

## Глава 2. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Теперь, используя законы Ньютона, приступим к изучению колебаний. В качестве простейшего примера рассмотрим движение системы, состоящей из пружины и подвешенного к ней груза (груз – пружина). В общем случае движение возникает за счет внутренних и внешних сил. Как будет показано в следующей главе, данный пример полезен для понимания процесса распространения волн. Кроме того, мы обсудим здесь такие важные вопросы, как закон Гука и методы измерения смещения и ускорения тела.

### 2.1. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПРУЖИНЫ

Предположим, что пружина подвешена к телу  $A$  так, что ее верхний конец остается неподвижным (рис. 2.1). Нижний конец пружины, соединенный с грузом массы  $m$ , начинает двигаться вниз под действием гравитационной силы

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g},$$

где  $\mathbf{g}$  – гравитационное поле,  $\mathbf{P}$  – вес груза.

По прошествии времени движение груза прекращается и устанавливается равновесие. Поскольку в состоянии равновесия сумма сил, действующих на груз, равняется нулю, можно заключить, что растяжение пружины приводит к появлению силы, равной по величине весу  $\mathbf{P}$  и направленной вертикально вверх:

$$F = P \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P}. \quad (2.1)$$

Это явление было открыто Робертом Гуком. Результаты выполненных им экспериментальных исследований, опубликованные в 1678 г., показали, что при малых смещениях существует практически линейная связь между весом груза и растяжением пружины в положении равновесия, т.е.

$$s \sim P. \quad (2.2)$$

В этом и состоит закон Гука.

Позднее Томас Юнг провел исследования, позволившие ему обобщить этот закон и найти его аналитическую форму. Так, например, для пружины закон Гука приобрел следующий вид:

$$\mathbf{F}^e = k \mathbf{s} \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = -k \mathbf{s}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\mathbf{F}^e$  обозначает внешнюю силу, приложенную к грузу. В частности,

Рис. 2.1. Система, состоящая из пружины и груза. Закон Гука

примером такой силы является вес **P**. Сила **F** – это упругая сила, вызванная растяжением или сжатием пружины, т.е. ее деформацией. Величина  $s$  – это смещение нижнего конца пружины от его начального положения.

Коэффициент  $k$  называется жесткостью пружины. Он характеризует способность пружины удерживать массу, и его величина зависит от материала, из которого изготовлена пружина, а также от ее длины. Например, при увеличении жесткости пружины даже относительно небольшое ее растяжение приводит к появлению упругой силы, способной прекратить движение груза.

Здесь полезно отметить следующее:

а) соотношение 2.3 представляет собой простейшую формулировку закона Гука. В дальнейшем аналогичные, но гораздо более сложные выражения будут получены для жидкостей и упругих тел. Эти выражения играют фундаментальную роль в теории распространения акустических и упругих колебаний;

б) как показали экспериментальные исследования, коэффициент жесткости пружины  $k$  обратно пропорционален ее первоначальной длине

$$k \sim 1/l.$$

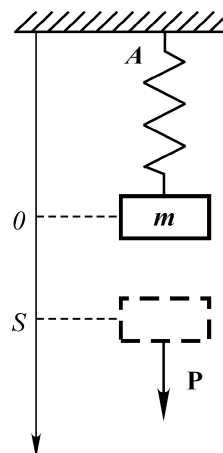
Отсюда, с учетом формулы (2.3), получим

$$s = F^e/k \sim l F^e,$$

т.е. смещение  $s$  прямо пропорционально первоначальной длине пружины  $l$ , при условии, что сила  $F^e$  является постоянной. В частности, груз, подвешенный к нижнему концу полубесконечной пружины, будет испытывать бесконечные смещения. Это означает, что сила, возникающая при растяжении пружины, не в состоянии прекратить движение груза. Такая зависимость смещения груза от первоначальной длины пружины означает, что ее нижний конец “знает”, как далеко он находится от верхнего конца. Отсюда следует, что эта информация распространяется волнами, бегущими вдоль пружины. Мы подробно обсудим это важное следствие позже;

в) закон Гука выполняется при условии, что силы  $F^e$  не слишком велики и, соответственно, величины смещений, вызванных этими силами, лежат в так называемом упругом диапазоне. Последнее означает, что если убрать силы  $F^e$ , пружина вернется в свое первоначальное положение;

г) предполагается также, что масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой груза, и, таким образом, пружина может считаться безмассовой. Иными словами, у пружины нет инерции, и сила, приложенная к одному из ее концов, мгновенно передается во все точки.



## 2.2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ГРУЗ – ПРУЖИНА

Теперь, когда мы готовы рассмотреть различные типы движений, естественно будет начать с простейшего случая колебаний в отсутствии внешней силы.

### КОЛЕБАНИЯ БЕЗ ЗАТУХАНИЯ

Предположим, что под действием некоторой силы груз перемещается вниз, на расстояние  $s$  от его первоначального положения (см. рис. 2.1). После этого, в момент времени  $t = 0$ , внешняя сила исчезает. В результате из-за деформации пружины возникает упругая сила  $\mathbf{F}$ , направленная вертикально вверх, и, в соответствии с законом Гука,

$$F = -ks. \quad (2.4)$$

Поскольку груз находится под влиянием упругой силы, он начинает двигаться вверх. В момент времени, когда груз достигает своего первоначального положения  $s = 0$ , упругая сила становится равной нулю, однако груз продолжает двигаться в том же направлении. Это происходит из-за того, что груз имеет ненулевую скорость и, следовательно, обладает кинетической энергией. Дальнейшее движение груза приводит к сжатию пружины, и, следовательно, вектор скорости и сила направлены теперь в разные стороны. Скорость груза из-за этого падает, и в конце концов груз останавливается. В этот момент кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию сжатой пружины, а упругая сила направлена вертикально вниз. Груз начинает двигаться в направлении своего первоначального положения  $s = 0$ , минует его, и возвращается в то положение, где вся механическая энергия запасена в виде потенциальной энергии растянутой пружины. После этого груз снова начинает двигаться вертикально вверх под действием силы  $\mathbf{F}$ . Таким образом, мы наблюдаем свободные колебания груза, возникающие только под действием внутренней силы системы. Выражение “свободные колебания” означает, что внешние силы во время движения отсутствуют. Тем не менее, в нашем случае имеется внешняя сила, а именно вес груза  $\mathbf{P}$ . Она вызывает некоторое начальное растяжение пружины  $s_0$  и начальную упругую силу  $\mathbf{F}^e$ . Поскольку сумма этих двух сил равняется нулю в любой момент времени, мы можем пренебречь их влиянием и трактовать движение груза как свободные колебания, при условии, что начало отсчета  $s = 0$  находится на расстоянии  $s_0$  от исходного положения нижнего конца пружины.

Получим теперь уравнение движения груза, используя законы Ньютона и Гука

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F \quad \text{и} \quad F = -ks. \quad (2.5)$$

Исключая из этих уравнений силу  $\mathbf{F}$ , имеем

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + k s = 0$$

или

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0, \quad (2.6)$$

где  $s = s(t)$  – расстояние между текущим и начальным положениями груза,  $t$  – время, а величина

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2.7)$$

является параметром системы.

Решение уравнения (2.6) имеет следующий вид (см. приложение 5):

$$s(t) = C \sin \omega_0 t + D \cos \omega_0 t. \quad (2.8)$$

Здесь  $C$  и  $D$  – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени. Таким образом, свободные колебания рассматриваемой системы происходят синусоидально, с частотой  $\omega_0$ , которая обычно называется естественной частотой системы.

Период этих колебаний, т.е. интервал времени, в течение которого груз возвращается в исходное положение, определяется как

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.9)$$

Важно отметить, что период свободных колебаний зависит только от параметров системы  $m$  и  $k$ , а именно от их комбинации  $\sqrt{m/k}$ . В частности, период  $T_0$  не зависит от положения и скорости груза в начальный момент времени. Иными словами, колебания системы происходят с постоянной частотой  $\omega_0$ , независимо от поведения внешней силы. Чтобы оценить значение этого факта, представьте себе, что могло бы случиться, если бы частота звучания музыкальных инструментов зависела от силы, прикладываемой музыкантом.

Из выражения (2.9) следует, что период колебаний  $T_0$  увеличивается при увеличении массы груза, а также при уменьшении коэффициента жесткости пружины. Такая зависимость легко объяснима. Действительно, поскольку с увеличением массы возрастает ее инерция, скорость движения падает, а период, соответственно, увеличивается. Такая же тенденция наблюдается при уменьшении коэффициента жесткости пружины, поскольку в этом случае пружину необходимо деформировать сильнее, чтобы прекратить движение груза.

В отличие от естественной частоты системы  $\omega_0$ , коэффициенты  $C$  и  $D$  в выражении (2.8) зависят от начальных условий. Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  смещение и скорость груза известны и

$$s(0) = s_0 \quad \text{и} \quad \dot{s}(0) = v_0. \quad (2.10)$$

Здесь точка над символом  $\dot{s}$  обозначает дифференцирование по времени.

Подстановка  $t = 0$  в выражение (2.8) даст

$$D = s_0. \quad (2.11)$$

Затем, дифференцируя по времени обе части формулы (2.8) и снова полагая  $t = 0$ , получим

$$C = v_0/\omega_0. \quad (2.12)$$

Таким образом, равенство (2.8) переписывается в виде

$$s(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + s_0 \cos \omega_0 t. \quad (2.13)$$

Вводя обозначения

$$s_0 = A \sin \varphi \quad \text{и} \quad v_0/\omega_0 = A \cos \varphi \quad (2.14)$$

и подставляя их в (2.13), получим

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.15)$$

Амплитуда  $A$  и начальная фаза колебаний  $\varphi$  легко выражаются через начальные условия.

Из соотношений (2.14) следует, что

$$A = \sqrt{s_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_0 s_0}{v_0}. \quad (2.16)$$

Так, например, если начальное смещение равняется нулю, то

$$s(t) = A \sin \omega_0 t, \quad (2.17)$$

где

$$A = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \sqrt{m/k}.$$

Таким образом,  $\varphi$  характеризует сдвиг фазы движения (2.15) относительно колебаний системы, происходящих в том случае, когда начальное смещение отсутствует.

В соответствии с формулой (2.15), скорость и ускорение груза определяются следующими выражениями

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.18)$$

и

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Очевидно также, что упругая сила определяется как

$$F = -k s = -k A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь поведение энергии при таком движении. Учитывая (2.18), кинетическую энергию груза опишем следующим выражением:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.20)$$

По определению, потенциальная энергия, запасенная пружиной, есть

$$U(s) = -\int_0^s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^s k s ds = \frac{k s^2}{2}. \quad (2.21)$$

Таким образом, потенциальная энергия пружины прямо пропорциональна квадрату смещения. В дальнейшем мы будем часто использовать эту зависимость, чтобы характеризовать потенциальную энергию, запасенную в пружине или в упругой среде.

Используя выражение (2.15), запишем

$$U = \frac{k A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.22)$$

Соответственно, полная механическая энергия системы

$$W = E(t) + U(t) = \frac{k A^2}{2} \quad (2.23)$$

не меняется в процессе движения и полностью определяется начальными условиями и параметрами системы. Это означает, что колебания будут продолжаться неограниченно долго.

### КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАТУХАНИЯ

До сих пор мы предполагали, что движение груза и пружины происходит без сопротивления и, следовательно, амплитуда свободных колебаний остается постоянной. Однако в реальных условиях всегда присутствуют внешние и внутренние силы трения. Трение может возникать, например, между движущимся грузом и окружающим его воздухом. При изучении влияния трения мы будем использовать закон Кулона – Мора и предполагать, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения, т.е.

$$\mathbf{F}_r = -\alpha \mathbf{v}, \quad (2.24)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, зависящий, в частности, от свойств среды, окружающей систему. Знак минус в формуле (2.24) указывает на то, что направление силы сопротивления  $\mathbf{F}_r$  противоположно скорости  $\mathbf{v}$ .

Как и ранее, предположим, что груз до начала движения находился в равновесии, т.е. его вес был компенсирован силой натяжения пружины. Тогда, в соответствии с законом Ньютона, уравнение движения, описывающее свободные колебания, имеет вид

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - \alpha \frac{ds}{dt},$$

или

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (2.25)$$

где

$$\omega_0^2 = k/m \quad \text{и} \quad 2n = \alpha/m. \quad (2.26)$$

Как показано в приложении 5, смещение  $s(t)$  можно представить как

$$s(t) = A e^{pt}, \quad (2.27)$$

где  $A$  и  $p$  – не зависящие от времени постоянные.

Подстановка выражения (2.27) в уравнение (2.25) даст характеристическое уравнение

$$p^2 + 2np + \omega_0^2 = 0. \quad (2.28)$$

Таким образом, функция  $s(t)$ , задаваемая формулой (2.27), удовлетворяет дифференциальному уравнению движения при условии, что значения параметра  $p$  являются корнями уравнения (2.28).

Решая уравнение (2.28), получим

$$p_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2} \quad \text{и} \quad p_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2}. \quad (2.29)$$

Общее решение уравнения (2.25) запишется в виде

$$s(t) = C e^{p_1 t} + D e^{p_2 t}, \quad (2.30)$$

где коэффициенты  $C$  и  $D$  определяются из начальных условий.

Чтобы изучить полученное решение, полезно выделить следующие три случая:

$$1) \ n > \omega_0; \quad 2) \ n = \omega_0; \quad 3) \ n < \omega_0,$$

которые мы рассмотрим отдельно друг от друга.

#### **Первый случай: $n > \omega_0$**

Из соотношений (2.26) следует, что

$$\alpha > 2\sqrt{km},$$

и, соответственно, сила трения настолько велика, что никаких колебаний не возникает. Действительно, оба корня,  $p_1$  и  $p_2$ , являются действительными. Поскольку в этом случае они являются также отрицательными, смещение системы даётся выражением

$$s(t) = C e^{-|p_1|t} + D e^{-|p_2|t}, \quad (2.31)$$

из которого ясно, что синусоидальные колебания в системе отсутствуют.

Для иллюстрации рассмотрим движение при двух различных начальных условиях. Положим сначала, что

$$s(0) = 0 \quad \text{и} \quad ds_0/dt = v_0.$$

Как было показано в главе 1, эти условия соответствуют случаю, когда в начальный момент времени на систему действует внешняя сила в виде кратковременного импульса. Воспользовавшись выражением (2.30), получим следующие уравнения для коэффициентов  $C$  и  $D$ :

$$C + D = 0$$

и

$$p_1 C + p_2 D = v_0.$$

Отсюда

$$D = v_0/(p_2 - p_1), \quad C = -v_0/(p_2 - p_1)$$

и

$$s(t) = \frac{v_0}{p_1 - p_2} [e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}]. \quad (2.32)$$

Вначале из-за действия исходного импульса груз движется от положения равновесия, и смещение  $s(t)$  растёт. Поскольку направления возвратной силы и силы трения противоположны направлению скорости, она уменьшается со временем и, в конце концов, движение прекращается. В этот момент потенциальная энергия, запасённая пружиной, меньше работы, произведённой импульсом внешней силы, так как часть механической энергии груза перешла в тепло. В следующий момент времени груз начинает двигаться в обратную сторону, и в момент достижения исходного положения его скорость становится экспоненциально малой величиной, поскольку вся механическая энергия перешла к этому времени в тепло. Поведение функции  $s(t)$  показано на рис. 2.2, а (кривая I).

Предположим теперь, что

$$s(0) = s_0 \quad \text{и} \quad v(0) = 0.$$

Обращаясь снова к выражению (2.30), получим

$$s(t) = \frac{s_0}{1 - \frac{p_2}{p_1}} \left[ e^{-p_2 t} - \frac{p_2}{p_1} e^{-p_1 t} \right]. \quad (2.33)$$



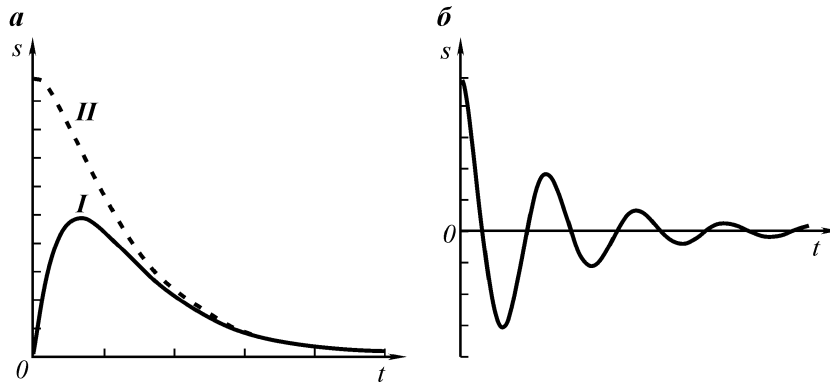


Рис. 2.2. Свободные колебания

Кривая II на рис. 2.2, а иллюстрирует поведение функции  $s(t)$  в этом случае.

**Второй случай:**  $n = \omega_0$

Этот случай обычно называется критическим затуханием. Как следует из выражений (2.29), оба корня в данном случае равны друг другу:

$$p_1 = p_2 = -n. \quad (2.34)$$

Соответственно, правая часть формулы (2.30) содержит только один экспоненциальный член и, следовательно, она не описывает общего решения. Тем не менее, в этом особом случае функция

$$Dt e^{-nt}$$

также удовлетворяет уравнению (2.25), поскольку  $n = \omega_0$ . Таким образом, общее решение этого уравнения дается следующим выражением:

$$s(t) = (C + Dt) e^{-nt}. \quad (2.35)$$

Если, например,

$$s(0) = 0 \quad \text{и} \quad v(0) = v_0,$$

то легко находим

$$s(t) = v_0 t e^{-nt}. \quad (2.36)$$

Сначала смещение растёт и в некоторый момент времени достигает своего максимального значения, однако затем груз постепенно возвращается к своему первоначальному положению, как это было в предыдущем примере.

**Третий случай:**  $\omega > n_0$

В этом случае из выражений (2.29) следует, что оба корня являются комплексными:

$$p_1 = -n + i p_0 \quad \text{и} \quad p_2 = -n - i p_0, \quad (2.37)$$

где

$$p_0 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}. \quad (2.38)$$

Подставляя выражения (2.37) в (2.29) и используя формулу Эйлера (см. приложение 4)

$$e^{\pm i x} = \cos x \pm i \sin x,$$

находим

$$s(t) = e^{-nt} (A \sin p_0 t + B \cos p_0 t). \quad (2.39)$$

Полагая

$$A = A_0 \cos \varphi \quad \text{и} \quad B = A_0 \sin \varphi,$$

выражение (2.39) можно переписать как

$$s(t) = A_0 e^{-nt} \sin(p_0 t + \varphi). \quad (2.40)$$

Таким образом, в отличие от двух предыдущих случаев, движение груза теперь описывается осциллирующей функцией, амплитуда которой уменьшается со временем (рис. 2.2, б). Иными словами, максимальное смещение груза со временем уменьшается, и в конце концов он перестает двигаться и замирает в положении равновесия. Функция  $s(t)$ , задаваемая формулой (2.40), безусловно отличается от синусоиды, однако мы будем продолжать использовать для этой функции понятия амплитуды и фазы.

Частота  $p_0$  таких колебаний связана с параметрами системы, включая коэффициент трения  $\alpha$ , а ее значения меньше, чем  $\omega_0$ :

$$p_0 < \omega_0.$$

Однако с уменьшением силы трения частота  $p_0$  стремится к  $\omega_0$ :

$$p_0 \rightarrow \omega_0, \quad \text{если} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

В дальнейшем удобно представить экспоненциальный член в выражении (2.40) следующим образом

$$e^{-nt} = e^{-nT \frac{t}{T}} = e^{-\frac{n}{f} \frac{t}{T}} = e^{-\alpha_* \frac{t}{T}}, \quad (2.41)$$

где

$$\alpha_* = nT = \frac{n}{f} = \frac{\alpha}{2mf} \quad \text{или} \quad n = \alpha_* f, \quad (2.42)$$

а  $f$  – частота. Параметр  $\alpha_*$  называется логарифмическим декрементом. Он указывает на то, что амплитуда колебаний уменьшается в  $e^{-\alpha_*}$  раз за интервал времени, равный периоду  $T$ . Действительно, беря отношение смещений  $s(t)$  для двух расстояний, различающихся на период  $T = 2\pi/p_0$ , имеем

$$\frac{s(t)}{s(t+T)} = \frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+T)}} = e^{-nT} e^{\alpha_*}$$

или

$$\ln = \frac{s(t)}{s(t+T)} = \alpha_* . \quad (2.43)$$

Например, можно взять смещения  $s(t)$  и  $s(t+T)$ , соответствующие последовательным максимумам осциллирующей кривой.

Рассмотрим одно интересное свойство колебаний в присутствии силы сопротивления. В случае простого гармонического движения, т.е. при  $\alpha_* = 0$ , функция

$$|s(t)| = |A \sin(\omega_0 t + \varphi)|$$

имеет максимальные значения в следующие моменты времени:

$$t_1 = \frac{\pi/2 - \varphi}{\omega_0}, \quad t_2 = \frac{3\pi/2 - \varphi}{\omega_0}, \quad t_3 = \frac{5\pi/2 - \varphi}{\omega_0}, \dots,$$

а груз проходит через положение равновесия  $s = (0)$ , когда

$$t_1^0 = \frac{\pi - \varphi}{\omega_0}, \quad t_2^0 = \frac{2\pi - \varphi}{\omega_0}, \quad t_3^0 = \frac{3\pi - \varphi}{\omega_0}, \dots$$

Это означает, что время, затрачиваемое на движение в противоположных направлениях от точки равновесия, одинаково.

Чтобы определить моменты времени, в которые функция  $s(t)$ , задаваемая выражением (2.40), принимает максимальные значения, решим уравнение

$$ds(t)/dt = 0.$$

Дифференцируя правую часть (2.40), получим

$$\operatorname{tg} = (p_0 t + \varphi) = \frac{p_0}{n} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - n^2}{n^2}}.$$

Найдя корни этого уравнения, можно увидеть, что интервал времени, в течение которого груз движется от положения равновесия  $s = 0$  к точке соответствующего максимального удлинения пружины, меньше интервала времени, требующегося для возвращения в исходную позицию. Это происходит вследствие того, что в процессе движения часть механической энергии переходит в тепло.

По определению, параметр  $n$ , стоящий в равенствах (2.26) и характеризующий затухание колебаний, прямо пропорционален коэффициенту трения  $\alpha$  и обратно пропорционален массе системы. Действительно, с увеличением массы система становится более инертной и, следовательно, требуется боль-

ше времени, чтобы остановить движение. Очевидно, что интервал времени, необходимый для того, чтобы вся механическая энергия преобразовалась в тепло, почти всегда конечен. Для описания этого процесса можно ввести некоторую постоянную  $\tau$ , которая называется временем релаксации. Очевидно, что с увеличением затухания колебательный характер движения исчезает и вместо него наблюдается экспоненциальное затухание.

В случае с пружиной коэффициент  $\alpha$  является постоянным, а логарифмический декремент  $\alpha_*$  прямо пропорционален периоду колебаний. В то же время теоретические и экспериментальные исследования показывают, что для непрерывных сред  $\alpha_*$  часто не зависит от частоты в широком диапазоне  $\omega$ . При этом из равенств (2.41) следует, что колебания более высокой частоты будут затухать быстрее.

Полезно продемонстрировать, как изменение механической энергии связано с параметром  $\alpha_*$ . Очевидно, что в отсутствие затухания максимум механической энергии со временем не меняется. В частности, в момент времени, соответствующий максимальному смещению  $s_{\max}$ , полная энергия сосредоточена в виде потенциальной энергии и равняется

$$W = U = k s_{\max}^2 / 2. \quad (2.44)$$

Однако при наличии затухания часть этой энергии переходит в тепло. Чтобы охарактеризовать эти потери, естественно рассмотреть следующее отношение:

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{W_1 - W_2}{W_1}, \quad (2.45)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  – максимальные значения потенциальной энергии, соответствующие последовательным периодам. Отсюда имеем

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{U_1 - U_2}{U_1}.$$

Ограничимся рассмотрением слабого затухания:

$$U_1 \approx U_2.$$

Тогда, принимая во внимание соотношение (2.44), получим

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1^2} = \frac{(s_1 - s_2)(s_1 + s_2)}{s_1^2} \approx 2 \frac{\Delta s}{s_2}.$$

Учитывая, что (см. 2.43)

$$\ln \frac{s_1}{s_2} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta s}{s_2} \right) \approx \frac{\Delta s}{s_2} = \alpha_*,$$

имеем

$$\Delta W / W = 2\alpha_*. \quad (2.46)$$

Отношение  $\Delta W/W$  обычно называют удельными потерями, и при малом затухании оно равняется двойному логарифмическому декременту.

Оба параметра,  $\Delta W/W$  и  $\alpha_*$ , используются при изучении затухания колебаний, а также затухания волн в различных средах.

Следует также отметить, что наряду с удельными потерями  $\Delta W/W$  часто применяется безразмерный коэффициент  $Q$ , определяемый как

$$Q = \pi W / \Delta W.$$

### 2.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ГРУЗ – ПРУЖИНА

До сих пор мы изучали только свободные колебания груза, вызванные возвратной силой пружины. Рассмотрим теперь более сложный случай движения, когда к грузу приложена также внешняя сила  $F(t)$  (см. рис. 2.1). Предположим сначала, что затухание отсутствует. Тогда уравнение движения запишется как

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = F(t) - ks(t)$$

или

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = f(t), \quad (2.47)$$

где

$$f(t) = F(t)/m. \quad (2.48)$$

Таким образом, мы приходим к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянным коэффициентом  $\omega_0^2$ . Существенно, что данное уравнение является линейным. Его решение состоит из двух частей (см. приложение 5):

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t). \quad (2.49)$$

Функция  $s_1(t)$  является решением рассмотренного ранее однородного уравнения

$$\frac{d^2 s_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s_1(t) = 0.$$

В соответствии с выражением (2.8),

$$s_1(t) = C \sin \omega_0 t + D \cos \omega_0 t.$$

В отличие от функции  $s_1(t)$ , второй член,  $s_2(t)$  представляет собой частное решение уравнения (2.47). Его поведение полностью определяется внешней силой и параметрами системы. Поэтому представляется естественным,

что эта часть решения называется вынужденными колебаниями. Таким образом, движение системы в присутствии внешней силы описывается суммой свободных и вынужденных колебаний. В дальнейшем удобно рассматривать отдельно два типа внешних сил. Первый тип – это силы, имеющие гармоническую зависимость от времени, например,  $F = F_0 \sin \omega t$  или  $F = F_0 \cos \omega t$ ; а второй – произвольные функции времени  $F(t)$ .

Существуют по крайней мере две причины для такой классификации. Первая причина заключается в том, что, если внешняя сила является синусоидальной функцией, то и движение  $s_2(t)$  – также синусоидальная функция той же частоты (см. приложение 5). Другими словами, вход  $F(t)$  и выход  $s_2(t)$  такой системы всегда имеют одну и ту же зависимость от времени. Это одно из самых замечательных свойств любых линейных систем, имеющих синусоидальную функцию на входе.

Другая причина такой классификации связана с тем, что произвольную функцию  $F(t)$  можно представить в виде интеграла или суммы синусоид, имеющих различные амплитуды, фазы и частоты. Таким образом, зная, как движется масса под действием единичной синусоидальной силы, и применяя затем принцип суперпозиции, можно определить движение  $s(t)$ , возникающее под действием произвольной силы  $F(t)$ .

По этой причине мы сначала подробно рассмотрим вынужденные синусоидальные колебания груза.

Предположим, что на систему, находящуюся в состоянии покоя, в момент времени  $t = 0$  начинает действовать сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_0 \cos \omega t, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.50)$$

где частота  $\omega$  отличается, в общем случае, от частоты свободных колебаний  $\omega_0$ .

Соответственно, вместо уравнения (2.47) имеем

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = f_0 \cos \omega t \quad (2.51)$$

и

$$f_0 = F_0/m. \quad (2.52)$$

Поскольку сила, действующая на массу, описывается гармонической функцией, будем искать частное решение уравнения (2.51) также в виде гармонической функции (приложение 5):

$$s_2(t) = L \cos \omega t, \quad (2.53)$$

где  $L$  является неизвестным коэффициентом.

Подставляя выражение (2.53) в уравнение (2.51), получаем

$$-\omega^2 L + \omega_0^2 L = f_0$$

или

$$L = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2.54)$$

и частное решение  $s_0(t)$  записываем как

$$s_2(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (2.55)$$

Таким образом, мы убедились в том, что предположение (2.53) оказалось верным, и показали, что внешняя сила и вынужденные колебания  $s_2(t)$  имеют одинаковые частоты. В то же время амплитуда и фаза движения  $s_2(t)$  зависит как от амплитуды и фазы внешней силы, так и от параметров системы.

В соответствии с выражением (2.49) полное решение уравнения (2.51) имеет вид

$$s(t) = \cos \omega_0 t + D \cos \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad (2.56)$$

где первое и второе слагаемые описывают свободные колебания с естественной частотой  $\omega_0$ , а последний член характеризует вынужденные колебания с той же частотой, которую имеет внешняя сила.

Не зависящие от времени коэффициенты  $C$  и  $D$  определяются следующими факторами:

- а) начальным смещением и скоростью массы;
- б) частотой свободных и вынужденных колебаний;
- в) амплитудой внешней силы и массой системы.

Таким образом, внешняя сила (2.50) вызывает движение системы, которое описывается двумя гармоническими функциями, обычно имеющими разные частоты.

В реальных системах присутствуют также силы трения, поэтому свободные колебания полностью исчезнут, если они возникли задолго до рассматриваемого момента времени. Тем не менее, в этом случае по-прежнему будут наблюдаться вынужденные колебания  $s_2(t)$ , имеющие частоту внешней силы. Изучим теперь, как происходят такие движения. Функцию  $L$  из формулы (2.54) можно представить как

$$L = \frac{f_0}{\omega_0^2(1 - \omega^2 / \omega_0^2)} = \frac{F_0}{k(1 - \omega^2 / \omega_0^2)}, \quad (2.57)$$

так как

$$f_0 = F_0/m \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = k/m.$$

Согласно закону Гука,

$$F_0 = kl,$$

где  $l$  обозначает смещение массы от положения равновесия под действием постоянной силы  $F_0$ . Таким образом, выражение (2.57) можно переписать как

$$L = l(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^{-1}. \quad (2.58)$$

Отсюда видно, что максимальное смещение  $L$  вынужденных колебаний отличается от статического смещения  $l$ . На рис. 2.3, *a* показана частотная характеристика отношения  $|L|/l$ . На низких частотах амплитуда вынужденных колебаний близка к статическому смещению  $l$ :

$$|L| \rightarrow l, \text{ если } \omega \rightarrow 0.$$

С увеличением частоты  $\omega$  амплитуда колебаний также увеличивается и стремится к бесконечности, когда  $\omega$  стремится к  $\omega_0$ . Это явление называется резонансом, а соответствующая частота внешней силы – резонансной.

Конечно, в реальных ситуациях амплитуда вынужденных колебаний из-за затухания всегда имеет конечное значение. Как следует из (2.58), при  $\omega < \omega_0$  внешняя сила и смещение  $s_2(t)$  изменяются синхронно, т.е. фазовый сдвиг

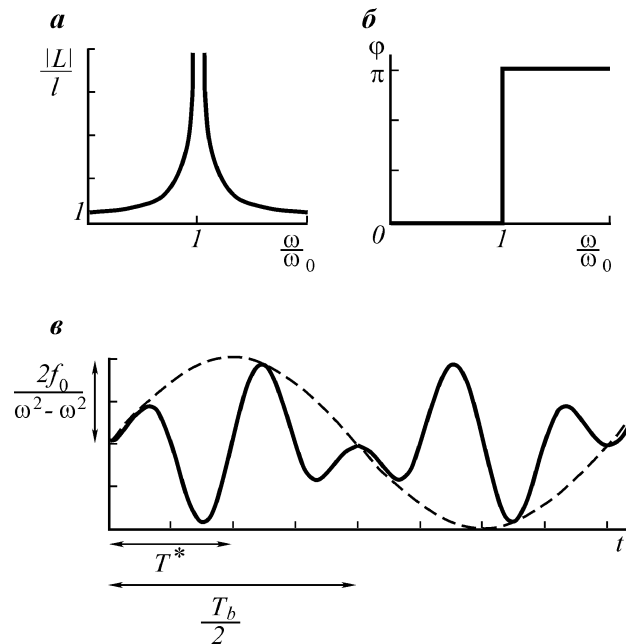


Рис. 2.3. Амплитудная и фазовая частотные характеристики вынужденных колебаний (*a*, *б*); биения (*в*)



между ними отсутствует. Например, в момент времени, когда сила  $F(t)$  имеет максимальное значение, масса будет находиться в наиболее низкой точке, при условии, что эффект свободных колебаний пренебрежимо мал.

При дальнейшем увеличении частоты, когда  $\omega > \omega_0$ , амплитуда  $|L|$  уменьшается и стремится к нулю на высоких частотах  $\omega \gg \omega_0$ . В этом пределе имеем

$$L \rightarrow 0, \text{ если } \omega/\omega_0 \rightarrow \infty.$$

Такое поведение легко объяснимо. Действительно, уменьшение периода  $T$  внешней силы означает, что интервал времени, в течение которого сила  $F(t)$  сохраняет свое направление, становится короче. Соответственно, смещение массы при  $\omega > \omega_0$  уменьшается, и на достаточно высоких частотах  $\omega \gg \omega_0$  длина пружины практически не изменяется. Это явление имеет большое значение для измерения кинематических параметров движения.

Как следует из (2.58), сдвиг фаз между функциями  $s_2(t)$  и  $F(t)$  при  $\omega > \omega_0$  равняется  $\pi$  (рис. 2.3, б). В частности, в момент времени, когда сила имеет максимальное значение и направлена вниз, масса находится в своей верхней точке.

Рассмотрим далее полное смещение  $s(t)$ . Предположим, в качестве примера, что в начальный момент времени смещение и скорость массы равняются нулю, т.е.

$$s(0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{s}(0) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Из выражения (2.56) получим

$$0 = D + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{и} \quad 0 = \omega_0 C.$$

Отсюда

$$D = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{и} \quad C = 0. \quad (2.59)$$

Подстановка (2.59) в (2.56) дает

$$s(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega_0 t + \cos \omega t). \quad (2.60)$$

Последнее выражение показывает, что внешняя сила вызывает свободные и вынужденные колебания одинаковой амплитуды. Поэтому при близких частотах  $\omega$  и  $\omega_0$  наблюдаются так называемые биения. Чтобы проиллюстрировать это явление, воспользуемся равенством

$$\cos \omega t - \cos \omega_0 t = -2 \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \sin \frac{(\omega + \omega_0)t}{2}.$$

Далее, функцию  $s(t)$  можно записать как

$$s(t) = A(t) \sin \omega^* t, \quad (2.61)$$

где

$$\omega^* = (\omega - \omega_0)/2$$

и

$$A(t) = \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_b t. \quad (2.62)$$

Здесь

$$\omega_b = (\omega_0 - \omega)/2. \quad (2.63)$$

В соответствии с выражением (2.61), движение массы описывается произведением двух гармонических функций. Период одной из них,  $\sin \omega^* t$ , равен

$$T^* = 2\pi/\omega^* = 4\pi/(\omega_0 + \omega).$$

Множитель  $A(t)$  также ведет себя как синусоидальная функция с частотой  $\omega_b$ . Период этих колебаний, равный

$$T_b = 2\pi/\omega_b,$$

называется периодом биений (рис. 2.3, *а*) и значительно превышает  $T^*$ , если разность между частотами мала. В подобном случае частоты  $\omega^*$  и  $\omega$  близки между собой, а амплитуда колебаний изменяется на интервале  $T_b/2$  от сравнительно высоких до малых значений (рис. 2.3, *б*).

Когда частоты  $\omega^*$  и  $\omega$  приближаются друг к другу, период биений  $T^*$  стремится к бесконечности и при наступлении резонанса ( $\omega_0 = \omega$ ) смещение  $s(t)$  становится равным

$$s(t) = \frac{f_0 t}{2\omega_0} \sin \omega t, \quad (2.64)$$

а его амплитуда неограниченно возрастает со временем. Конечно, в реальности, из-за наличия затухания, такое поведение никогда не наблюдается.

#### ВЛИЯНИЕ ЗАТУХАНИЯ

Теперь мы снова предположим, что сила трения прямо пропорциональна скорости движения (закон Кулона – Мора):

$$\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}.$$

Применяя второй закон Ньютона, получим следующее уравнение для смещения  $s(t)$ :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k s(t) - \alpha \frac{ds}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = f_0 \cos \omega t, \quad (2.65)$$

где

$$2n = \alpha/m, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad f_0 = F_0/m. \quad (2.66)$$

Уравнения (2.65) и (2.51) совпадают при отсутствии затухания (диссипации), т.е. когда  $\alpha = 0$ .

Поскольку внешняя сила по-прежнему является гармонической функцией, естественно ожидать, что вынужденные колебания также описываются гармонической функцией той же частоты  $\omega$  (см. приложение 5). Поэтому частное решение уравнения (2.65) можно представить как

$$s_2(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (2.67)$$

Подставляя последнее выражение в (2.65), получим

$$L \sin \omega t + M \cos \omega t = f_0 \cos \omega t, \quad (2.68)$$

где

$$L = (\omega_0^2 - \omega^2)A - 2n\omega B,$$

$$M = (\omega_0^2 - \omega^2)B + 2n\omega A.$$

Поскольку соотношение (2.68) справедливо для произвольного момента времени  $t$ , коэффициенты должны удовлетворять следующим условиям:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A - 2n\omega B = 0, \quad (2.69)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)B + 2n\omega A = f_0.$$

Решением этих уравнений является

$$A = \frac{2n\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}$$

и

$$B = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (2.70)$$

Таким образом, поведение синусоидальных вынужденных колебаний описывается формулой

$$s_2(t) = f_0 \frac{2n\omega \sin \omega t + (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (2.71)$$

В отличие от свободных колебаний они не уменьшаются со временем, а их период равняется периоду внешней силы.

На относительно небольших временах (2.50) важную роль играют как вынужденные, так и свободные колебания. Однако с увеличением времени свободные колебания угасают, и полное смещение определяется только функцией  $s_2(t)$ . Чтобы упростить дальнейшее изложение, введем следующие обозначения:

$$A = s_0 \sin \varphi \quad \text{и} \quad B = s_0 \cos \varphi. \quad (2.72)$$

Тогда выражение (2.67) дает

$$s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.73)$$

где  $s_0$  и  $\varphi$  обозначают, соответственно, амплитуду и фазу колебаний.

Из (2.72) следует, что

$$s_0 = f_0 \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2 \omega^2}} \quad (2.74)$$

и

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\eta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.75)$$

Угол  $\varphi(\omega)$  характеризует сдвиг фаз между колебаниями  $s_2(t)$  и внешней силой  $F(t)$ .

Рассмотрим, прежде всего, частотный отклик  $s_0(\omega)$ , который удобно представить как

$$s_0 = s_{st} \Phi(\omega/\omega_0, \varphi), \quad (2.76)$$

где

$$s_{st} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

является статическим смещением массы, параметр

$$\varphi = 2\eta/\omega_0 \quad (2.77)$$

зависит от затухания, и

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{-1/2}. \quad (2.78)$$

Очевидно, что амплитуда смещения приближается к  $s_{st}$  в низкочастотной части спектра:

$$s \rightarrow s_{st}, \quad \text{если} \quad \omega/\omega_0 \rightarrow 0.$$

Это означает, что смещение  $s_2(t)$ , вызванное силой

$$F_0 \cos \omega t,$$

можно в каждый момент времени вычислить непосредственно из закона Гука, т.к.  $\omega \ll \omega_0$ .

В то же время, если  $\omega$  значительно больше  $\omega_0$ , амплитуда движения стремится к нулю. Заметим, что такое же асимптотическое поведение колебаний наблюдалось и в отсутствие затухания. По мере достижения резонансной частоты  $\omega \rightarrow \omega_0$ , амплитуда  $S_0$  увеличивается, и этот эффект резонанса становится более заметен при уменьшении затухания. Поведение функции  $\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_0}, \gamma\right)$  показано на рис. 2.4, а. Для каждой кривой указано соответствующее значение параметра  $\gamma$ .

Как видно из представленных кривых, максимальная амплитуда колебаний уменьшается с увеличением затухания. Можно также увидеть, что, по сравнению со свободными колебаниями, этот максимум смещен влево, в сторону низких частот. В случае относительно слабой диссипации смещение максимума мало.

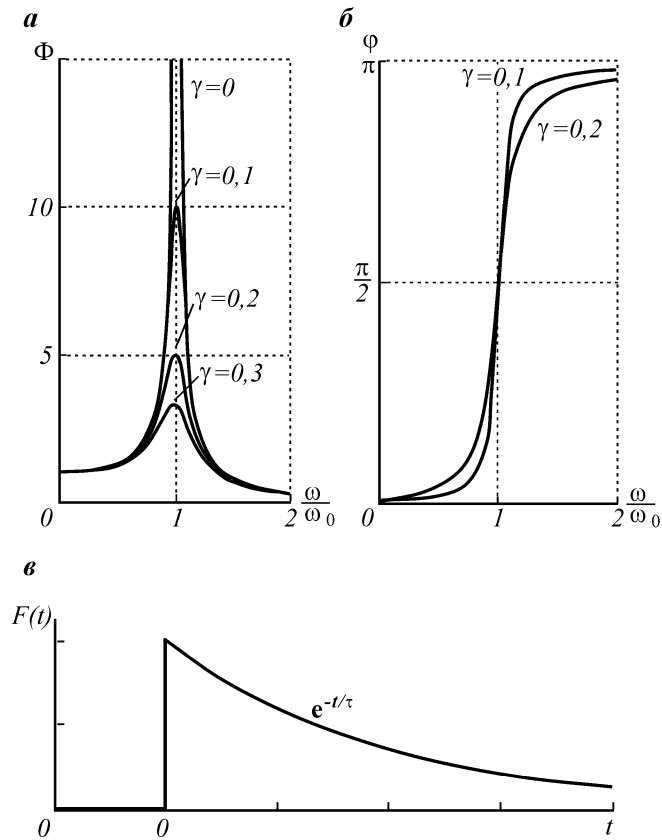


Рис. 2.4. Амплитудная и фазовая частотные характеристики (а, б); внешняя сила  $F(t)$  (в)

Из приведенных выкладок видно, что влияние затухания сказывается наиболее сильно вблизи резонансных частот. Из-за действия силы трения, как бы мала она ни была, амплитуда движения всегда имеет конечное значение. Однако вне указанного частотного диапазона влияние диссипации становится меньше, а в нижней и верхней частях спектра оно практически исчезает.

Приступим теперь к изучению фазы колебаний. Из выражения (2.75) следует, что

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\gamma}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (2.79)$$

и, следовательно, между колебаниями и внешней силой всегда существует сдвиг фаз.

В низкочастотной части спектра ( $\omega \ll \omega_0$ ) фаза растет почти линейно с увеличением частоты. Вблизи резонансной частоты  $\omega_0$ , фаза становится равной  $\pi/2$ . Это означает, что в момент времени, когда сила  $F(t)$  имеет максимальное значение, масса находится в средней точке. При дальнейшем увеличении частоты ( $\omega \gg \omega_0$ ) фаза продолжает увеличиваться и постепенно достигает значения  $\pi$  (рис. 2.4, б).

До сих пор мы изучали движение массы под действием синусоидальной силы. Рассмотрим теперь совершенно другой случай, когда сила  $F(t)$  ведет себя как (рис. 2.4, в)

$$F(t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t/\tau}, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.80)$$

где  $\tau$  является константой, характеризующей изменение силы во времени.

Предположим, что вынужденные колебания имеют ту же зависимость от времени:

$$s_2 = A e^{-t/\tau}, \quad \text{если } t \geq 0. \quad (2.81)$$

Чтобы проверить это предположение, подставим последнее равенство в уравнение движения

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f_0 e^{-t/\tau}. \quad (2.82)$$

Здесь  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ .

После сокращения на множитель  $e^{-t/\tau}$ , получим

$$\frac{A}{\tau^2} - \frac{2nA}{\tau} + \omega_0^2 A = f_0,$$

или

$$A = \frac{f_0}{\tau^{-2} - 2n\tau^{-1} + \omega_0^2}. \quad (2.83)$$

Таким образом, наше предположение оказалось верным и частное решение уравнения (2.82) есть

$$s_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Ae^{-t/\tau} & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.84)$$

Полное смещение массы записывается как

$$s(t) = s_1(t) + Ae^{-t/\tau}, \quad (2.85)$$

где  $A$  определено в (2.83), а  $s_1(t)$  представляет собой свободные колебания системы. Из-за наличия диссипации, колебания затухают со временем, независимо от того, какое значение имеет параметр  $\tau$ .

Полезно рассмотреть предельный случай, при котором сила ведет себя как ступенчатая функция и, следовательно,  $\tau \rightarrow \infty$ . Из формулы (2.83) имеем

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = s_{st},$$

и

$$s(t) = s_1(t) + s_{st}. \quad (2.86)$$

Таким образом, полное смещение массы представляет собой сумму двух слагаемых. Первое из них – свободные колебания, затухающие во времени. Другое слагаемое представляет собой смещения  $s_{st}$  вызванные постоянной силой  $F_0$ . Мы видим, что вначале движение системы происходит аналогично свободным колебаниям, а затем оно постепенно приближается к асимптотическому значению  $s_{st}$ .

В заключение следует добавить, что в случае, когда внешняя сила является произвольной функцией времени, функцию  $s(t)$  можно определить, используя интеграл Фурье (см. приложение 7).

## 2.4. ПРИНЦИПЫ ИЗМЕРЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

В предыдущих разделах мы изучали движение системы, состоящей из пружины и подвешенного к ней груза, при условии, что точка подвеса  $O$  оставалась неподвижной. Опишем теперь движение массы для случая, когда верхний конец пружины также вовлечен в процесс движения системы (рис. 2.5, а). Этот случай полезен для понимания работы приборов, позволяющих записывать колебания. Такие приборы могут измерять движение кораблей и различных механизмов, а также вертикальную и горизонтальную составляющие движения земной поверхности, вызванного землетрясениями, взрывами и другими источниками.

Предположим, что платформа движется в вертикальном направлении, а ее смещение  $s(t)$  описывается синусоидальной функцией

$$s(t) = b \cos \omega t. \quad (2.87)$$

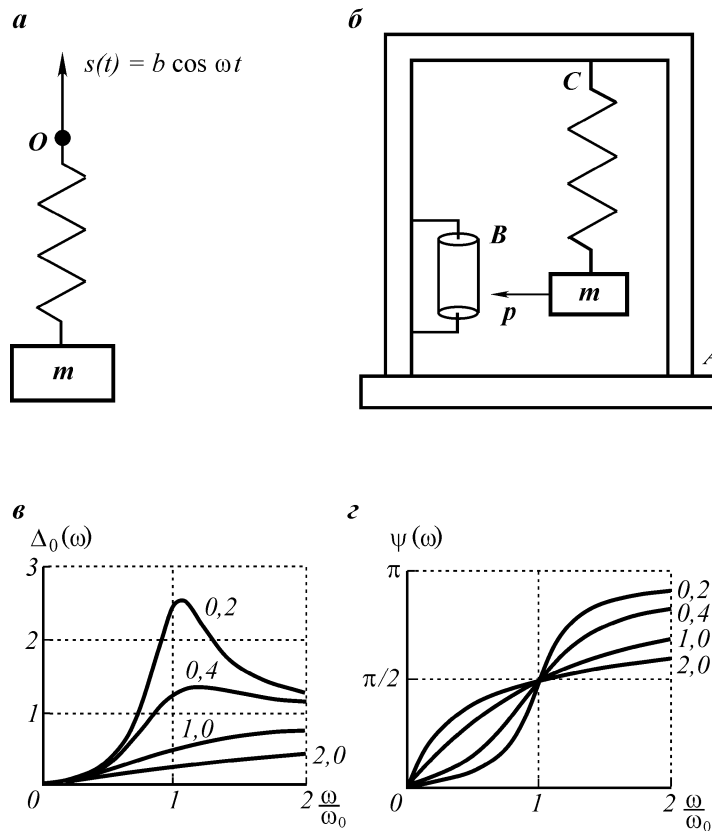


Рис. 2.5. Колебания верхнего конца пружины (а); измерение колебаний (б); частотные характеристики  $\Delta_0(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  (в, з)

Наша задача состоит в том, чтобы измерить амплитуду и частоту колебаний массы  $m$  и затем получить информацию о функции  $s(t)$ . С этой целью представим себе простейший прибор, размещенный на платформе и состоящий из следующих элементов (рис. 2.5, б):

- рамы  $A$ ;
- вращающегося барабана  $B$  с бумагой, связанного с рамой  $A$ ;
- вертикально подвешенной пружины с грузом массы  $m$ , верхний конец которой жестко закреплен на раме  $A$ ;
- самописца  $p$ , прикрепленного к грузу и записывающего движения на вращающемся барабане.

Существенно при этом, что рама  $A$  прибора движется вместе с платформой. Другими словами, все точки рамы, включая точку  $C$ , двигаются точно так же, как и сама платформа. Это условие является необходимым при измерении колебаний.



Рассмотрим теперь движение массы  $s_2(t)$  и установим связь между этим движением и движением платформы, задаваемым выражением (2.87). Это означает, что, записывая движение массы на вращающемся барабане, мы тем самым пытаемся определить значения функции  $s(t)$ . Ясно, что скорость вращения барабана влияет только на временной масштаб записи.

Если платформа не движется, прибор, включая груз, также покоится и, следовательно, самописец рисует горизонтальную линию на бумаге, надетой на барабан. Предположим, что платформа вместе с рамой А начинают двигаться, например, вниз. Такое движение приводит к сжатию пружины, в результате чего возникают упругие силы. Масса также начинает двигаться и растягивать пружину. Таким образом, силу пружины, действующую на массу, можно представить как

$$F = k(s - s_2),$$

где  $s(t)$  и  $s_2(t)$  – смещения соответственно рамы прибора и массы, имеющие в общем случае различные амплитуды и фазы.

Следует заметить, что упругая сила возникает вследствие движения обоих концов пружины. Учитывая, что сила трения, вызванная окружающей средой, прямо пропорциональна скорости движения массы относительно рамы, имеем

$$F_r = -\alpha \frac{d}{dt}(s_2 - s).$$

Далее, применяя второй закон Ньютона, получим для функции  $s_2(t)$  уравнение, описывающее движение массы:

$$m \frac{d^2 s_2}{dt^2} = -\alpha \frac{d}{dt}(s_2 - s) - k(s_2 - s)$$

или

$$\frac{d^2(s_2 - s)}{dt^2} + 2n \frac{d(s_2 - s)}{dt} + \omega_0^2(s_2 - s) = -\frac{d^2 s}{dt^2},$$

поскольку

$$\omega_0^2 k / m.$$

Вводя новую переменную

$$\Delta(t) = s_2(t) - s(t), \quad (2.88)$$

перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{d^2 \Delta(t)}{dt^2} + 2n \frac{d\Delta(t)}{dt} + \omega_0^2 \Delta(t) = -\frac{d^2 s(t)}{dt^2}. \quad (2.89)$$

В случае синусоидальных колебаний (2.87) имеем

$$\frac{d^2 \Delta(t)}{dt^2} + 2n \frac{d\Delta(t)}{dt} + \omega_0^2 \Delta(t) = \omega^2 b \cos \omega t. \quad (2.90)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.65), при условии, что  $f_0 = \omega^2 b$ . Поэтому, в принципе, можно было бы использовать результаты предыдущего раздела. Однако здесь удобнее применить комплексную форму синусоидальных функций.

Далее мы будем рассматривать только вынужденные колебания  $s_2(t)$ . Ранее было показано, что эти колебания ведут себя как гармоническая функция

$$\Delta = \Delta_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

или, используя формулу Эйлера (приложение 4),

$$\Delta \operatorname{Re}(D e^{-i\omega t}) \quad (2.91)$$

где

$$D = \Delta_0 e^{i\varphi}. \quad (2.92)$$

является комплексной амплитудой смещений.

Подставляя (2.91) в уравнение (2.90) и выражая правую часть этого уравнения через комплексную амплитуду (см. приложение 5), получим

$$D = \frac{\omega^2 b}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2in\omega} \quad (2.93)$$

или

$$D = \Delta_0 \frac{\omega^2 b}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}$$

и

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.94)$$

Очевидно, что, если рама  $A$  и масса  $m$  испытывают одинаковые смещения, то запись на барабане не покажет какого-либо смещения от начального положения. Иными словами, амплитуда записи прямо пропорциональна разности смещений массы и рамы, т.е. функции  $\Delta(t)$ . Это является важным свойством вибрографов – приборов, измеряющих вибрации.

Как следует из выражений (2.94), на высокочастотном конце спектра ( $\omega \ll \omega_0$ )

$$\Delta_0 \rightarrow b \quad \text{и} \quad \varphi \rightarrow \pi,$$

поскольку масса почти не движется. Этот диапазон частот безусловно является самым лучшим для измерений смещений прибора.

В отличие от предыдущего случая, при низких частотах ( $\omega \ll \omega_0$ )

$$\Delta_0 \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} b \quad \text{и} \quad \varphi \rightarrow 0.$$

Это означает, что по записи можно определить ускорение рамы.

Похожее поведение наблюдается, когда движение прибора описывается произвольной функцией времени  $s_1(t)$ . Действительно, если колебания изменяются быстро, то первое слагаемое в левой части уравнения (2.89) является доминирующим. В соответствии с этим

$$\frac{d^2 \Delta(t)}{dt^2} \approx \frac{d^2 s(t)}{dt^2},$$

и функция  $\Delta(t)$  характеризует движение прибора.

В противоположном случае, когда движения являются медленными, превалирует последнее слагаемое, и поэтому

$$\Delta_0 \approx \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2},$$

т.е. запись определяется ускорением.

Функции  $\Delta_0(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  показаны на рис. 2.5, в, г.

В данном разделе мы проиллюстрировали основные принципы измерения вибраций, используя простой механический прибор с малой чувствительностью. В действительности, такие приборы являются гораздо более сложными. Например, электромагнитный преобразователь, установленный в большинстве геофонов и преобразующий механическую энергию колебаний в электромагнитную энергию, позволяет измерять движения чрезвычайно малых амплитуд порядка  $10^{-5} - 10^{-7}$  м.