, состоящее в том, что скорость его изменения вдоль луча равна n .

С учетом (8.9) и (8.13) получим

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) = \text{grad } n \text{ или } \frac{\partial}{\partial s} (n \mathbf{s}_0) = \text{grad } n, \quad (8.15)$$

Уравнение (8.15) – это вторая форма дифференциального уравнения луча, которая не содержит неизвестной функции L , и из которой видно, что координаты точек луча определяются свойствами параметра n .

Рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{r}(s)$ как функцию расстояния s между двумя точками на луче. Первая точка является фиксированной, а координаты второй задаются радиус-вектором $\mathbf{r}(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

В декартовой прямоугольной системе координат уравнение (8.15) записывается в виде следующих трех уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial y}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (8.16)$$

Очевидно, что производные $\partial x/\partial s$, $\partial y/\partial s$ и $\partial z/\partial s$ задают направляющие косинусы единичного вектора \mathbf{s}_0 .

Решением системы уравнений (8.16) являются функции

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s), \quad (8.17)$$

задающие луч в параметрической форме.

По определению дифференциального уравнения, функции (8.17), также как и $\text{grad}n$, рассматриваются всегда в окрестности некоторой общей для них точки. Так, например, если среда является однородной в окрестности этой точки, то параметр n является константой, а уравнение (8.15) сводится к

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0. \quad (8.18)$$

Решение этого уравнения дается в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} s + \mathbf{b}, \quad (8.19)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} – некоторые постоянные векторы.

Очевидно, что размеры области, в пределах которой уравнение (8.19) остается справедливым, зависят от поведения параметра n . Если точка отсчета $s = 0$ принадлежит этой области, то луч проходит через точку $\mathbf{r} = \mathbf{b}$. Рассмотрим три точки с радиус-векторами \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 (рис. 8.1, $\hat{\mathbf{a}}$) на луче, заданном выражением (8.19). Введем также разности этих векторов

$$\Delta \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a} \Delta s_1 \quad (8.20)$$

и

$$\Delta \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a} \Delta s_2$$

Здесь Δs_1 и Δs_2 обозначают расстояния между точками. Очевидно, что оба вектора $\Delta \mathbf{r}^{(1)}$ и $\Delta \mathbf{r}^{(2)}$, имеющие общее начало, лежат на одной прямой, направление которой задается вектором \mathbf{a} . Поскольку точки на луче выбирались произвольным образом, мы снова приходим к заключению, что луч является прямой линией в пределах области с однородными свойствами среды. Заметим, что поперечный размер области вокруг луча, может быть сколь угодно мал, а параметр n может произвольным образом изменяться вне этой области (рис. 8.1, $\hat{\mathbf{a}}$).

КРИВИЗНА ЛУЧА

За исключением некоторых специальных случаев лучи в неоднородной среде являются кривыми. Для оценки отклонения луча от прямой используется понятие кривизны луча. Рассмотрим точку луча \mathbf{r}_1 , и пусть касательная к лучу в этой точке составляет угол α_1 с вертикалью. Рассмотрим также в окрестности точки \mathbf{r}_1 произвольную точку \mathbf{r}_2 и обозначим расстояние между этими двумя точками через Δs , угол между касательной к лучу в точке \mathbf{r}_2 и

вертикалью – через α_2 и разность между углами α_2 и α_1 – через $\Delta\alpha$: $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

Предположим, что расстояние Δs мало, и угол $\Delta\alpha$ – это угол, образованный двумя касательными к лучу в точках p_1 и p_2 (рис. 8.2, а). Тогда отношение

$$\Delta\alpha/\Delta s$$

называется средней кривизной луча на интервале Δs , а кривизна луча в точке задается величиной

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Очевидно, что чем больше величина K , тем больше отклонение луча от прямой.

Рассмотрим разность Δs_0 единичных векторов s_0 , заданных в точках p_1 и p_2 :

$$\Delta s_0 = s_0(p_2) - s_0(p_1)$$

Поскольку величина вектора Δs_0 выражается в виде (рис. 8.2, á)

$$|\Delta s_0| = |s_0| \tan(\Delta\alpha) = \Delta\alpha, \text{ если } \Delta\alpha \rightarrow 0,$$

мы можем ввести вектор кривизны K :

$$K = \frac{\partial s_0}{\partial s} = K v_0 = \frac{1}{R} v_0$$

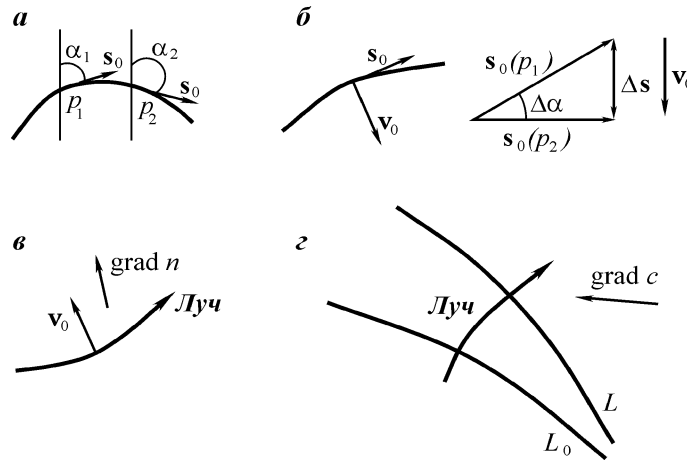


Рис. 8.2. Кривизна луча (а); ориентация векторов v_0 и s_0 (á); взаимное расположение векторов ∇n и v_n (â); ориентация поверхности постоянного эйконала и вектора ∇c (ã)

Как это видно из рис. 8.2, \hat{a} , единичный вектор \mathbf{v}_0 ортогонален вектору \mathbf{s}_0 . Вектор \mathbf{v}_0 указывает направление изгиба луча, а величина R называется радиусом кривизны луча. В частности, при $R \rightarrow \infty$ изгиб стремится к нулю, и луч становится прямым. При уменьшении R кривизна луча, наоборот, увеличивается. Чтобы определить связь между кривизной луча и параметром n , продифференцируем левую часть уравнения (8.15). Это даст

$$n \frac{\partial \mathbf{s}_0}{\partial s} + \mathbf{s}_0 \frac{\partial n}{\partial s} = \text{grad} n$$

или

$$n \mathbf{K} = \text{grad} n - \mathbf{s}_0 \frac{\partial n}{\partial s} \quad (8.21)$$

Умножая последнее выражение скалярно на вектор \mathbf{v}_0 , получим

$$n \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 = \text{grad} n \cdot \mathbf{v}_0,$$

поскольку

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0$$

Таким образом,

$$\mathbf{K} = \mathbf{v}_0 \cdot \frac{\text{grad} n}{n} = \mathbf{v}_0 \cdot \text{grad} \log n \quad (8.22)$$

Очевидно, что радиус кривизны луча – величина положительная, так же, как и скалярное произведение векторов \mathbf{v}_0 и $\nabla \log n$. Следовательно, угол между этими двумя векторами всегда меньше $\pi/2$.

Вектор градиента указывает направление максимального возрастания функции, и, таким образом, изгиб луча всегда происходит в сторону больших значений n (рис. 8.2, \hat{a}). Этот важный результат будет еще не раз отмечаться в следующих разделах.

Учитывая, что

$$\frac{n(p_2)}{n(p_1)} = \frac{k(p_2)}{k(p_1)} = \frac{c(p_2)}{c(p_1)},$$

можно сказать, что луч обращен своей выпуклой частью в сторону области с большей скоростью. Это означает, что мгновенный центр кривизны луча располагается в тех местах, где скорость c меньше. Очевидно, что к этому же выводу можно прийти, исходя из принципа Гюйгенса. Действительно, предположим, что в некоторый момент времени $t = t_0$ волновой фронт описывается эйконалом L_0 , а скорость распространения $c(\mathbf{r})$ увеличивается в направлении, показанном на рис. 8.2, \hat{a} . Тогда, проводя элементарные волновые фронты, замечаем, что их радиусы, равные $c\Delta t$, уменьшаются в направлении $-\nabla c$, а волновой фронт в момент времени $t + \Delta t$ определяется огибающей функции L . Таким образом, как мы уже знаем, луч изгибается в направлении областей с меньшей скоростью или, что эквивалентно, с большим значением параметра n (рис. 8.2, \hat{a}).

ИНТЕГРАЛ ЛАГРАНЖА

Далее, основываясь на уравнении луча, мы опишем два важных свойства вектора $\mathbf{N} = n\mathbf{s}_0$, определяемого выражением (8.7). Прежде всего, беря ротор от обеих частей уравнений (8.15), получим

$$\operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial s}(n\mathbf{s}_0) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} n$$

Правая часть этого выражения всегда равна нулю и, следовательно,

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{rot} \mathbf{N} = 0$$

или

$$\operatorname{rot} \mathbf{N} = \mathbf{C}, \quad (8.23)$$

где \mathbf{C} – постоянный вектор, не зависящий от расстояния s .

Поскольку волновые поля отсутствуют на бесконечности, вектор \mathbf{C} можно считать нулевым и, следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{N} = 0 \text{ или } \operatorname{rot}(n\mathbf{s}_0) = 0, \quad (8.24)$$

т.е., мы имеем дело с полем источников (см. приложение 3).

Интегральная форма условий (8.24) следует из теоремы Стокса:

$$\oint_S \operatorname{rot} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{N} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

В силу равенства (см. рис. 8.1, \hat{a})

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$$

имеем

$$\oint n\mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (8.25)$$

Таким образом, циркуляция вектора \mathbf{N} по произвольному пути (эта величина известна как интегральный инвариант Лагранжа) равняется нулю.

Это означает, что интеграл

$$\int_{p_1}^{p_2} n\mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{r} \quad (8.26)$$

не зависит от пути интегрирования, т.е. для любого заданного поля $n\mathbf{s}_0$ он определяется только положением начальной p_1 и конечной p_2 точки интервала пути.

ПРИНЦИП ФЕРМА

Используя приведенный выше результат, можно доказать справедливость принципа Ферма, играющего важную роль в геометрической акустике. По

аналогии с оптикой, определим акустическую длину между двумя точками как интеграл

$$\int_{p_1}^{p_2} n dl.$$

Согласно принципу Ферма, акустическая длина

$$\int_{p_1}^{p_2} n ds$$

вдоль луча ($dl = ds$), соединяющего две произвольные точки p_1 и p_2 меньше акустической длины любой другой кривой, проходящей через эти точки.

Для того чтобы доказать это замечательное свойство лучей в произвольной акустической среде, сравним акустические длины луча C и некоторой другой кривой C_0 , проходящих через точки p_1 и p_2 (рис. 8.3, а). Существенное предположение, которое мы должны при этом сделать, заключается в том, что через каждую точку в окрестности луча C может проходить только один луч, т.е. окрестность луча C является регулярной. Ниже мы приведем пример, который показывает, что если это предположение нарушается, то акустическая длина луча не обязательно является минимальной.

Пусть L_1 и L_2 – две фазовые поверхности волны, расположенные вблизи друг от друга, а C_1 – луч, отличный от луча C . Из равенства (8.25) следует, что циркуляция вектора \mathbf{N} по пути $a_1 b_2 b_3 a_2$ равна нулю:

$$(ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{a_2 b_2} + (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_2 b_3} + (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_3 a_2} = 0. \quad (8.27)$$

Поскольку луч всегда нормален к поверхности равного эйконала, среднее слагаемое исчезает и выражение (8.27) записывается как

$$(ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{a_2 b_2} + (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_3 a_2} = 0. \quad (8.28)$$

Учитывая, что C_1 – луч, а направление обхода вдоль пути $b_3 a_2$ противоположно единичному вектору s_0 , получим

$$(ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_3 a_2} = -(ns_0 \cdot d\mathbf{s}s_0)_{b_3 a_2} = -(nds)_{b_3 a_2}.$$

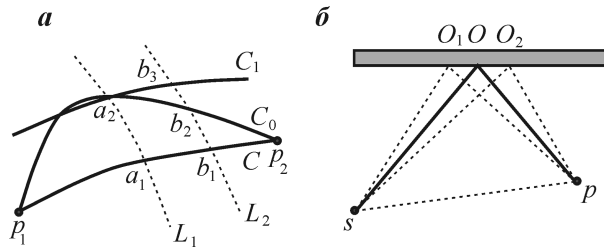


Рис. 8.3. Иллюстрация принципа Ферма (а, а)

Таким образом, равенство (8.28) переходит в

$$(\mathbf{n}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{dr})_{b_3a_2} = (\mathbf{nds})_{b_3a_2} = (\mathbf{nds})_{a_2b_3}. \quad (8.29)$$

Скалярное произведение в этом выражении имеет максимальное значение, когда направления векторов \mathbf{s}_0 и \mathbf{dr} совпадают, т.е.

$$\mathbf{dr} = ds \mathbf{s}_0.$$

Это означает, что

$$(\mathbf{nds})_{a_2b_2} \geq (\mathbf{n}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{dr})_{a_2b_2}.$$

Равенство в этом выражении выполняется только в том случае, когда элемент пути a_2b_2 является частью луча.

Из соотношений (8.29) следует, что

$$(\mathbf{nds})_{a_2b_2} \geq (\mathbf{n}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{dr})_{a_2b_3} \text{ или } (\mathbf{nds})_{a_2b_2} \geq (\mathbf{nds})_{a_2b_3}. \quad (8.30)$$

поскольку C_1 также является лучом. Последние неравенства показывают, что акустическая длина элемента луча меньше акустической длины элемента некоторого другого пути C_0 .

Как следует из формулы (8.5),

$$dL = \mathbf{i}_l \cdot \text{grad } L \, dl = \mathbf{dl} \cdot \text{grad } L \text{ или } dL = \mathbf{dl} \cdot \mathbf{n} \mathbf{s}_0.$$

Тогда для любого луча

$$dl = ds \mathbf{s}_0 \text{ и } dL = n \, ds,$$

т.е.

$$(\mathbf{nds})_{a_2b_3} = (\mathbf{nds})_{a_1b_1}$$

Поэтому неравенства (8.30) можно переписать как

$$(\mathbf{nds})_{a_1b_1} \leq (\mathbf{nds})_{a_2b_2} \quad (8.31)$$

и это условие выполняется для элементов луча C и кривой C_0 . Равенство в этом выражении не может выполняться сразу для всех элементов кривой C_0 , поскольку в этом случае она являлась бы лучом, что противоречит требованию регулярности.

Интегрируя неравенство (8.31), мы приходим к окончательному соотношению, описывающему принцип Ферма:

$$\int_C n \, ds < \int_{C_0} n \, ds \quad (8.32)$$

при условии, что окрестность луча C является регулярной. Таким образом, акустическая длина луча между двумя точками p_1 и p_2 меньше акустической длины любой другой кривой, соединяющей эти точки. Другими словами, значение интеграла

$$I = \int_{p_1}^{p_2} n ds \quad (8.33)$$

минимально вдоль луча. Это означает, что первая производная I по любому параметру, характеризующему малые отклонения от траектории луча, равняется нулю. Следовательно, разность

$$I(C) - I(C_0)$$

в общем случае пропорциональна квадрату отклонения в окрестности луча.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. Поскольку $n = c_0/c$, неравенство (8.32) можно записать в виде

$$\int_C \frac{ds}{c} < \int_{C_0} \frac{ds}{c}$$

или

$$\int_C dt < \int_{C_0} dt. \quad (8.34)$$

Поэтому принцип Ферма известен также как принцип наименьшего времени.

2. Условие регулярности выполняется не всегда. Например, это условие нарушается, когда имеется несколько групп волн и лучи, соответствующие различным группам, пересекаются. В этих случаях луч отличается от других возможных траекторий стационарным (не обязательно минимальным) значением интеграла I . Рассмотрим пример, в котором через точку p проходит два луча: прямой и отраженный (рис. 8.3, а). Акустическая длина прямого луча s_{pO} составляет абсолютный минимум интеграла I , в то время как акустическая длина отраженного луча s_{Op} дает относительный минимум среди всех возможных траекторий s_{O_1p} или s_{O_2p} в некоторой области вблизи s_{Op} .

3. Еще один пример представлен на рис. 8.4. Рассмотрим действие принципа Ферма в модели, где источник расположен в начале координат, а скорость c меняется с глубиной z по закону $c(z) = c_0(1 + kz^2)$, $c_0 = 1$ км/с. Поскольку функция скорости симметрична относительно оси $z = 0$, прямая C на рис. 8.4, а, соединяющая точки $p_1 = [x_2, 0]$ и $p_2 = [x_2, 0]$, является лучом для любых точек x_1 и x_2 . В частности, если $p_1 = [0, 0]$ и $p_2 = [1, 0]$, то $t_C = t_{01} = 1$.

Чтобы проверить, является ли значение $t_{01} = 1$ минимальным временем пробега, рассмотрим малые отклонения от прямого луча и вычислим время на пробега t вдоль кривой $z = 0,1 \sin \pi x$ для набора скоростных моделей, задаваемых параметром k . Рис. 8.4, а указывает на то, что в зависимости от k , время t может быть как меньше, так и больше t_{01} . Присутствие значений $t < t_{01}$ для относительно больших $k > 5$ доказывает то, что имеются такие траектории (кривая $z = 0,1 \sin \pi x$ является одной из них), вдоль которых время распространения волны меньше, чем вдоль прямой C . Хотя кажется, что это противоречит принципу Ферма о наименьшем времени распространения,

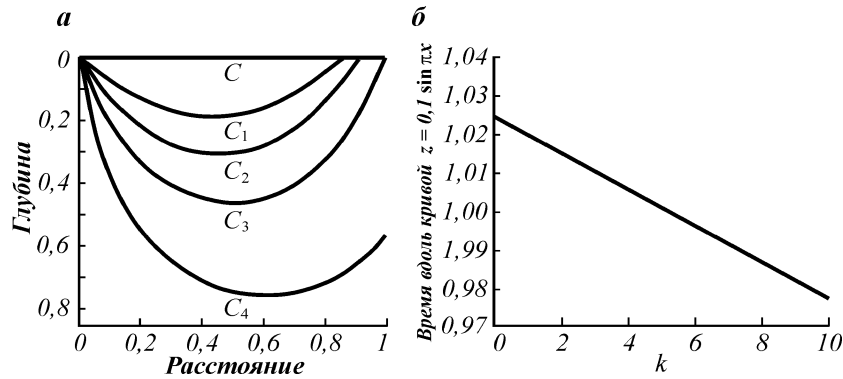


Рис. 8.4. Траектории лучей для $k = 0,7$ (а); зависимость времени пробега между точками $p_1[0, 0]$ и $p_2[1, 0]$, вычисленная вдоль дуги $z = 0,1 \sin \pi x$, от значения k (б)

существование таких траекторий связано с нарушением требования о регулярности лучей в некоторой окрестности C . На рис. 8.4 видно, что существуют такие “ныряющие” лучи C_1 , C_2 и C_3 , которые пересекают прямой луч C так, что через некоторые точки между $p_1 = [0, 0]$ и $p_2 = [1, 0]$ проходят по крайней мере два луча. Таким образом, можно заключить, что в действительности лучи могут соответствовать как минимуму, так и другим экстремумам (максимумам или седловым точкам) интеграла (8.33) в областях, где регулярность лучей нарушается.

4. Поскольку лучи характеризуются стационарными значениями акустической длины, для их нахождения обычно используют методы вариационного исчисления. Мы проиллюстрируем этот подход в дальнейшем, когда будем рассматривать лучи в присутствии плоской внутренней границы раздела.

ПОТОК ЭНЕРГИИ

Покажем теперь, что лучи определяют направление потока энергии. Как известно, избыточное давление P и скорость \mathbf{v} связаны с потенциалом U следующим образом:

$$P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \text{ и } \mathbf{v} = \text{grad } U,$$

где ρ — обозначает плотность.

По определению, компоненты вектора Пойнтинга определяются как

$$S_x = P v_x, S_y = P v_y, S_z = P v_z. \quad (8.35)$$

Полагая, что потенциал U зависит от времени синусоидальным образом, из формулы (8.1) получим

$$U = A \cos(\omega t - k_0 L)$$

и соответственно

$$P = \rho \omega A \sin(\omega t - k_0 L).$$

Рассмотрим сначала среднее значение x -компоненты вектора Пойнтинга. Поскольку

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} \cos(\omega t - k_0 L) + A k_0 \frac{\partial L}{\partial x} \sin(\omega t - k_0 L),$$

имеем

$$S_x = A \rho \omega \frac{\partial A}{\partial x} \sin(\omega t - k_0 L) \cos(\omega t - k_0 L) + A^2 k_0 \rho \omega \frac{\partial L}{\partial x} \sin^2(\omega t - k_0 L)$$

Среднее значение потока энергии

$$S_x^{av} = \frac{1}{T} \int_0^T S_x dt.$$

Здесь $T = 2\pi/\omega$.

С учетом

$$\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

и

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{T}{2},$$

соотношения (8.36) и (8.37) дают

$$S_x^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (8.38)$$

По аналогии получаем

$$S_y^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial y} \quad (8.39)$$

и

$$S_z^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial z}. \quad (8.40)$$

Умножая каждое из равенств (8.38) – (8.40) на соответствующий единичный вектор и складывая получившиеся выражения, приходим к следующему равенству:

$$\mathbf{S}^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial z} \text{grad} L. \quad (8.41)$$

Таким образом, в соответствии с (8.9), направление среднего потока энергии совпадает с направлением луча.

Поскольку

$$|\text{grad} L| = n,$$

величина вектора \mathbf{S}^{av} (интенсивность) равняется

$$|\mathbf{S}^{av}| = \omega \frac{k_0 \rho}{2} n A^2 = \frac{\omega k \rho}{2} A^2 \quad (8.42)$$

или

$$|\mathbf{S}^{av}| = \frac{P_0^2}{2\rho c}, \quad (8.43)$$

где

$$P_0 = \omega \rho A \quad (8.44)$$

определяет величину давления.

8.2. ПОВЕДЕНИЕ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ, ГДЕ СКОРОСТЬ ЗАВИСИТ ОТ ОДНОЙ ДЕКАРТОВОЙ КООРДИНАТЫ

Предположим, что скорость c является непрерывной функцией, которая меняется только вдоль оси z . Согласно формулам (8.15) – (8.16), уравнение луча записывается как

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \text{grad} n \quad (8.45)$$

или

$$n \frac{\partial x}{\partial s} = \text{const}, \quad n \frac{\partial y}{\partial s} = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (8.46)$$

поскольку

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial z} = 0.$$

Покажем сначала, что все лучи лежат в вертикальной плоскости (рис. 8.5, а). Для доказательства введем вектор \mathbf{M} следующим образом:

$$\mathbf{M} = \mathbf{k} \times n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \quad \text{или} \quad \mathbf{M} = \mathbf{k} \times n \mathbf{s}_0, \quad (8.47)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{s}_0 – единичные векторы в направлении оси z и луча, соответственно.

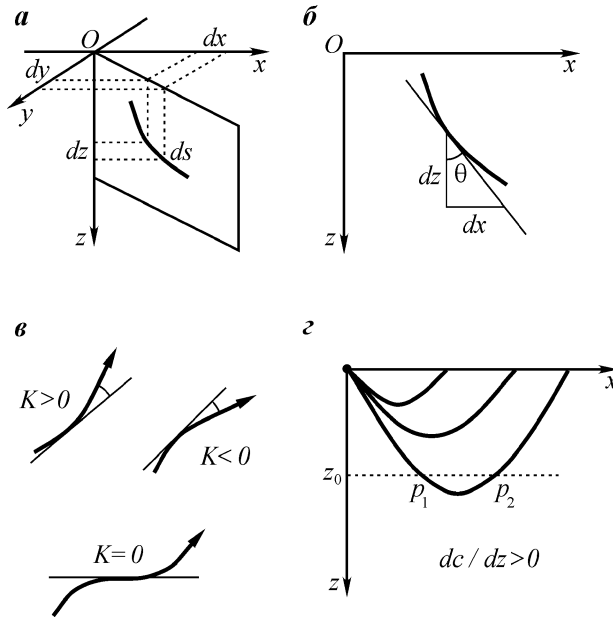


Рис. 8.5. Геометрия луча (а); иллюстрация формулы (8.52) (б); знак кривизны и изгиб луча (в); поведение лучей (г)

По определению, вектор \mathbf{M} в каждой точке луча перпендикулярен плоскости, образованной этими единичными векторами. Дифференцирование \mathbf{M} по s даст

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{k} \times \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial s} \times \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right). \quad (8.48)$$

Поскольку направление единичного вектора \mathbf{k} остается постоянным, первое слагаемое в правой части выражения (8.48) исчезает и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} = \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right).$$

Учитывая формулу (8.45), получим

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} = \mathbf{k} \times \text{grad} n = \mathbf{k} \times \frac{\partial n}{\partial z} \mathbf{k} = 0.$$

Таким образом, вектор \mathbf{M} вдоль луча не меняется:

$$\mathbf{M} = \text{const.}$$

Поскольку вектор \mathbf{M} параллелен плоскости xOy , все точки луча расположены в одной и той же вертикальной плоскости.

Это следует также из того, что согласно (8.46) отношение направляющих косинусов элемента луча ds относительно осей x и y остается постоянным:

$$\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} = \text{const.} \quad (8.49)$$

ЗАКОН СИНЕЛЛИУСА

Пусть источник расположен в начале координат O . Тогда распределение лучей обладает осевой симметрией относительно вертикальной оси z . Поэтому достаточно рассмотреть их поведение в одной из плоскостей, содержащих эту ось. Для простоты будем предполагать, что луч расположен в плоскости xOy (рис. 8.5, а). Уравнения (8.46) тогда запишутся как

$$n \frac{\partial x}{\partial s} = C \text{ и } \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (8.50)$$

где C – некоторая характеризующая луч константа.

Из рис. 8.5, а видно, что направляющими косинусами элемента ds являются

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sin \theta \text{ и } \frac{\partial z}{\partial s} = \cos \theta. \quad (8.51)$$

Здесь θ – угол между осью z и направлением луча.

Таким образом, первое из соотношений (8.50) можно записать как

$$\sin \theta = \frac{C}{n} = \frac{C c(z)}{c_0} = p c(z) \text{ или } \frac{\sin \theta}{c(z)} = p, \quad (8.52)$$

где p – параметр луча, который часто называют медленностью.

Формула (8.52) описывает закон Снеллиуса в среде с непрерывным изменением скорости вдоль оси z . Согласно этому закону отношение синуса угла падения θ к скорости c остается в каждой точке луча постоянным. Однако это отношение может изменяться от одной лучевой траектории к другой.

Пусть скорость распространения и угол падения в окрестности источника равны, соответственно, c_0 и θ_0 . Тогда закон Снеллиуса (8.52) записывается как

$$\frac{\sin \theta}{c} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \quad (8.53)$$

а лучевой параметр p равняется

$$p = \frac{\sin \theta_0}{c_0} > 0. \quad (8.54)$$

Размерность этого параметра

$$|p| = c \cdot m^{-1},$$

а его величина меняется в диапазоне

$$0 \leq |p| \leq \frac{1}{c_0}.$$

Соотношение (8.52) или (8.53) представляет собой уравнение луча. Если известны параметр p и функция $c(z)$, то можно найти соответствующий им луч.

Выразим второе из соотношений (8.50) через функции θ и s . Дифференцирование левой части этого выражения дает

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (n \cos \theta) = -n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + \cos \theta \frac{\partial n}{\partial s} = \frac{\partial n}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial n}{\partial z} = -n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + \cos \theta \frac{\partial n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = -n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + \cos^2 \theta \frac{\partial n}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\sin \theta}{n} \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (8.55)$$

Используя равенство

$$\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c_0}{c} \right) = -\frac{c_0}{c^2} \frac{\partial c}{\partial z},$$

из уравнения (8.55) получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\sin \theta}{n} \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\sin \theta}{c} \frac{\partial c}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = p \frac{\partial c}{\partial z}. \quad (8.56)$$

Уравнение луча в этом виде полезно также для понимания лучевой геометрии.

Как упоминалось ранее, угол падения – это угол между направлением луча и осью z , измеряемый против часовой стрелки. По определению, кривизна луча определяется как

$$K = \partial \theta / \partial s. \quad (8.57)$$

и может быть положительной, отрицательной или равной нулю (рис. 8.5, а).

Таким образом, равенство (8.56) можно переписать как

$$K = p \frac{\partial c}{\partial z}, \quad (8.58)$$

Последнее выражение показывает, что кривизна луча прямо пропорциональна параметру ρ и производной от скорости. Ясно, что равенство (8.58) следует из более общего соотношения (8.22) между кривизной и градиентом скорости, полученного в предыдущем разделе.

Таким образом, мы пришли к двум разным формам уравнения луча, связывающим функции θ и $c(z)$:

$$\frac{\sin \theta}{c} = \rho \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = \rho \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Чтобы проиллюстрировать использование формул (8.52) – (8.58), рассмотрим, как ведут себя лучевые траектории при различных функциях скорости $c(z)$.

Случай 1: однородная среда

В этом простейшем случае

$$\partial c / \partial z = 0$$

кривизна луча (8.58) всюду равняется нулю и, следовательно, все лучи являются прямыми.

Случай 2: скорость увеличивается с глубиной

Предположим теперь, что источник, как и ранее, расположен в начале координат, а скорость c почти линейно возрастает с глубиной; т.е.

$$\partial c / \partial z > 0.$$

Из формулы (8.58) следует, что кривизна луча всюду положительная, так что траектория луча стремится загнуться вверх. Иными словами, из уравнения луча ясно, что угол θ увеличивается с расстоянием s от источника. Следовательно, у каждого луча, за исключением того, который соответствует углу $\theta_0 = 0$, имеется такая точка, где $\theta = \pi/2$ и единичный вектор \mathbf{s}_0 перпендикулярен оси z . При дальнейшем увеличении расстояния s угол θ становится больше $\pi/2$, и луч изгибается в сторону области с меньшей скоростью.

Из формулы (8.52) следует, что в точке поворота $\theta = \pi/2$ скорость ведет себя обратно пропорционально параметру луча ρ :

$$c(z) = \frac{1}{\rho} = \frac{c_0}{\sin \theta_0}.$$

Так как скорость распространения монотонно увеличивается с глубиной, координата z точки поворота луча уменьшается с ростом угла θ_0 (рис. 8.5, а).

У лучей в рассматриваемой среде существует еще одно интересное свойство, которое состоит в том, что они симметричны относительно вертикаль-

ной оси, проходящей через точку поворота. Действительно, представим себе горизонтальную линию $z = z_0$ (рис. 8.5, \tilde{a}), пересекающую луч в точках p_1 и p_2 . Поскольку эти точки находятся на одинаковой глубине, кривизна луча (8.58) в них также одинакова. Помимо этого, из (8.52) имеем

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2,$$

где θ_1 и θ_2 – углы, соответственно, в точках p_1 и p_2 . Из последнего равенства следует, что

$$\theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Геометрия лучей и существование зон, где они взаимно пересекаются, существенно зависят от скорости увеличения функции $c(z)$ с глубиной.

Случай 3: скорость уменьшается с глубиной

Предположим, что с увеличением координаты z скорость падает, т.е.

$$dc/dz < 0.$$

Поведение лучей в этом случае показано на рис. 8.6, \tilde{a} . Все лучи, за исключением горизонтального луча $\theta_0 = \pi/2$, стремятся с увеличением глубины стать параллельными оси z . Снова представим себе горизонтальную линию $z = z_0$. Из рис. 8.52 следует, что

$$\sin \theta(z) = pc(z).$$

Следовательно, функция $\theta(z)$ асимптотически стремится к значению $\theta = 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Соотношение

$$\frac{\sin \theta(z_1)}{c(z_1)} = \frac{\sin \theta(z_2)}{c(z_2)} = p$$

показывает, что

$$\theta(z_2) < \theta(z_1) \text{ если } z_2 > z_1.$$

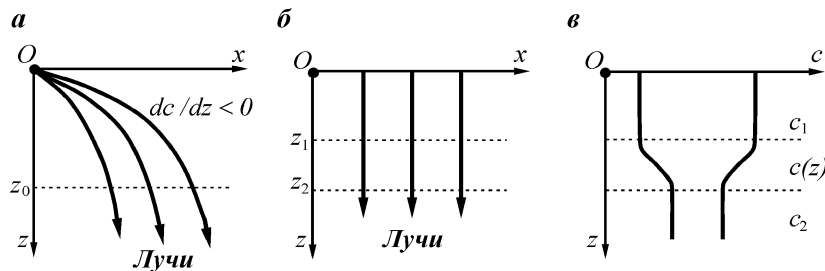


Рис. 8.6. Поведение лучей при $dc/dz < 0$ (а); нормальное падение плоских волн (\tilde{a}); зависимость скорости от глубины (\tilde{a})

так как $c(z_2) < c(z_1)$. Последнее неравенство для угла θ подтверждает, что $\theta = 0$ является асимптотическим значением.

Случай 4: нормальное падение плоских волн

Рассмотрим вместо точечного источника распространяющуюся вертикально плоскую волну, падающую на плоскость $z = 0$. В этом случае соответствующие лучи характеризуются углом $\theta_0 = 0$ и поэтому, независимо от поведения функции $c(z)$, плоская волна распространяется в одном и том же направлении вдоль прямых вертикальных лучей (рис. 8.6, а). Этот вывод следует непосредственно из принципа Гюйгенса или из закона Снеллиуса:

или $\theta = 0$.

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} = 0.$$

Однако в общем случае, когда скорость c зависит не только от вертикальной координаты z , фронт волны перестает быть плоским, его форма изменяется и, помимо этого, лучи могут пересекаться.

Случай 5: модель с переходной зоной ($c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$)

Рассмотрим более сложную модель среды, в которой существуют две области с различными скоростями (постоянными в пределах своей области). Пусть, кроме этого, в указанной среде существует переходный слой, где скорость меняется монотонно (рис. 8.6, б). Предположим также, что источник находится в начале координат в верхней среде, а функция $c(z)$ всюду непрерывна. Вначале рассмотрим случай, когда скорость в переходном слое относительно быстро возрастает, т.е. $c_2 > c_1$ и $dc/dz > 0$.

Очевидно, что луч с параметром $p = 0$ ($\theta_0 = 0$) – это прямая, направленная вдоль оси z . Однако для других лучей наблюдается совершенно другая картина. Поскольку в пределах переходного слоя производная dc/dz положительна, угол падения θ увеличивается с ростом z . Если параметр луча p относительно мал, его угол падения $\theta(z)$ не достигает значения $\pi/2$ даже на нижней границе слоя. Лучи этой первой группы проходят через слой и появляются в среде, имеющей скорость c_2 . Таким образом, рассматриваемые лучи состоят из трех частей: прямых линий поверх и ниже переходного слоя и искривленного участка внутри него (рис. 8.7, а).

Из формулы (8.53) следует, что

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}, \quad (8.59)$$

где θ_1 и θ_2 – углы падения в верхней и нижней части среды. Как будет показано в дальнейшем, это соотношение описывает закон Снеллиуса для преломленного луча на границе сред с различными скоростями.

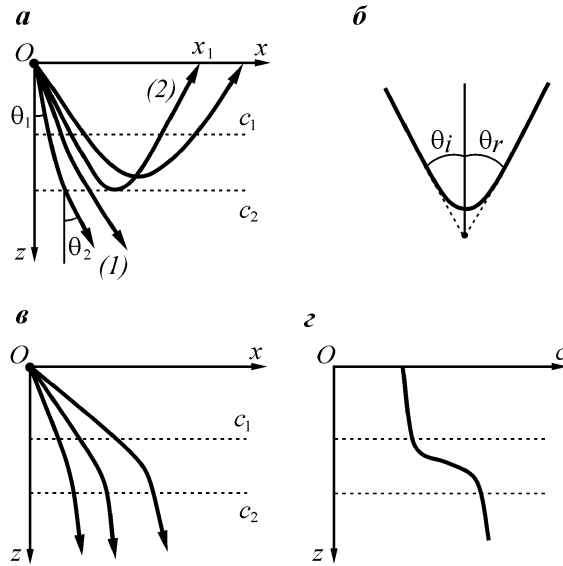


Рис. 8.7. Различные группы лучей (а); симметрия луча относительно точки поворота (б); поведение лучей (в); зависимость скорости от координаты z (г)

Пусть луч, приходящий в точку поворота на нижней границе слоя, характеризуется углом θ_0^c . Тогда в этой точке

$$\sin \theta_0^c = c_1 / c_2 \quad (8.60)$$

и луч возвращается в верхнюю среду. Дальнейшее увеличение угла падения ($\theta_0 > \theta_0^c$) приводит к уменьшению координаты z точки поворота, 0 асимптотически она достигает верхней границы промежуточного слоя. Соответственно, вторая группа лучей возвращается в верхнюю среду, где они становятся прямыми линиями (см. рис. 8.7, в). Очевидно, что траектории лучей симметричны относительно этой точки (рис. 8.7, б). Мы снова имеем

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \text{ или } \theta_2 = \pi - \theta_1. \quad (8.61)$$

Это равенство, аналогичное (8.59), также представляет собой закон Снеллиуса. В дальнейшем мы получим это соотношение из граничных условий.

Рассмотрим далее, как ведут себя лучи вдоль оси x . Лучи отсутствуют на следующем интервале (см. рис. 8.7, г):

$$0 \leq x < x_1, \quad (8.62)$$

Угол θ_0^c под которым луч, пересекает прямую $z = 0$ в точке x_1 , определяется из соотношения (8.59). Угол θ_0^c иногда называют критическим углом. При

больших значениях x наблюдаются лучи, которые приходят под углом θ_0 , равным углу падения.

Таким образом, критический угол θ_0^c позволяет разделить все семейство лучей на две группы: 1) лучи, которые проникают в нижнюю среду, и 2) лучи, которые имеют точку поворота в промежуточном слое.

Очевидно, что в противоположном случае, когда скорость $c(z)$ монотонно уменьшается в сторону нижней среды и $c_2 < c_1$, точки поворота отсутствуют (рис. 8.7, \hat{a}). Соответственно угол преломления θ_2 в нижней среде меньше угла θ_0 в верхней области и согласно закону Снеллиуса мы имеем

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_0 < \sin \theta_0.$$

Случай б: модель с переходной зоной ($dc_1/dz > 0$ и $dc_2/dz > 0$)

Предположим что в верхней и нижней части среды скорость ведет себя почти линейно, но в промежуточной зоне производная dc_1/dz изменяется в большей степени (рис. 8.7, \hat{a}). Как и в предыдущих случаях, будем полагать, что источник находится в начале координат. В такой среде удобно различать три группы лучей, показанных на рис. 8.8, a . Точка поворота первой группы лучей располагается выше промежуточного слоя, а ее координата x постепенно увеличивается с увеличением угла θ_0 . Пусть луч, точка поворота

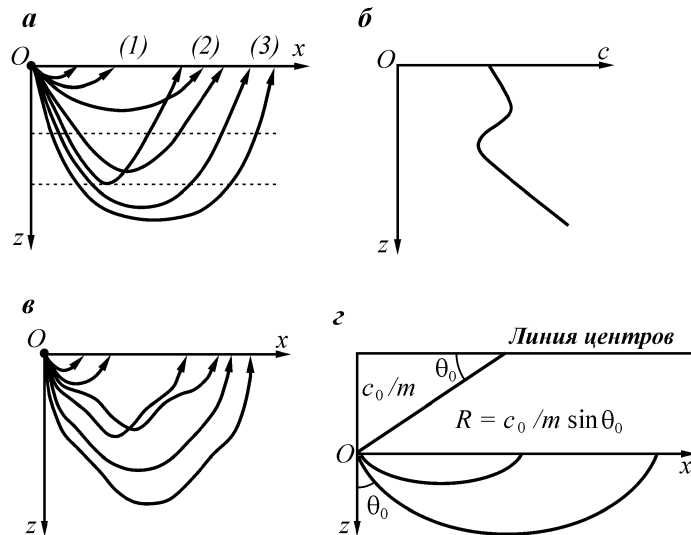


Рис. 8.8. Поведение лучей (а, \hat{a}); зависимость скорости от координаты z (\hat{a}); поведение лучей в среде с постоянным градиентом скорости (\hat{a})

которого расположена на нижней границе верхней области, характеризуется углом θ_0^* . Очевидно, что угол падения θ_0 первой группы подчиняется следующему условию:

$$\theta_0 \geq \theta_0^*.$$

Помимо этого, существует диапазон углов $\theta_0 < \theta_0^*$, для которого точка поворота лучей лежит внутри промежуточного слоя. Это происходит из-за того, что внутри слоя скорость меняется достаточно сильно. Такие лучи, образующие вторую группу, пересекаются с некоторыми из лучей первой группы в верхней среде. Лучи с относительно малыми значениями θ_0 образуют третью группу с точкой поворота, расположенной ниже промежуточного слоя.

Случай 7: низкоскоростная зона

Предположим, что при малых z скорость постепенно увеличивается с глубиной. Тогда существует диапазон глубин, где

$$\partial c / \partial z < 0.$$

После этого интервала скорость начинает увеличиваться даже быстрее, чем в верхней части среды (рис. 8.8, а).

Лучи с достаточно большими значениями θ_0 образуют первую группу. Как и в предыдущем случае, они расположены в верхней области, где скорость увеличивается с глубиной. Координата x точки поворота таких лучей обычно возрастает с увеличением θ_0 . Вторая группа лучей характеризуется меньшими значениями θ_0 . Когда какой-нибудь луч из этой группы достигает зоны, в которой скорость уменьшается, его угол преломления становится меньше и луч разворачивается вниз. Поэтому можно наблюдать сразу два явления: зону тени, в которой лучи отсутствуют, и пересечение лучей (рис. 8.8, а). Наконец, третья группа состоит из лучей с относительно небольшими значениями θ_0 , точки поворота которых находятся довольно глубоко.

УРАВНЕНИЕ ЛУЧА В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

После того, как мы качественно рассмотрели поведение лучей в различных средах, целесообразно привести описание траектории луча в параметрической форме:

$$x = x(z) \text{ и } t = t(z), \quad (8.63)$$

где x – горизонтальная координата точки на луче; t время пробега от источника, расположенного в начале координат.

Из соотношений (8.51) имеем

$$dx = \sin \theta \, ds, \, dz = \cos \theta \, ds.$$

Следовательно,

$$x = \int_0^s \sin \theta \, ds \text{ или } x = \int_0^z \tan \theta \, dz. \quad (8.64)$$

По определению,

$$t = \int_0^s \frac{ds}{c} \text{ или } t = \int_0^z \frac{dz}{c \cos \theta}. \quad (8.65)$$

С учетом того, что

$$\frac{\sin \theta}{c} = p \text{ и } \cos \theta = \sqrt{1 - p^2 c^2}$$

расстояние x и время t выражаются через скорость и параметр луча p как

$$x(z, p) = p \int_0^z \frac{c(z) dz}{\sqrt{1 - p^2 c^2(z)}}$$

и

$$t(z, p) = \int_0^z \frac{dz}{c(z) \sqrt{1 - p^2 c^2(z)}}. \quad (8.66)$$

Всюду далее мы будем предполагать, что у луча есть точка поворота и, следовательно, он возвращается к плоскости $z = 0$.

Учитывая симметрию лучей и принимая во внимание выражения (8.66), для точки на этой плоскости имеем

$$x(p) = 2p \int_0^{z_{\max}} \frac{cdz}{\sqrt{1 - p^2 c^2}} \quad (8.67)$$

и

$$t(p) = 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{c(z) \sqrt{1 - p^2 c^2}},$$

где z_{\max} обозначает координату z точки поворота, т.е. максимальную глубину проникновения луча.

Следует заметить, что параметр луча p можно представить как минимум двумя различными способами:

$$p = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \text{ и } p = \frac{1}{c(z_{\max})}. \quad (8.68)$$

Здесь $c(z_{\max})$ – скорость в точке поворота; ее значение является максимальным вдоль луча.

ЛИНЕЙНОЕ ВОЗРАСТАНИЕ СКОРОСТИ С ГЛУБИНОЙ

Чтобы показать, как используются параметрические уравнения луча, рассмотрим очень простой случай, когда скорость линейно возрастает с глубиной (рис. 8.8, а):

$$c(z) = c_0 + mz. \quad (8.69)$$

Очевидно, что для произвольной функции $c(z)$ всегда можно выбрать такие интервалы, где скорость меняется от z почти линейно.

Прежде всего, из равенства (8.56) следует, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = p \frac{\partial c}{\partial z} = mp. \quad (8.70)$$

Таким образом, кривизна каждого луча постоянна и это означает, что траектория луча является дугой некоторой окружности. По определению, радиус кривизны дуги

$$R = \frac{1}{\partial \theta / \partial s} = \frac{1}{pm} = \frac{c_0}{m \sin \theta_0}, \quad (8.71)$$

т.е. радиус кривизны обратно пропорционален синусу угла выхода θ_0 .

Из рис. 8.8, а видно, что центры таких окружностей лежат на прямой, расположенной на расстоянии c_0/m от плоскости $z = 0$. Напомним, что мы рассматриваем случай, когда градиент скорости всюду является постоянным. Если же на некотором интервале z производная ds/dz имеет другое значение, то центры соответствующих дуг окружностей будут лежать на другой прямой. В частности, когда указанная производная становится отрицательной, т.е. скорость на некотором интервале глубин уменьшается, линия центров располагается под лучами.

Поскольку скорость линейно зависит от координаты z , легко получить параметрические уравнения луча в явном виде. Действительно, из закона Снеллиуса следует, что

$$\sin \theta = pc(z)$$

Дифференцируя это выражение по z , получим

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dz} = p \frac{dc}{dz} = pc'$$

или

$$dz = \frac{d\theta}{pc'} \cos \theta.$$

Подстановка последнего соотношения в формулу (8.64) дает

$$x(z) = \frac{1}{p} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{c'(z)} d\theta \quad (8.72)$$

Аналогично этому

$$t(z) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{pc'c'} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{c' \sin \theta} . \quad (8.73)$$

Поскольку

$$c' = m,$$

выражения (8.72) – (8.73) переписываются как

$$x = \frac{1}{\rho m} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = \frac{c_0}{m} \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\sin \theta_0} \quad (8.74)$$

и

$$t = \frac{1}{m} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{m} \ln \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \theta_0 / 2} .$$

В частности, если $\theta = \pi/2$ (точка поворота), то

$$x = \frac{c_0}{m} \cot \theta_0 \text{ и } t = \frac{1}{m} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} .$$

Значения x и t в плоскости $z = 0$ определяются выражениями

$$x = \frac{2c_0}{m} \cot \theta_0 \text{ и } t = \frac{2}{m} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} . \quad (8.75)$$

Эти соотношения связывают между собой значения угла выхода θ_0 , с одной стороны, и координату x на прямой $z = 0$ и время прихода t , с другой.

Покажем как в этом случае можно найти величины θ_0 , m и z_{\max} . Если известны x и t , то угол выхода θ_0 определяется из выражений (8.75):

$$\frac{x}{t} = c_0 \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2}}$$

при условии, что скорость c_0 задана. После этого величина m вычисляется с помощью любого из соотношений (8.75) и скорость становится, таким образом, известной для произвольной глубины.

Поскольку параметр луча, проходящего в точку с координатами x и $z = 0$ определяется как

$$p = \frac{\sin \theta_0}{c_0} ,$$

мы можем определить скорость в точке поворота:

$$c(z_{\max}) = 1/p$$

Затем, используя формулу (8.69), можно определить максимальную глубину проникновения луча.

ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Рассмотрим как ведет себя интенсивность потока энергии, переносимой вдоль луча. Так как что источник расположен в начале координат и

$$\text{grad } c = \frac{dc}{dz} \mathbf{k}$$

распределение интенсивности, а также сами лучи обладают осевой симметрией относительно оси z . Как известно, луч указывает направление вектора Пойнтинга. В соответствии с этим удобно представить себе образованную лучами систему элементарных трубок. Как отмечалось ранее, количество энергии, проходящей через поперечные сечения каждой из таких трубок, остается постоянным, поскольку поток энергии через боковые поверхности трубки отсутствует. Следовательно, величина вектора Пойнтинга обратно пропорциональна площади сечения элементарной трубки. Вблизи источника поток энергии имеет радиальное направление. Предположим, что излучение источника составляет N единиц в секунду в конусе, телесный угол которого равен единице. Рассмотрим элементарную трубку, образованную вокруг луча с углом выхода θ_0 (рис. 8.9, а). Телесный угол ω и угол выхода θ_0 связаны между собой соотношением

$$\omega = 2\pi(1 - \cos \theta_0).$$

Выполняя операцию дифференцирования, получим

$$d\omega = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0.$$

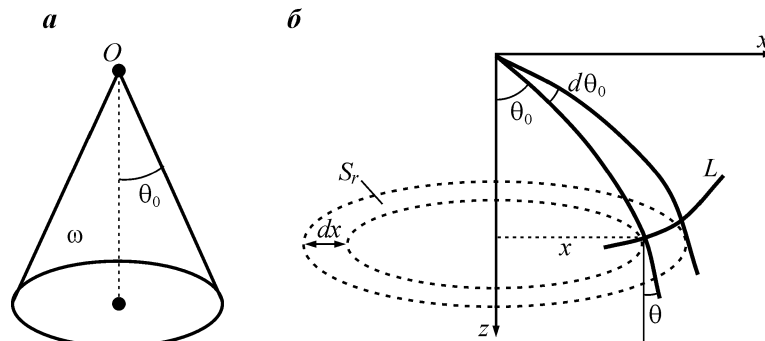


Рис. 8.9. Интенсивность потока энергии

Площадь сегмента кольца шириной dx , расположенного в горизонтальной плоскости (рис. 8.9, а) равняется

$$dS_r = 2\pi x dx.$$

Следовательно, площадь сечения трубки, расположенной на фазовой поверхности L ,

$$dS = dS_r \cos \theta = 2\pi x dx \cos \theta.$$

Таким образом, интенсивность потока энергии в точке с углом θ определяется как

$$I = \frac{N d\omega}{dS} = \frac{\sin \theta_0 d\theta_0}{x \cos \theta dx} N.$$

Горизонтальное расстояние x от оси Z до произвольной точки на луче можно рассматривать как функцию θ_0 и Z . Таким образом, для каждой заданной глубины $Z = \text{const}$ имеем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \theta_0} d\theta_0.$$

В действительности, для каждой плоскости $Z = \text{const}$ можно записать

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{dx}{d\theta}.$$

Поэтому интенсивность I можно записать как

$$I = \frac{N \sin \theta_0}{x \frac{\partial x}{\partial \theta} \cos \theta}. \quad (8.76)$$

Последнее выражение заметно упрощается для случая, когда скорость линейно возрастает с глубиной. Вычислим сначала производную $\partial x / \partial \theta_0$. Из формулы (8.74) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta_0} &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \left[\sin \theta_0 \left(-\sin \theta_0 + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right) - (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cos \theta_0 \right] = \\ &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \left[-1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right]. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Дифференцирование равенства

$$\frac{\sin \theta_0}{c_0} = \frac{\sin \theta}{c}$$

даст

$$\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = \frac{c}{c_0} \cos \theta_0$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}.$$

Подстановка этого соотношения в формулу (8.77) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta_0} &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \left[-1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \frac{\sin \theta \cos \theta_0}{\sin \theta_0 \cos \theta} \right] = \\ &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\cos \theta} = \frac{x}{\cos \theta \sin \theta_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо выражения (8.76) мы получаем

$$I = N \frac{\sin^2 \theta_0}{x^2}. \quad (8.78)$$

Интенсивность уменьшается пропорционально квадрату горизонтального расстояния x . В частности, давление и скорость частиц обратно пропорциональны расстоянию x .

ГОДОГРАФЫ

Приступим теперь к обсуждению другой темы. Предположим, что вдоль оси x измеряется время прихода волны, т.е. известна функция

$$t = t(x) \quad (8.79)$$

Эта функция называется годографом волны, и наша цель состоит в том, чтобы изучить некоторые ее свойства. Очевидно, что если скорость почти линейно растет с глубиной, время прихода также монотонно увеличивается с расстоянием x (рис. 8.10, а). Легко определить наклон годографа. По определению, за интервал времени dt фазовая поверхность L перемещается вдоль луча на расстояние $c_0 dt$. В то же время, смещение dx в направлении x равняется

$$dx = c_a dt, \quad (8.80)$$

где c_a – кажущаяся скорость волны вдоль оси x .

Следовательно, наклон кривой $t = t(x)$ обратно пропорционален c_a :

$$dt/dx = 1/c_a. \quad (8.81)$$

Из рис. 8.10, а видно, что

$$c_0 dt = c_a dt \sin \theta_0$$

или

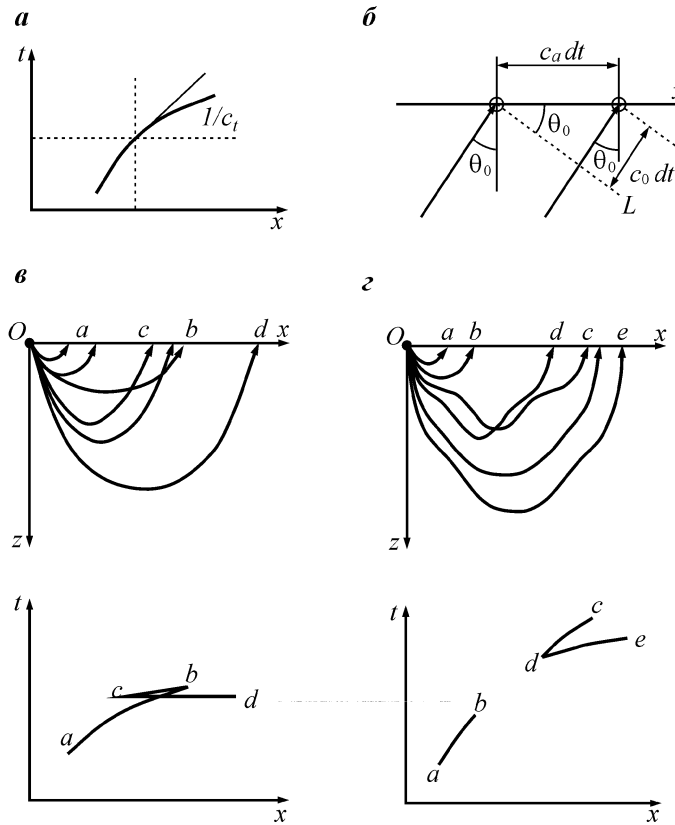


Рис. 8.10. Наклон годографа (а); иллюстрация формулы (8.82) (б); устройство годографа (в); поведение лучей в зоне тени (г)

$$c_a = c_0 / \sin \theta_0, \quad (8.82)$$

поскольку угол падения θ в точках, принадлежащих оси x , совпадает с углом выхода θ_0 .

Согласно (8.68) кажущаяся скорость равняется скорости в точке поворота луча, т.е.

$$c_a = c_l$$

или

$$dt/dx = 1/c_l. \quad (8.83)$$

Поскольку скорость увеличивается с глубиной, наклон годографа с ростом x уменьшается. Следует отметить, что равенство (8.83) позволяет оценить скорость на различных глубинах, которые, однако, остаются неизвестными.

Другими словами, мы не знаем координаты z точки, в которой вычисляем значение скорости.

Предположим, что в среде имеется промежуточная зона, в которой скорость возрастает относительно быстро. Как было показано ранее, в этом случае естественно рассмотреть три группы лучей, различающихся своим поведением. Годографы в этом случае имеют более сложную форму и подразделяются на три ветви (рис. 8.10, \hat{a}). Одна из них, ab , соответствует лучам, расположенным в верхней среде. Координата x точки поворота этих лучей увеличивается с ростом угла θ_0 . Поэтому при увеличении x наклон кривой ab становится меньше. Это нормальная ветвь годографа, которая наблюдалась и в первом примере. Похожее поведение наблюдается у второй ветви, cd , характеризующей лучевые траектории, расположенные в нижней части среды. И, наконец, третья ветвь, cb , относится к лучам, точка поворота которых находится в промежуточной зоне, где скорость быстро возрастает с глубиной. Поэтому точки поворота лучей с относительно небольшими углами выхода θ_0 , расположены ближе к оси z . Соответственно наклон ветви cb увеличивается с ростом x . Таким образом, в этом случае мы наблюдаем утолщение годографа.

Очевидно, что на интервале

$$0 < x < a$$

только лучи первой группы пересекают ось x . В каждую точку интервала

$$c < x < b$$

приходят лучи всех трех групп, хотя это и происходит, в общем случае, при различных временах t .

Наконец, если

$$b < x < d,$$

то ось x пересекают только лучи, имеющие точку поворота в нижней среде.

Ранее мы показали, что если скорость увеличивается с глубиной в нижней и верхней части среды, а в промежуточной зоне уменьшается, то возникает зона тени. В этом случае годограф имеет разрыв, и, кроме того, возникает две новых ветви годографа (рис. 8.10, \hat{a}).

Интервал кривой ab вызван обычной лучевой картиной, наблюдаемой в верхней части среды. Интервал bd является зоной тени. Его появление связано с уменьшением скорости в промежуточной зоне. Часть кривой de также демонстрирует нормальную лучевую картину, для которой наклон кривой уменьшается при увеличении расстояния x . Эта часть годографа описывает лучи проходящие через более глубокие части среды. Помимо этого, имеется ветвь dc с другим наклоном, определяющимся наличием промежуточной зоны. Таким образом, мы видим, что в общем случае функция $t(x)$ является многозначной.

Как уже отмечалось, наклон годографа позволяет определить значения

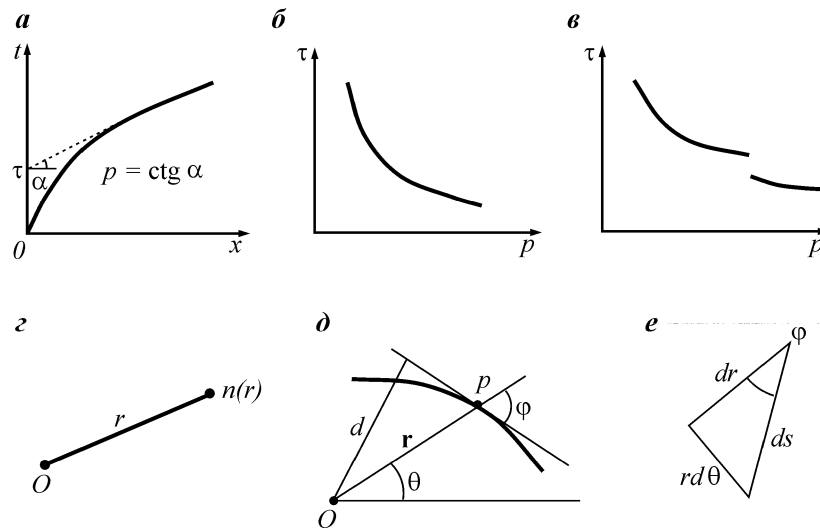


Рис. 8.11. Определение функции τ (а); τ как функция p , когда $ds/dz > 0$ (б); функция τ (p) в присутствии внутреннего низкоскоростного слоя (в); радиальное распределение скорости (г); иллюстрация формулы Буге (д); иллюстрация соотношения (8.89) (е)

скорости, а также параметр p луча, пришедшего в точку с координатой x . Наряду с этим существует функция $\tau(p)$:

$$\tau(p) = t - xp = \int_0^z \frac{\sqrt{1 - p^2 c^2(z)}}{c(z)} dz,$$

показанная на рис. 8.11, б, в. Эта функция иногда используется для определения скорости $c(z)$.

8.3. ПОВЕДЕНИЕ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ, ГДЕ СКОРОСТЬ ЗАВИСИТ ОТ ОДНОЙ КООРДИНАТЫ R

Рассмотрим теперь пример, который интересен с точки зрения глобальной сейсмологии. Предположим, что параметр n зависит только от расстояния r от начала координат (рис. 8.11, в), т.е. в сферической системе координат

$$n = n(r). \quad (8.84)$$

Покажем, прежде всего, что все лучи лежат в одной плоскости. Введем для этого вектор

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times n \mathbf{s}_0,$$

перпендикулярный плоскости, в которой расположены векторы \mathbf{r} и \mathbf{s}_0 .

Производная вектора \mathbf{M} по координате s вдоль луча определяется как

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times n\mathbf{s}_0 + \mathbf{r} \times \frac{d}{ds}(n\mathbf{s}_0). \quad (8.85)$$

Из формулы (8.15) следует, что

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times n\mathbf{s}_0 + \mathbf{r} \times \text{grad}n.$$

Поскольку

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}_0 \text{ и } \text{grad}n = \frac{\partial n}{\partial r} \mathbf{r}_0$$

оба слагаемых в правой части (8.85) исчезают и, следовательно,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0) = 0,$$

т.е.

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0 = \text{const}. \quad (8.86)$$

Последнее равенство показывает, что вектор \mathbf{M} остается постоянным вдоль луча, т.е. каждый луч остается в одной и той же плоскости, независимо от положения источника относительно начала координат.

У лучей в рассматриваемой среде имеется еще одно интересное свойство. Согласно (8.86),

$$nr \sin \varphi = \text{const}, \quad (8.87)$$

где φ – угол между радиус-вектором \mathbf{r} и направлением единичного вектора \mathbf{s}_0 (рис. 8.11, а).

Это равенство можно записать как

$$nd = \text{const} \quad (8.88)$$

Последнее соотношение называется формулой Буге. Здесь d – расстояние от начала координат до касательной к произвольной точке p на луче. Этот результат показывает, что форма любого луча такова, что акустическое расстояние между началом координат и касательной к лучу остается постоянным. Поскольку луч лежит в плоскости, положение его точек естественно описывать двумя координатами, r и φ (рис. 8.11б). Выразим угол φ через эти координаты. Из рис. 8.11, а видно, что

$$ds^2 = (r d\theta)^2 + (dr)^2$$

и

$$\sin \varphi = \frac{r d\theta}{ds}.$$

Таким образом,

$$\sin \varphi = \frac{r d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) + (dr^2/d\theta)^2}}. \quad (8.89)$$

Из формулы (8.87) следует, что

$$\frac{nr^2}{\sqrt{r^2(\theta) + (dr^2/d\theta)^2}} = C$$

или

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{C}{r} \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}, \quad (8.90)$$

где C – некоторая константа.

Интегрируя последнее выражение, мы приходим к уравнению луча в среде, где $n = n(r)$:

$$\theta = C \int \frac{1}{r \sqrt{n^2 r^2 - C^2}} \quad (8.91)$$

Каждый луч характеризуется некоторой константой C , и очевидно, что

$$nr > C$$

Предположим, что источник и точка наблюдения расположены на сфере радиуса R_0 , а начало координат совпадает с центром этой сферы. Тогда наблюдаемое время пробега волны определяется из уравнений, аналогичных уравнению (8.67):

$$t = 2 \int_{R_{\min}}^{R_0} \frac{(R/c)^2}{\sqrt{(R^2/c) - p^2}} \frac{dR}{R}$$

и

$$\Delta = 2p \int_{R_{\min}}^{R_0} \frac{dR}{R \sqrt{(R^2/c) - p^2}},$$

где

$$p = \frac{R \sin i(R)}{c(R)}$$

является параметром луча; i – угол между траекторией луча и радиальным направлением из начала координат, R_{\min} – радиальное расстояние до самой глубокой точки луча, и, наконец, Δ – угловое расстояние между источником и точкой наблюдения.

8.4. ЛУЧИ ВБЛИЗИ ВНУТРЕННИХ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА СРЕДЫ

Мы описали распространение лучей в средах, которые характеризовались непрерывными функциями скорости $c(z)$ и $c(r)$. В данном разделе мы обсудим, как проводить лучи, если среда состоит из однородных областей, разделенных внутренней границей, на которой скорость c терпит разрыв (рис. 8.12, а). Очевидно, что на такой границе уравнение эйконала не выполняется, поскольку в нем требуется, чтобы скорость c была непрерывной функцией. Следовательно, чтобы преодолеть эту трудность, необходимо использовать какие-то другие подходы.

В реальной ситуации между однородными частями среды могут существовать тонкие переходные зоны, в которых скорость быстро возрастает (рис. 8.12, б), оставаясь всюду непрерывной. Ранее было показано, что внутри таких зон падающий луч (1) может либо возвращаться в верхнюю среду (в этом случае у луча есть точка поворота), либо проникать в нижнюю среду (2), изменяя при этом свое направление (рис. 8.12, б). Из уравнения эйконала следует, что луч не может вести себя сразу двумя указанными способами в одной и той же точке. Этот вывод следует из предположения о том, что длина волны λ в пределах переходной зоны значительно меньше ее толщины h , т.е. $\lambda \ll h$, и, следовательно, вариации скорости на расстояниях порядка λ малы. Однако в сейсмологии используются волны такого частотного спектра, для которого длина волны обычно превышает h на несколько порядков:

$$\lambda \gg h.$$

В этом случае тонкий переходный слой ведет себя как поверхность разрыва скорости (рис. 8.12, в). В главе 3 мы рассмотрели распространение волны вдоль неоднородной пружины, когда скорость частиц была перпендикулярна границе. Было показано, что источники, возникающие на такой внутренней границе, приводят к появлению отраженных и проходящих волн. Мы будем использовать этот основополагающий факт в более общем случае, когда падающий луч произвольно ориентирован относительно поверхности S (рис. 8.12, в).

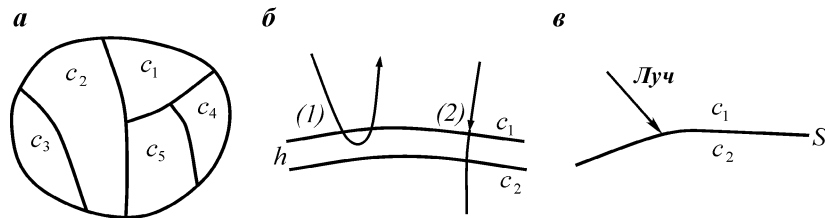


Рис. 8.12. Кусочно-однородная среда (а); поведение луча в присутствии тонкого слоя (б); граница раздела между средами с различными скоростями (в)

Поскольку среда выше и ниже поверхности S однородна, лучи являются прямыми, и наша цель состоит в том, чтобы определить направление отраженного и преломленного луча вблизи этой поверхности. Учитывая важность этой проблемы, мы используем несколько различных методов ее решения, но вначале предположим, что поверхность S является плоской.

ОТРАЖЕННЫЕ ЛУЧИ И ПРИНЦИП ФЕРМА

При изучении отражения лучей мы будем исходить из принципа Ферма, хотя этот принцип и следует из интеграла Лагранжа, который, в свою очередь, был получен из уравнения эйконала. Как известно, принцип Ферма гласит, что акустическая длина

$$N = \int_{p_1}^{p_2} n ds \quad (8.92)$$

между двумя точками p_1 и p_2 , расположенными на луче, минимальна, если путь интегрирования в (8.92) совпадает с самим лучом, а окрестность луча является регулярной.

Рассмотрим сначала отражение лучей от плоской поверхности (рис. 8.13, а). Предположим, что источник сферической волны находится в точке p_1 , а p_2 – точка наблюдения. Поскольку мы имеем дело с лучами, проходящими через одну и ту же среду ($n = \text{const}$), принцип Ферма в данном случае означает, что луч, соединяющий точки p_1 и p_2 , имеет минимальную длину. Конечно, луч d волны, распространяющейся от источника непосредственно к точке p_2 , удовлетворяет этому принципу, поскольку его длина минимальна (рис. 8.13, а). Однако наша цель состоит в том, чтобы определить луч, который приходит в точку p_2 , предварительно отразившись от поверхности S . Для такого луча можно нарисовать бесконечное число траекторий $p_1 g_n p_2$, где точки g_n принадлежат плоскости S (некоторые из таких точек показаны на рис. 8.13, а).

Согласно принципу Ферма, действительным лучом является та траектория из указанного множества, которая имеет минимальную длину. Чтобы найти этот луч, введем дополнительную точку p_2^* , являющуюся зеркальным отражением точки p_2^* относительно плоскости S , и вычислим длину траекторий

$$p_1 g_1 p_2^*, p_1 O p_2^* \text{ и } p_2 g_2 p_2^*, \quad (8.93)$$

показанных на рис. 8.13, а. Точка O специально выбрана на границе таким образом, чтобы траектория $p_1 O p_2^*$ представляла собой прямую линию. По определению имеем

$$p_2 a = p_2^* a$$

и, следовательно,

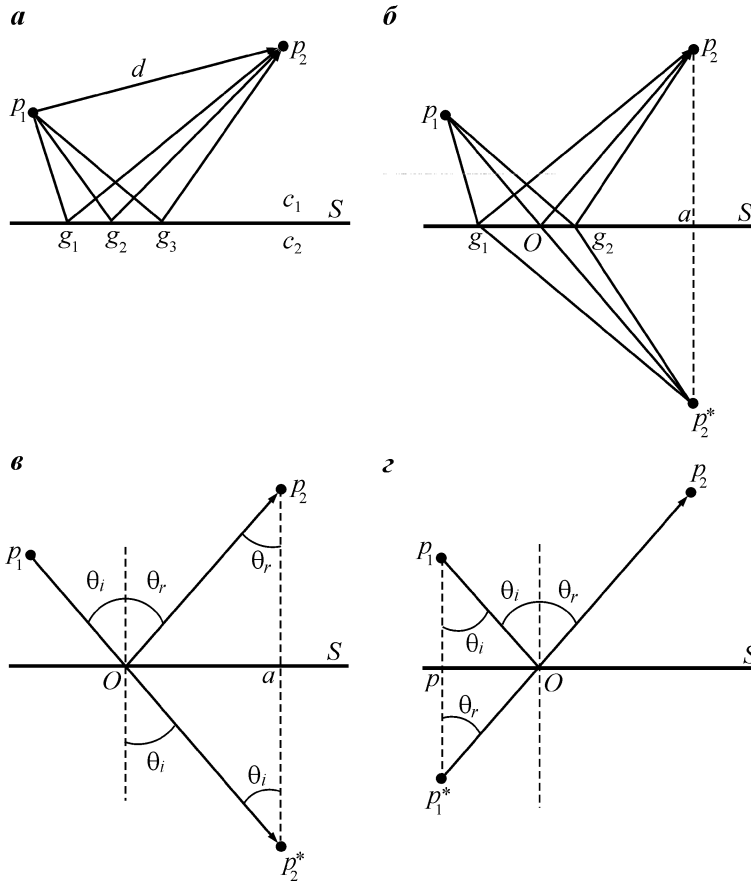


Рис. 8.13. Прямые и отраженные лучи (а); иллюстрация формулы (8.94) (б); закон отражения Снеллиуса (в); фиктивный источник отраженного луча (г)

$$r_1 g_1 p_2^* = r_1 g_1 p_2, \quad r_1 O p_2^* = r_1 O p_2, \quad r_1 g_2 p_2^* = r_1 g_2 p_2. \quad (8.94)$$

Это означает, что вместо траекторий $r_1 g_n p_2$ мы можем оценивать длину линий $r_1 g_n p_2^*$. Известно, что каждая из сторон треугольника меньше суммы двух других. Например, рассматривая треугольник $r_1 O p_2^* g_2 p_1$, приходим к выводу, что

$$r_1 O p_2^* < p_2^* g_2 + g_2 p_1.$$

Таким образом, из равенств (8.94) следует, что

$$r_1 g_n p_2 > r_1 O p_2^* = r_1 O p_2,$$

т.е. путь $p_1 O p_2^*$ является кратчайшим и, следовательно, он описывает луч, падающий на плоскость, отражающийся от нее и затем приходящий в точку наблюдения p_2 . Как это видно из рис. 8.13, а, точку отражения определить довольно просто. Для этого опустим перпендикуляр из точки наблюдения на границу раздела и отметим положение зеркального образа этой точки p_2^* . Затем положение точки O задается как пересечение прямой $p_1 p_2^*$ с плоскостью S . В наших построениях мы предполагаем, что падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости, и их взаимное расположение изображено на рис. 8.13, а. Введем теперь два угла θ_i и θ_r , которые составляют падающий и отраженный лучи с нормалью к границе раздела двух сред. Очевидно, что

$$O a = O p_2 \sin \theta_r = O p_2^* \sin \theta_i.$$

Поскольку

$$O p_2 = O p_2^*,$$

мы получаем

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad \text{или} \quad \theta_i = \theta_r. \quad (8.95)$$

Последнее соотношение описывает закон отражения Снеллиуса. Согласно этому закону, падающий и отраженный лучи составляют с нормалью к границе раздела один и тот же угол.

В частности, когда падающая волна распространяется вдоль нормали к плоскости S , падающий и отраженный лучи имеют противоположные направления: $\theta_i = \theta_r = 0$. С увеличением угла θ_i угол отражения θ_r становится больше и, в конце концов, достигает значения $\pi/2$.

Отражение волны происходит в каждой точке границы, и чтобы определить положение отраженного луча, удобно рассмотреть зеркальное отражение источника: p_1^* (рис. 8.13, б). Проводя прямую $p_1^* p_2$, мы получим отраженный луч $O p_2$. Действительно, как видно из рис. 8.13, б, для углов выполняются следующие равенства:

$$\angle p p_1 O = \theta_i, \quad \angle p p_1^* O = \theta_r$$

и

$$p O = p p_1 \tan \theta_i = p p_1^* \tan \theta_r.$$

Поскольку

$$p p_1 = p p_1^*,$$

заключаем, что выполняется закон отражения Снеллиуса:

$$\theta_i = \theta_r.$$

Учитывая, что траектория $p_1^*Op_2$ является прямой, а расстояния p_1Op_2 и $p_1^*Op_2$ равны друг другу, мы можем мысленно расположить источник в точке p_1^* и интерпретировать эту точку как фиктивный источник отраженной волны (рис. 8.14а). Следовательно, фронт отраженной волны представляет собой часть сферической поверхности с центром в точке p_1^* .

Радиус этой сферы равняется

$$p_1^*p_2 = c_1t, \quad (8.96)$$

где t – время распространения волны от источника к точке наблюдения вдоль луча p_1Op_2 , а само выражение (8.96) является уравнением волновой поверхности. Очевидно, что в силу осевой симметрии пересечением этой поверхности с плоскостью S является окружность радиуса pg (рис. 8.14, а).

Таким образом, в верхней среде имеется две сферические волны, а именно, прямая волна с источником в точке p_1 и отраженная волна. Фазовые поверхности последней имеют общий центр в точке p_1^* , как если бы источник волны находился в этой точке. Конечно, обе волны распространяются с одинаковой скоростью c_1 . Поскольку всюду выше границы

$$p_1p_2 < p_1^*p_2$$

фронт прямой волны в любой момент времени расположен на большем расстоянии от источника, чем фронт отраженной волны. Однако в точках, принадлежащих плоскости S (рис. 8.14, а),

$$p_1g = p_1^*g$$

и, следовательно, в каждый момент времени оба фронта имеют общую точку g , положение которой меняется во времени.

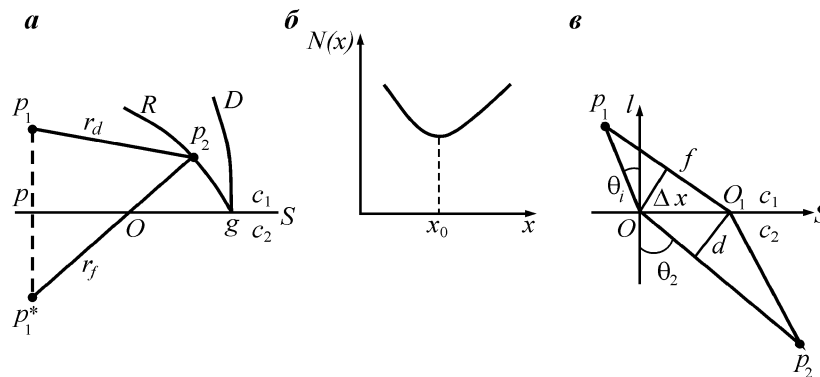


Рис. 8.14. Прямой и отраженный лучи (а); поведение функции $N(x)$ (б); иллюстрация формул (8.100) и (8.101) (в)

Для иллюстрации сказанного, предположим, что потенциал падающей волны является синусоидальной функцией времени:

$$U_i = \frac{A_r}{r_f} \sin \omega \left(t - \frac{r_d}{c_1} \right).$$

Тогда для отраженной волны имеем

$$U_r = \frac{A_r}{r_f} \sin \omega \left(t - \frac{r_f}{c_1} \right)$$

и фазы этих волн $\omega \frac{r_d}{c_1}$ и $\omega \frac{r_f}{c_1}$, определяемые длинами соответствующих лучей, в общем случае отличаются друг от друга.

Равенство углов (8.95) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_r}{c_1}, \quad (8.97)$$

что совпадает с законом Снеллиуса, выведенным из уравнения эйконала для случая, когда скорость c являлась непрерывной функцией в промежуточном слое (рис. 8.7, \tilde{a}). Однако это совпадение имеет место, если $c_2 > c_1$. Действительно, как было показано ранее, если внутри промежуточного слоя скорость падает ($c_2 < c_1$), то у луча отсутствует точка поворота. В отличие от этого, в случае границы раздела двух сред, на которой уравнение эйконала не действует, отраженная волна появляется, независимо от того, как соотносятся между собой скорости c_1 и c_2 .

ПРИНЦИП ФЕРМА И ПРЕЛОМЛЕННЫЕ ВОЛНЫ

В этом разделе мы опишем преломление лучей на плоской границе раздела двух сред. Как и в случае отражения, можно представить себе бесконечное множество различных путей, соединяющих точки p_1 и p_2 . Однако только один из них является преломленным лучом, вдоль которого акустическая энергия распространяется и, пересекая границу раздела, достигает точки наблюдения. Согласно принципу Ферма акустическая длина N луча, задаваемая выражением (8.92), является минимальной среди всех путей, соединяющих точки p_1 и p_2 . Соответственно, функция $N(x)$, где x – координата точки на границе, имеет минимум. Этот минимум определяет точку, в которой падающий луч пересекает границу и далее направляется к точке p_2 . Чтобы определить положение данного луча, рассмотрим поведение функции $N(x)$ в окрестности указанного минимума (т.е. стационарного решения $x = x_0$). По определению, первая производная в этой точке равна нулю:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0, \text{ если } x = x_0,$$

и, следовательно, ряд Тейлора в окрестности минимума имеет следующий вид (рис. 8.14, а):

$$N(x) \approx N(x_0) + \frac{\partial^2 N(x_0)}{\partial x^2} \frac{\Delta^2 x}{2} + \dots, \quad (8.98)$$

где расстояние $\Delta x = x - x_0$ очень мало.

Пренебрегая вторым и последующими членами ряда Тейлора, можно сказать, что малые вариации x не приводят к изменению длины траекторий вблизи луча:

$$N(x) = \text{const, если } x \approx x_0. \quad (8.99)$$

Учитывая этот факт, предположим, что путь $r_1 O r_2$ является лучом, и сравним его акустическую длину с длиной пути $r_1 O_1 r_2$, расположенного в окрестности луча. Очевидно, что

$$r_1 O_1 > r_1 O,$$

Чтобы определить разность между этими путями, нарисуем окружность радиуса $r_1 O$ с центром в точке r_1 . Тогда

$$f O_1 = r_1 O_1 - r_1 O.$$

Поскольку дуга $O f$ мала, ее можно заменить прямой линией, и в этом приближении мы получим треугольник $O f O_1$, показанный на рис. 8.14, а. Поскольку стороны $r_1 O$ и $O f$ перпендикулярны, соответственно $O f$ и $O O_1$, мы заключаем, что угол $O_1 O f$ равен углу падения θ_1 , и, следовательно, разность длин $f O_1$ дается выражением

$$f O_1 = \Delta x \sin \theta_1. \quad (8.100)$$

Аналогичным образом мы видим, что длина преломленного луча $O r_2$ больше длины пути $O_1 r_2$ на величину $O d$, равную

$$O d = \Delta x \sin \theta_2, \quad (8.101)$$

где θ_2 – угол между преломленным лучом и нормалью к границе раздела.

Сравнение путей $r_1 O r_2$ и $r_1 O_1 r_2$ показывает, что вариация Δx приводит к увеличению длины пути в первой среде и к уменьшению длины пути ниже границы. Поскольку полное изменение длины пути вблизи луча должно быть пренебрежимо малым, то, используя (8.100) – (8.101), мы получаем

$$n_1 f O_1 = n_2 O d$$

или

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (8.102)$$

где

$$n_1 = k_1/k_0, \quad n_2 = k_2/k_0.$$

В нашем случае

$$n_1 = 1 \text{ и } n_2 = k_2/k_1 = c_1/c_2$$

и уравнение (8.102) запишется как

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}. \quad (8.103)$$

Данное выражение описывает закон преломления Снеллиуса, который позволяет определить ориентацию преломленного луча.

Подход, использованный при выводе равенства (8.103) можно применить также для закона Снеллиуса в случае отражения. Рассматривая преломленные лучи, удобно различать следующие два случая:

1) $c_2 < c_1$ и 2) $c_2 > c_1$.

СЛУЧАЙ 1: $c_2 < c_1$

Из соотношения (8.103) следует, что

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 < \sin \theta_1 \quad (8.104)$$

и угол θ_2 между преломленным лучом и нормалью к границе раздела меньше угла падения θ_1 :

$$\theta_2 < \theta_1 \quad (8.105)$$

всюду, за исключением случая, когда $\theta_1 = 0$, и соответственно

$$\theta_2 = 0,$$

т.е. когда падающий и преломленный лучи перпендикулярны границе раздела (рис. 8.15, а).

Очевидно, что с увеличением θ_1 угол преломления также увеличивается и в пределе стремится к величине

$$\theta_2^{\max} = \sin^{-1} \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 \right) < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку угол θ_2 в разных точках границы имеет различные значения, естественно задать следующим вопросом. Имеют ли продолжения преломленных лучей в верхнюю часть среды общую точку пересечения? В силу осевой симметрии, если такая точка O существует, она должна располагаться на той же прямой OO_1 , на которой находится источник P_1 .

Как видно из рис. 8.15, а, горизонтальное смещение x можно определить двумя разными способами:

$$x = d \operatorname{tg} \theta_1 \text{ и } x = L \operatorname{tg} \theta_2,$$

где L – расстояние между границей и точкой пересечения преломленного луча с нормалью.

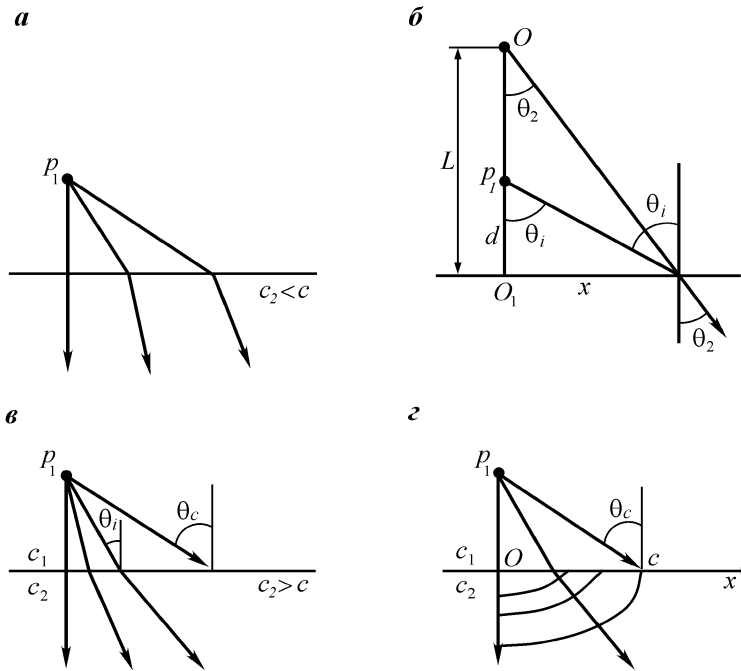


Рис. 8.15. Поведение преломленных лучей ($\theta_2 < \theta_1$) (+, ·); критический угол θ_c (·); различные интервалы на границе раздела (·)

Последнее выражение дает

$$d \tan \theta_1 = L \tan \theta_2,$$

или, используя закон Снеллиуса,

$$L = \frac{c_2}{c_1} d \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = \frac{c_2}{c_1} \frac{\sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}} d.$$

Приведенное отношение меняется при изменении угла θ_1 и соответственно преломленные лучи пересекаются в разных точках. Это показывает, что, в отличие от отраженных лучей, фазовые поверхности (поверхности равного эйконала) преломленных лучей не являются сферическими.

Случай 2: $c_2 > c_1$

В отличие от предыдущего примера ($c_2 < c_1$), угол преломления в данном случае больше угла падения (рис. 8.15, в, г). Действительно, из (8.103) следует, что

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 \geq \sin \theta_1 \quad (8.106)$$

или

$$\theta_2 > \theta_1$$

где равенство выполняется только при нормальном падении луча: $\theta_1 = 0$.

Как и в предыдущем случае, продолжения преломленных лучей в верхнюю часть среды пересекают перпендикуляр к плоскости S в различных точках, расположенных на интервале Op_1 .

Таким образом, в обоих случаях:

$$c_1 > c_2 \text{ и } c_2 > c_1$$

фазовые поверхности преломленной волны не являются сферическими.

В соответствии с законом Снеллиуса существует такое значение угла падения θ_1 , для которого

$$\sin \theta_2 = 1$$

и это значение определяется как

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{1}{c_2} \text{ или } \sin \theta_1 = \frac{c_2}{c_1} < 1. \quad (8.107)$$

Как было отмечено ранее, угол θ_1^c , удовлетворяющий приведенному равенству, называется критическим углом. По определению, как только угол падения достигает значения θ_1^c , преломленный луч становится касательным (рис. 8.15, \tilde{a}).

Предположим, что угол θ_1 больше угла θ_1^c :

$$\theta_1 > \theta_1^c. \quad (8.108)$$

Из соотношения (8.103) следует, что

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 > 1. \quad (8.109)$$

Поскольку данное неравенство невозможно для реальных значений угла θ_2 , мы должны заключить, что преломленные волны не возникают в точках, где $\theta_1 > \theta_1^c$, при условии, что длина волны стремится к нулю.

Таким образом, на границе раздела естественно выделить три различных области. Одна из них находится внутри окружности радиуса Os (рис. 8.15, \tilde{a}):

$$x < Os.$$

Преломленные волны, возникающие в пределах этой области, образуют с нормалью к границе угол, меньший, чем $\pi/2$. Соответствующие фазовые поверхности показаны на рис. 8.15, \tilde{a} .

Вторая группа преломленных волн представлена точками окружности радиуса Oc , где $\theta_1 = \theta_1^c$. В таких точках преломленные лучи являются касательными к границе раздела, образующей в этом случае прямой угол с фазовой поверхностью (рис. 8.15, \hat{a}).

Наконец, во всех остальных точках

$$x > Oc$$

преломление отсутствует.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. В среде, где скорость в пределах промежуточного слоя быстро возрастает (рис. 8.7, \hat{a}), точка поворота луча определяется тем же условием, что и точка c (рис. 8.15, \hat{a}).

2. Отсутствие преломленных лучей за точкой c ($c > Oc$) обусловлено приближенным характером геометрической акустики. Точное решение граничной задачи показывает, что волны возникают и там, где угол θ_1 больше угла θ_1^c . Однако они, как правило, экспоненциально затухают в направлении перпендикулярном границе раздела и исчезают при $\omega \rightarrow \infty$.

3. Закон преломления Снеллиуса (8.103) и уравнение луча в среде с непрерывным изменением скорости c в некоторой степени похожи друг на друга. Это особенно заметно, когда мы сравниваем поведение преломленных лучей в присутствии тонкого слоя (см. рис. 8.7, \hat{a}) и при наличии границы (рис. 8.15, \hat{a}) при условии, что $c_2 > c_1$. В обоих случаях существуют область преломленных лучей во второй среде, а также точка поворота или точка, соответствующая критическому углу, где

$$\sin \theta_1 = c_1/c_2,$$

и, наконец, точки промежуточного слоя и границы раздела, в которых преломленные лучи отсутствуют.

4. При изучении поведения лучей на плоской границе раздела двух сред мы вывели законы отражения и преломления

$$\theta_1 = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}. \quad (8.110)$$

Согласно этим законам в каждой точке границы раздела при $\theta < \theta_c$ одновременно возникают отраженный и преломленный луч. В этом состоит фундаментальное отличие от случая, в котором скорость является непрерывной функцией.

ЛУЧИ ГОЛОВНЫХ ВОЛН

Теперь мы снова обратим наше внимание на лучи, расположенные в верхней среде, предполагая при этом, что $c_1 < c_2$. Как мы знаем, в точку наблюдения приходят два луча, а именно, прямой и отраженный. Прямой луч относится к множеству путей, соединяющих точки p_1 и p_2 , и среди всех

таких путей он имеет минимальную длину. Отраженный луч характеризуется минимальной длиной среди всех тех траекторий, направление которых изменяется на границе раздела. Оба этих луча находятся в первой среде, т.е. всюду вдоль этих лучей волны распространяются со скоростью c_1 . Оказывается, существует еще один, третий путь распространения акустической энергии от источника к точке наблюдения P_2 (рис. 8.16, а). Ранее мы показали, что, когда угол падения θ_i становится равным критическому углу θ_c , преломленный луч направлен параллельно границе раздела. Это позволяет предположить, что движение частиц среды в указанном направлении порождает волну в верхней среде. Путь этой волны состоит из трех прямолинейных участков, а именно из отрезков P_1O_1 и O_2P_2 , на которых скорость распространения равняется c_1 , и промежуточного участка O_1O_2 , расположенного в нижней среде, где скорость равняется c_2 .

Конечно, мы можем вообразить бесконечное множество таких траекторий, однако согласно принципу Ферма волна будет распространяться вдоль того пути, акустическая длина которого минимальна.

Прежде чем мы приступим к определению положения этого луча, следует заметить, что падающие лучи, пересекающие границу раздела в точках на интервале OO_1 (рис. 8.16, а), приводят к появлению преломленных лучей, направленных в сторону от плоскости S . Эти лучи не могут прийти в точку наблюдения P_2 . Следовательно, при рассмотрении всех возможных лучей для этого нового типа волн, положение точки O_1 , в которой $\theta_i = \theta_c$, и ориентация сегмента O_1O_2 , должны сохраняться неизменными, а положение точки O_2 может меняться. Покажем теперь, что путь $P_1O_1O_2P_2$ является лучом (рис. 8.16, а), если угол между элементом O_2P_2 и нормалью к границе раздела

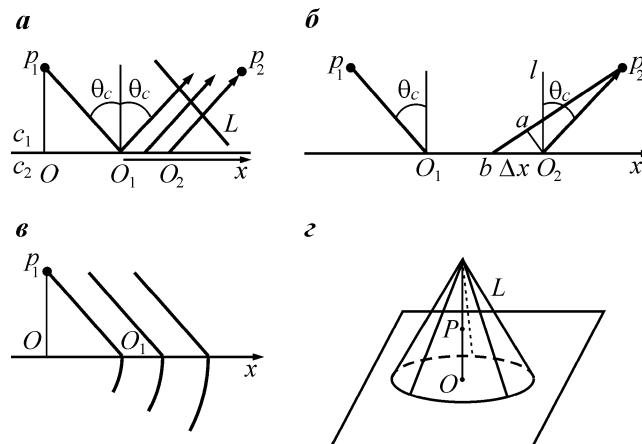


Рис. 8.16. Лучи и фронты головной волны (а); анализ функции ΔN (б); фронты головных волн (в, г)

равен критическому углу. Действительно, предположим, что акустическая длина пути $p_1O_1O_2p_2$ минимальна и равняется

$$N = c_1 \left(\frac{p_1O_1}{c_1} + \frac{O_1O_2}{c_2} + \frac{O_2p_2}{c_1} \right)$$

и сравним ее с акустической длиной пути $p_1O_1bp_2$

$$N_1 = c_1 \left(\frac{p_1O_1}{c_1} + \frac{O_1b}{c_2} + \frac{bp_2}{c_1} \right)$$

при условии, что точка b расположена на малом расстоянии Δx от точки O_2 (рис. 8.16, а).

Разность акустических длин этих путей

$$\Delta N = N - N_1 = c_1 \left(\frac{bO_2}{c_2} + \frac{O_2p_2}{c_1} - \frac{bp_2}{c_1} \right).$$

Как было показано для случая преломленных волн, разность ΔN должна обращаться в ноль, если пренебречь членами пропорциональными $(\Delta x)^2$ и более высокого порядка. Для доказательства этого факта проведем через точку O_2 окружность с центром в точке p_2 и рассмотрим треугольник baO_2 . Поскольку углы p_2O_2l и aO_2b образованы взаимно перпендикулярными сторонами, мы имеем

$$\angle aO_2b = \theta_c.$$

Следовательно,

$$ab = \Delta x \sin \theta_c = \Delta x \frac{c_1}{c_2}$$

Учитывая, что разность ΔN можно представить как

$$\Delta N = c_1 \left(\frac{\Delta x}{c_2} - \frac{ab}{c_1} \right),$$

получим

$$\Delta N = c_1 \left(\frac{\Delta x}{c_2} - \frac{\Delta x}{c_2} \right) = 0.$$

Это означает, что путь $p_1O_1O_2p_2$ является лучом, вдоль которого реализуется путь рассматриваемого третьего типа. Соответствующие этому лучу волны называются головными.

Наши выкладки показывают, что, как только горизонтальное расстояние от начала координат O превышает расстояние OO_1 ($x > OO_1$), в каждой точке границы лучи головной волны образуют одинаковый угол θ_c с нормалью и, следовательно, все эти лучи являются параллельными. Такие лучи не

возникают в точках интервала OO_1 , причем данный интервал уменьшается по мере того, как источник приближается к границе раздела. Следует заметить, что в точке O_1 (рис. 8.16, а) обе волны, отраженная и головная, распространяются вдоль одного и того же луча, поскольку $\theta_i = \theta_c$. Согласно геометрии лучей, мы должны заключить, что точки одинаковой фазы лежат на прямой L , перпендикулярной лучам (рис. 8.16, а). Это указывает на то, что фазовые поверхности головной волны являются конусами, вершины которых расположены вдоль прямой Op_1 (рис. 8.16, а).

Из рис. 8.16, а видно, что фазовые поверхности соответствующей преломленной волны в нижней среде перпендикулярны границе вблизи нее, при условии, что $x > OO_1$.

АКУСТИЧЕСКИЕ ДЛИНЫ ПРЕЛОМЛЕННОЙ И ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ

Сравним теперь акустические длины отраженного и головного лучей, соединяющих точки p_1 и p_2 (рис. 8.17, а):

$$N_r = \left(\frac{p_1 p}{c_1} + \frac{pp_2}{c_1} \right) c_1 \text{ и } \Delta N_h = \left(\frac{p_1 O_1}{c_1} + \frac{O_1 O_2}{c_2} + \frac{O_2 p_2}{c_1} \right) c_1. \quad (8.111)$$

Рассмотрим сначала разность длин вдоль этих лучей от источника до точки p . Из рис. 8.17, а следует, что

$$\Delta N_1 = \left(\frac{p_1 p}{c_1} - \frac{p_1 O_1}{c_1} - \frac{O_1 p}{c_2} \right) c_1$$

или

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= \left(\frac{p_1 p}{c_1} - \frac{p_1 O_1}{c_1} - \frac{Op - OO_1}{c_2} \right) c_1 = \left(\frac{p_1 p}{c_1} - \frac{p_1 O_1}{c_1} - \frac{p_1 p \sin \theta_i - p_1 O_1 \sin \theta_c}{c_2} \right) c_1 = \\ &= p_1 p \left(1 - \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_i \right) - p_1 O_1 \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) \end{aligned} \quad (8.112)$$

или

$$\Delta N_1 = p_1 p \left(1 - \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_i \right) - p_1 O_1 \cos^2 \theta_c \quad (8.113)$$

поскольку

$$\sin \theta_c = c_1/c_2.$$

Учитывая, что

$$Op_1 = p_1 O_1 \cos \theta_c = p_1 p \cos \theta_i,$$

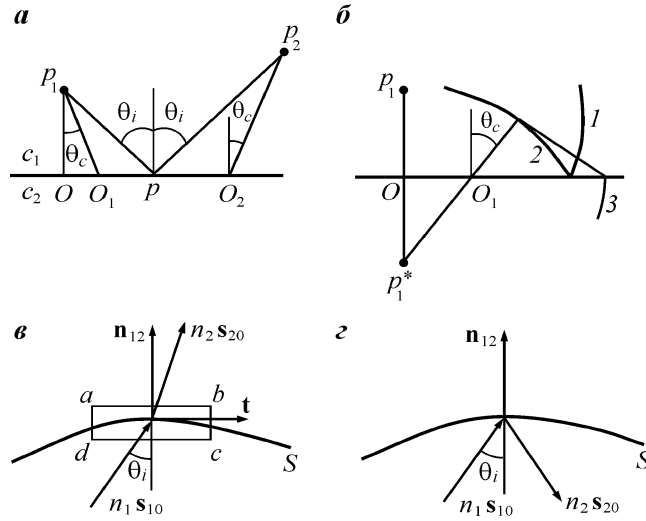


Рис. 8.17. Иллюстрация формулы (8.111) (а); фронты прямой, отраженной и головной волн (б); законы Снеллиуса (в, г). Волны: 1 – прямая, 2 – отраженная, 3 – головная

получаем

$$\Delta N_1 = p_1 p \left[\left(1 - \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_i \right) - \cos \theta_i \cos \theta_c \right]$$

или

$$\Delta N_1 = [1 - \sin \theta_c \sin \theta_i - \cos \theta_i \cos \theta_c] p_1 p = [1 - \cos(\theta_i + \theta_c)] p_1 p.$$

Таким образом,

$$\Delta N_1 > 0$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\frac{p p_2}{c_1} > \frac{p O_2}{c_2} + \frac{O_2 p_2}{c_1}$$

и

$$\Delta N_2 > 0$$

Таким образом, в общем случае, головная волна приходит в точку наблюдения раньше, чем отраженная. Исключение составляет лишь случай, когда обе волны приходят одновременно. Это происходит в точках лежащих на луче, начало которого расположено на расстоянии OO_1 от начала координат. Взаимное расположение фронтов прямой, отраженной и головной волны пока-

зано на рис. 8.17, а (с < c₂). На этом рисунке ясно видно, что фазовая поверхность головной волны находится между границей и поверхностью конуса с вершиной в точке p₁^{*} и углом θ_c.

В дальнейшем мы покажем, что амплитуда головных волн, а также отраженных и преломленных волн, не остается постоянной вдоль их фазовых поверхностей, а акустическая энергия может переноситься также в направлении, перпендикулярном лучам. Это говорит о влиянии дифракции на поведение этих волн. Более того, оказывается, что головная волна исчезает, когда длина волны стремится к нулю.

Как мы уже видели из рис. 8.17, а, скорость распространения прямой и отраженной волн вдоль границы меньше скорости преломленной волны (c₁ < c₂), и преломленная волна порождает головную.

Мы описали поведение волн вблизи границы раздела двух сред, основываясь на принципе Ферма. Это было сделано, невзирая на тот факт, что указанный принцип основывается на уравнении эйконала, которое не выполняется на границе. Чтобы преодолеть эту проблему, границу можно заменить тонким слоем, в котором скорость является непрерывной функцией. При выводе закона Снеллиуса и изучении геометрии головных волн мы сравнивали акустические длины различных путей, расположенных очень близко друг к другу. Поэтому, возможно, оправдана замена поверхности раздела тонким слоем.

ЗАКОНЫ СНЕЛЛИУСА И ИНТЕГРАЛ ЛАГРАНЖА

Учитывая, что принцип Ферма является следствием из интеграла Лагранжа:

$$\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_0 d\mathbf{r} = 0, \quad (8.114)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, \mathbf{s}_0 – единичный вектор вдоль луча, естественно попытаться получить закон Снеллиуса непосредственно из приведенного равенства. Как и ранее, предположим, что отраженная и преломленная волны существуют, а нашей целью является определение ориентации соответствующих им лучей относительно границы произвольной формы. Рассмотрим сначала отражение волны, и будем интерпретировать падающую и отраженную волны как одну волну, которая изменяет свою ориентацию на границе.

Применяя равенство (8.114) к замкнутому пути abcd (рис. 8.17, а), получим

$$\int_{ab} \mathbf{n} \mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{r} + \int_{cd} \mathbf{n} \mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (8.115)$$

поскольку интегралами по бесконечно малым интервалам bc и da можно пренебречь.

Последнее соотношение можно переписать как

$$\oint n s_0 \cdot d\mathbf{r} = \oint n(n_2 s_{20} - n_1 s_{10}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

или

$$(n_2 s_{20} - n_1 s_{10}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (8.116)$$

поскольку величина $d\mathbf{r}$ чрезвычайно мала.

Здесь s_{10} и s_{20} – единичные векторы луча по обе стороны от границы раздела, а $d\mathbf{r}$ – элементарный вектор, тангенциальный поверхности S , направление которого совпадает с направлением единичного вектора \mathbf{t} (рис. 8.16,).

Из равенства (8.116) следует, что вектор

$$\mathbf{M} = n_2 s_{20} - n_1 s_{10}$$

ортогонален поверхности раздела, т.е.

$$\mathbf{n}_{12} \times (n_2 s_{20} - n_1 s_{10}) = 0. \quad (8.117)$$

Здесь \mathbf{n}_{12} – единичный вектор нормали к поверхности раздела.

Формула (8.117) означает, что луч ориентирован таким образом, что тангенциальная компонента вектора $n s_0$ является непрерывной функцией при переходе через границу (рис. 8.17, $\hat{\mathbf{a}}$).

Из равенства (8.117) имеем

$$n_2 (\mathbf{n}_{12} \times s_{20}) = n_1 (\mathbf{n}_{12} \times s_{10}), \quad (8.118)$$

т.е. падающая и отраженная части луча лежат в одной плоскости.

Так как

$$|\mathbf{n}_{12}| = 1, |\mathbf{s}_{10}| = |\mathbf{s}_{20}| = 1,$$

соотношение (8.118) приводит к следующему выражению:

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1, \quad (8.119)$$

где θ_1 и θ_2 – углы, образованные падающим и отраженным лучом с нормалью \mathbf{n}_{12} .

Таким образом, мы снова получили закон преломления Снеллиуса.

Полагая $n_2 = n_1$ в равенстве (8.116) и используя рис. 8.17, $\hat{\mathbf{a}}$, мы видим, что отраженный луч лежит в плоскости падения и

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad \text{или} \quad \theta_r = \pi - \theta_i \quad (8.120)$$

и мы приходим к закону отражения Снеллиуса.

Выражения (8.118) – (8.120) показывают, что законы Снеллиуса справедливы не только для плоской границы, но и для поверхностей произвольной формы при условии, что длина волны достаточно мала. В реальной ситуации это означает, что радиус кривизны фазовой поверхности падающей волны и радиус кривизны поверхности раздела гораздо больше, чем длина волны.

Мы изучили поведение отраженных и преломленных лучей на поверхнос-

ти раздела двух сред, основываясь, по существу, на уравнении эйконала. Однако, как уже отмечалось ранее, указанное уравнение выполняется только в регулярных точках, где скорость является непрерывной функцией. Поэтому для вывода соотношений (8.118) – (8.120) мы выберем другой подход.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ И ЗАКОНЫ СНЕЛЛИУСА

В начале этой главы мы предположили, что длина волны достаточно мала и комплексная амплитуда потенциала ведет себя описывается уравнением

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ik_0 L(\mathbf{r})}. \quad (8.121)$$

Изучение волн в однородной среде показало, что такое представление потенциала просто означает, что в пределах относительно небольшой области волна ведет себя как плоская. Другими словами, небольшая часть фронта волны приближенно заменяется плоскостью, и лучи становятся параллельными друг другу. В регулярных точках мы из уравнения эйконала получили закон Снеллиуса. По аналогии, представляется естественным вывести законы отражения и преломления волн на границе, исходя из граничных условий и полагая, что волна является плоской.

В главе 4 было показано, что нормальная компонента скорости частиц и давление являются на границе непрерывными функциями:

$$v_{1z} = v_{2z} \text{ и } P_1 = P_2. \quad (8.122)$$

В соответствии с соотношениями

$$\mathbf{v} = \text{grad } U \text{ и } P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t},$$

вместо (8.122) мы получаем для комплексной амплитуды потенциала следующие условия:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\partial U_2}{\partial z} \text{ и } \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2, \text{ если } z = 0, \quad (8.123)$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности верхней и нижней частей среды, а начало системы координат расположено на границе раздела (рис. 8.18, а). Рассмотрим сначала падающую волну, фронт которой перпендикулярен плоскости XOZ и распространяется в направлении единичного вектора \mathbf{s}_{01} .

Комплексная амплитуда падающей волны записывается в виде

$$U_i = A e^{ik_1 d}, \quad (8.124)$$

где $k_1 = \omega/c_1$ – волновое число; d – расстояние между волновым фронтом и некоторой заданной плоскостью.

Как видно из рис. 8.18, а, вектор \mathbf{s}_{01} определяется как

$$\mathbf{s}_{01} = \mathbf{i} \sin \theta_1 + \mathbf{k} \cos \theta_1 \quad (8.125)$$

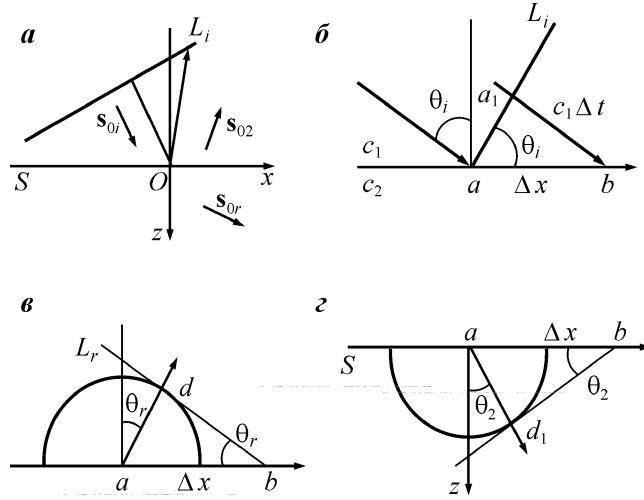


Рис. 8.18. Ориентация падающей, отраженной и преломленной волн (а); закон отражения Снеллиуса и принцип Гюйгенса (б, в); закон преломления Снеллиуса и принцип Гюйгенса (г)

а расстояние

$$d = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_{0i} = x \sin \theta_i + z \cos \theta_i. \quad (8.126)$$

Таким образом, вместо (8.124) имеем

$$U_i = A e^{ik_2 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}. \quad (8.127)$$

Согласно нашим предположениям, обе волны, отраженная и преломленная, являются плоскими.

По аналогии с (8.124) комплексная амплитуда потенциала для этих волн записывается как

$$U_r = B e^{ik_1 d_1} \quad \text{и} \quad U_2 = C e^{ik_2 d_2}. \quad (8.128)$$

Здесь

$$d_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_{0r} \quad \text{и} \quad d_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_{02}$$

а \mathbf{s}_{0r} и \mathbf{s}_{02} — единичные векторы вдоль лучей этих волн, и которые определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{s}_{0r} = \mathbf{i} \sin \theta_r - \mathbf{k} \cos \theta_r$$

и

$$\mathbf{s}_{02} = \mathbf{i} \sin \theta_2 + \mathbf{k} \cos \theta_2. \quad (8.130)$$

Таким образом,

$$d_1 = x \sin \theta_r - z \cos \theta_r$$

и

$$d_2 = x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2. \quad (8.131)$$

Подстановка последних двух выражений в (8.128) дает

$$U_r = B e^{ik_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

и

$$U_2 = C e^{ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}. \quad (8.132)$$

Используя теперь граничные условия (8.123) на границе раздела $z = 0$, мы получим следующую систему из двух уравнений для четырех неизвестных, а именно, для амплитуд B и \tilde{N} отраженной и преломленной волн, а также углов θ_r и θ_2 :

$$\rho_1(A e^{ik_1 x \sin \theta_1} + B e^{ik_1 x \sin \theta_r}) = \rho_2 C e^{ik_2 x \sin \theta_2}$$

и

$$k_1(\cos \theta_1 A e^{ik_1 x \sin \theta_1} - \cos \theta_r B e^{ik_1 x \sin \theta_r}) = k_2 \cos \theta_2 C e^{ik_2 x \sin \theta_2}. \quad (8.133)$$

Поскольку эти уравнения выполняются в любой точке плоскости $z = 0$, они не зависят от координат x и y . Следовательно, экспоненты должны равняться друг другу:

$$k_1 \sin \theta_1 = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_2$$

или

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_r}{c_1}.$$

Таким образом, мы снова получили законы Снеллиуса. Неизвестные коэффициенты B и \tilde{N} будут определены, когда мы приступим к изучению плоских волн в слоистых средах.

ЗАКОН СНЕЛЛИУСА И ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

Покажем теперь, что законы Снеллиуса следуют непосредственно из принципа Гюйгенса при условии, что волна и граница раздела двух сред являются плоскими (рис. 8.18, á). Предположим, что L_1 – фазовая поверхность (поверхностью равного эйконала) падающей волны, и пусть в некоторый момент t эта поверхность достигает точки a границы раздела. За интервал времени Δt волна достигает точки b , и длина сегмента

$$a_1 b = c_1 \Delta t = \Delta x \sin \theta_1. \quad (8.134)$$

Согласно принципу Гюйгенса каждую точку границы раздела можно рассматривать как источник сферической волны, распространяющейся в верхней и нижней среде со скоростями c_1 и c_2 , соответственно. Например, когда падающая волна приходит в точку b , радиус фазовой поверхности вторичной волны, возникающей в точке a в момент времени t , равняется ad (рис. 8.18, \hat{a}).

Проводя через точку b прямую, касательную к этой поверхности, мы определим положение фазовой поверхности L_r отраженной волны. Из рис. 8.18, \hat{a} видно, что

$$\angle adb = \frac{\pi}{2} \text{ и } \angle dba = \theta_r.$$

Таким образом,

$$ad = \Delta x \sin \theta_r = c_1 \Delta t$$

или

$$ad = a_1 b = \Delta x \sin \theta_i = \Delta x \sin \theta_r$$

и мы снова приходим к закону отражения Снеллиуса.

Аналогичным образом можно найти положение фазовой поверхности преломленной волны (рис. 8.18, \hat{a}).

Очевидно, что

$$ad_1 = c_2 \Delta t = \Delta x \sin \theta_2 \quad (8.135)$$

и, используя (8.134), мы получаем следующий закон преломления:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{c_2}{c_1} \text{ или } \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_1}{c_1}.$$

Итак, мы получили законы Снеллиуса, исходя из принципа Гюйгенса и предполагая, что падающая волна и граница раздела являются плоскими.

Учитывая, что указанный принцип выполняется при любых частотах, мы можем предположить, что закон Снеллиуса корректно описывает поведение плоской волны в горизонтально слоистой среде, независимо от длины волны, для всех углов падения θ_i , не превышающих критического угла: $\theta_i \leq \theta_c$.

8.5. ПОЛЯ ВРЕМЕН ПРИХОДА ВОЛНЫ

Время прихода волны в точку наблюдения – один из важнейших параметров, измеряемых в сейсмологии. Введем понятие поля времен прихода волны, считая при этом, что ее длина λ достаточно мала. Как уже отмечалось, поля эйконала и времени являются двумя эквивалентными способами описания поведения волн при $\lambda \rightarrow 0$.

Предположим, что нестационарная волна распространяется в среде со скоростью c , и изучим, как меняется положение фронта этой волны. Таким же образом можно рассматривать любую другую фазовую поверхность данной волны. Поскольку фронт волны приходит в заданную точку среды в некоторый момент времени t , это время естественно рассматривать как функцию координат точки. В частности, в прямоугольной декартовой системе координат имеем

$$t = t(x, y, z). \quad (8.136)$$

По определению, данная функция представляет собой скалярное поле и характеризует время прихода фронта волны, либо любой другой фазовой поверхности в точку наблюдения с координатами (x, y, z) .

Чтобы изучить поведение этого скалярного поля, т.е. понять, как оно изменяется в различных направлениях, мы, как обычно, будем использовать градиент скалярной функции (см. приложение 2):

$$\mathbf{M} = \text{grad } t, \quad (8.137)$$

описывающий величину и направление максимального увеличения поля t .

В общем случае криволинейной ортогональной системы координат градиент скалярного поля записывается как

$$\text{grad } t = \frac{1}{h_1} \frac{\partial t}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial t}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial t}{\partial x_3} \mathbf{i}_3, \quad (8.138)$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы в направлении координатных осей, а h_1, h_2, h_3 – соответствующие метрические коэффициенты.

Отсюда в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат имеем

$$\text{grad } t = \frac{\partial t}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (8.139)$$

$$\text{grad } t = \frac{\partial t}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial t}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (8.140)$$

$$\text{grad } t = \frac{\partial t}{\partial R} \mathbf{i}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial t}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi. \quad (8.141)$$

Очевидно, что замена системы координат приводит к изменению компонент градиента, однако его величина и направление не меняются, поскольку они зависят только от самого скалярного поля.

Производная поля времени по направлению связана с градиентом следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial l} \mathbf{l}_0 \cdot \text{grad } t = \text{grad}_l t$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial l} = M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{l}_0), \quad (8.142)$$

где \mathbf{l}_0 – единичный вектор вдоль прямой l .

Из равенства (8.142) следуют два важных свойства, состоящие в том, что производная $\partial t / \partial l$ максимальна в направлении градиента, поскольку $\cos(\mathbf{M}, \mathbf{l}_0) = 1$, в то время как в перпендикулярном направлении поле не меняется. Чтобы наглядно представить себе поле времени, удобно ввести понятие поверхности одинаковых значений времени прихода. Такие поверхности называются изохронами, и их физический смысл совершенно очевиден. В действительности они показывают положение фазовых поверхностей в различные моменты времени. Таким образом, зная положение изохрон в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , можно наблюдать поведение фронта волны. Примеры изохрон представлены на рис. 8.19, а, б, в. В общем случае эти поверхности могут иметь достаточно сложную форму и даже пересекать друг друга или самих себя.

Рассмотрим две изохроны для близких моментов времени t_1 и t_2 (рис. 8.19, б), и предположим, что время t между ними является линейной функцией. Тогда изменение времени прихода

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

в направлении нормали \mathbf{n} , а также в произвольном направлении \mathbf{l}_0 можно записать как

$$\Delta t = \frac{\partial t}{\partial n} \Delta n \text{ и } \Delta t = \frac{\partial t}{\partial l} \Delta l, \quad (8.143)$$

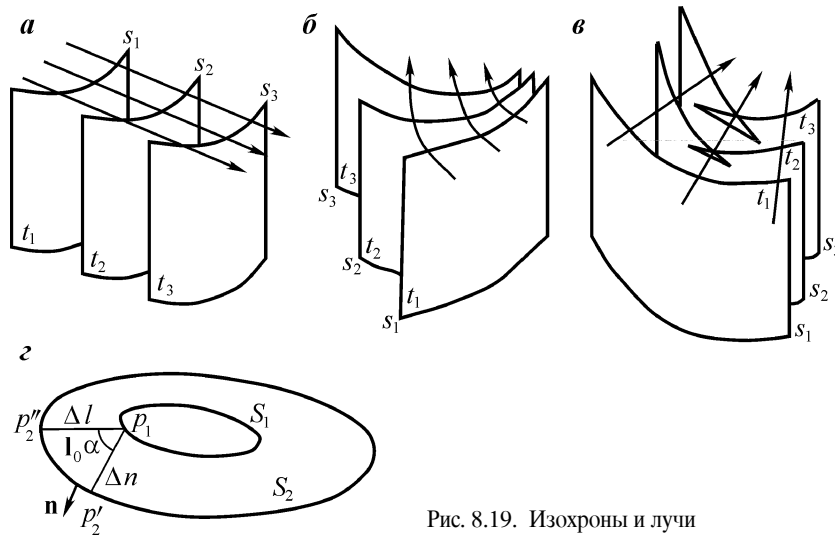


Рис. 8.19. Изохроны и лучи

откуда следует, что

$$\frac{\partial t}{\partial n} \Delta n = \frac{\partial t}{\partial l} \Delta l.$$

Поскольку

$$\Delta n = \Delta l \cos \alpha,$$

мы получаем

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \frac{\partial t}{\partial n} \cos \alpha, \quad (8.144)$$

где α – угол между нормалью \mathbf{n} и направлением смещения Δl .

Из приведенного выше равенства следует, что максимальная скорость изменения времени прихода наблюдается вдоль направления, перпендикулярного к изохроне и, следовательно, по определению градиента мы имеем

$$\text{grad } t = \nabla t = |\text{grad } t| \mathbf{n}. \quad (8.145)$$

Соответственно, линии, нормальные к изохронам, характеризуют направления, вдоль которых время прихода увеличивается быстрее, чем вдоль соседних путей. Поскольку форма изохрон совпадает с формой фазовых поверхностей (или поверхностей равного эйконала), можно сказать, что указанные линии совпадают с лучами, вдоль которых в среде распространяется акустическая энергия, и, следовательно, вектор

$$\mathbf{M} = \text{grad } t$$

по отношению к ним является тангенциальным. Как мы уже знаем, в однородной среде лучи являются прямыми. Присутствие неоднородности обычно приводит к тому, что лучи искривляются и могут даже пересекать друг друга. Очевидно, что поле времени прихода можно легко определить, если известно семейство лучей R и время распространения волны вдоль них. Действительно, проводя поверхности, нормальные к каждому из лучей, мы получим множество изохрон, параметр которых t определяется из пересечения с лучами R . Таким образом, как изохроны, так и лучи равным образом описывают поле времен прихода.

Выведем уравнение этого поля, используя эквивалентность, существующую между изохронами и фазовыми поверхностями. Пусть в момент времени $t = t_1$ фронт волны совпадает с изохроной S_1 . Для того, чтобы определить его положение в момент времени $t_2 = t_1 + \nabla t$, воспользуемся принципом Гюйгенса. Тогда каждую точку поверхности S_1 можно рассматривать в качестве центра элементарной сферической поверхности радиуса ∇n , равного

$$\nabla n = c \nabla t. \quad (8.146)$$

Огибающая этих элементарных волн представляет собой изохрону S_2 при $t = t_2$.

По определению, градиент t направлен вдоль нормали \mathbf{n} и, следовательно,

$$\text{grad}t = \frac{\partial t}{\partial n} \mathbf{n} = \frac{1}{c} \mathbf{n}, \quad (8.147)$$

поскольку в окрестности каждой точки p изохроны

$$c(p) = \partial n / \partial t.$$

В ортогональной криволинейной системе координат (8.147) получим

$$\sqrt{\left(\frac{\partial t}{h_1 \partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_2 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_3 \partial x_3}\right)^2} = \frac{1}{c(p)}$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{h_1 \partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_2 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_3 \partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{c^2(p)}. \quad (8.148)$$

Последняя формула называется уравнением поля времени прихода волны, которое совпадает с уравнением эйконала, если t и c^2 заменить на L и $(c_0/\bar{n})^2$ соответственно. В частности, в декартовой системе координат уравнение (8.148) записывается как

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2(p)}. \quad (8.149)$$

Заметим, что формулу (8.148) можно записать также в следующем виде:

$$(\nabla t)^2 = \frac{1}{c^2(p)}, \quad (8.150)$$

так как

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{i}_3.$$

Отсюда видно, что поле времен прихода описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое имеет бесконечное множество решений. Действительно, для любого заданного распределения скорости

Отсюда видно, что поле времен прихода описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое имеет бесконечное множество решений. Действительно, для любого заданного распределения скорости $c(p)$ можно представить себе неограниченное число распространяющихся в такой среде волн, поля времени прихода которых удовлетворяют уравнению (8.148). Поэтому для того, чтобы найти неизвестную функцию $t = t(x, y, z)$, необходимо знать начальные и граничные условия.

Таким образом, процедура нахождения поля времен прихода в объеме V , окруженном поверхностью S , состоит из следующих трех шагов.

1. Решение уравнения (8.148).

2. Выбор среди всех решений уравнения (8.148) функции, удовлетворяющей граничным условиям. Последнее обычно означает, что на границе S известна функция

$$t(x, y, z) = \varphi(x, y, z). \quad (8.151)$$

3. Выбор среди всех решений, удовлетворяющих уравнению (8.148) и условиям (8.151), того, которое подчиняется начальным условиям в каждой точке объема V .

В сейсмологии последнее требование обычно означает, что в начальный момент времени поле времен прихода имеет всюду нулевые значения.

Здесь следует отметить следующее.

а) объем V может быть окружен несколькими поверхностями S , на которых должны быть известны функции $\varphi(x, y, z)$ (8.151). Так, например, одна из таких поверхностей окружает первичный источник и расположена в его окрестности.

б) на границах раздела внутри объема V , где скорость $c(p)$ претерпевает разрыв, функция $t(x, y, z)$ является непрерывной, а геометрия лучей подчиняется закону Снеллиуса;

в) решение граничной задачи определяет функцию

$$t(x, y, z) = C, \quad (8.152)$$

где C – некоторая постоянная, характеризующая конкретную изохрону.

г) построение изохрон можно выполнить, используя также принцип Гюйгенса.

Существует несколько способов описания лучей. Например, лучи можно построить, рисуя линии, нормальные к изохронам, либо рассматривая уравнение, которое определяет время пробега волны вдоль некоторого произвольного пути L :

$$t = \int_a^b \frac{ds}{c(p)}. \quad (8.153)$$

Здесь ds – смещение вдоль пути в окрестности точки p , а пределы интегрирования a и b являются конечными точками одного и того же луча.

В соответствии с принципом Ферма, мы должны определить такой путь, вдоль которого время t минимальное (или стационарное, если окрестность луча не является регулярной). Это означает, что малые вариации пути вблизи луча не приводят к изменению времени прихода, т.е.

$$t(L + \Delta L) = t(L)$$

или

$$\Delta t = 0. \quad (8.154)$$

Конечно, последнее равенство выполняется только при условии, что вариации, пропорциональные ΔL и более высокого порядка, пренебрежимо малы. Данную задачу можно решить методами вариационного исчисления, основанными на использовании уравнения Эйлера.